



Innovación Educativa

ISSN: 1665-2673

innova@ipn.mx

Instituto Politécnico Nacional

México

Benítez Pérez, Alma Alicia

Estudio de la primera representación gráfica de ecuaciones algebraicas en contexto

Innovación Educativa, vol. 9, núm. 46, enero-marzo, 2009, pp. 41-49

Instituto Politécnico Nacional

Distrito Federal, México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=179414894005>

- ▶ Cómo citar el artículo
- ▶ Número completo
- ▶ Más información del artículo
- ▶ Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

Estudio de la primera representación gráfica de ecuaciones algebraicas en contexto

Alma Alicia Benítez Pérez*

Resumen

El aprendizaje de las ciencias se logra cuando los alumnos desarrollan disposición y apreciación para participar en actividades propias del quehacer científico. En este escenario es importante aprender a resolver problemas en los cuales se puedan aplicar diversas representaciones que les permitan examinar soluciones y relaciones. El presente trabajo plantea la posibilidad de impulsar la estrategia didáctica de la *matemática en contexto* como medio de promover habilidades del pensamiento, explorando diversas representaciones para identificar la organización de sus relaciones y establecer su articulación en problemas contextualizados.

Study of the first graphical representation of algebraic equations in context

Abstract

Learning of science is achieved when the student develops a provision for assessment and participate in activities characteristic of scientific work. In this scenario, is important to learn to solve problems which can be applied various representations to enable it to consider solutions and relationships. This work raises the possibility of boosting the didactic strategy of the Mathematics in Context as a means of promoting abilities of thought, exploring various representations to identify the organization of their relations and establish its articulation problems in contextualized.

Palabras clave

Álgebra, representaciones, resolución de problemas, matemática en contexto.

Keywords

Algebra, representations, problem solving, mathematics in context.

* Maestra y doctora en ciencias con especialidad en matemática educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav, IPN). Actualmente se desempeña como profesora/investigadora en el Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos, CECyT 11 Wilfrido Massieu Pérez de la misma institución, México. E-mail: abenitez@ipn.mx

Introducción

Los programas de estudio a nivel bachillerato y particularmente los de los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECyT's), área físico matemáticas, mencionan la importancia de promover las habilidades del pensamiento: análisis, interpretación y síntesis, así como la elaboración de conjeturas, argumentación, abstracción y generalización. Este proceso permite la contextualización y en este sentido las representaciones adquieren un papel importante, pues de éstas depende la estructura cognitiva del estudiante.

La representación es un proceso que en las ciencias dinamiza la resolución de eventos contextualizados: facilita al alumno dar sentido a la información que le brinda el evento contextualizado y operarla hasta dar respuesta a la exigencia solicitada. En específico, la primera representación gráfica, con la cual se inicia el proceso de solución, es decisiva porque se presenta entre la percepción del evento y el proceso de resolución. Durante éste influyen varios aspectos como: la formulación del problema, las ideas previas del estudiante, las condiciones dentro de las cuales el problema está inmerso —referido en términos de comunicación— entre otros. Dichos factores son determinantes para que el estudiante pueda reinterpretar o modificar la primera representación, cuyo tratamiento conlleva a identificar información para hacer inferencias y seleccionar los elementos relevantes que, con posterioridad, se traducirán en la abstracción del análisis de las partes y su integración, dando lugar a la síntesis y a la conclusión del evento.

Marco de referencia

La *matemática en contexto* de las ciencias es una teoría que reflexiona acerca de la vinculación que debe existir entre la matemática y las ciencias que la requieren (Camarena, 1984, 1995, 2001, 2005).

El supuesto filosófico educativo de esta teoría consiste en que el estudiante esté capacitado para realizar la transferencia del conocimiento de la matemática a las áreas que la requieren, y que con ello las competencias profesionales y laborales sean favorecidas. En otras palabras: se busca una matemática para la vida. La teoría contempla cinco fases: curricular, didáctica, epistemológica, formación docente y cognitiva.

La fase didáctica posee una estrategia denominada *matemática en contexto* (Camarena, 1995), en donde se presenta al estudiante una matemática contextualizada en las áreas del conocimiento de su futura profesión, en actividades de la vida cotidiana, profesionales y laborales a través de eventos contextualizados que pueden ser problemas o proyectos.

La *matemática en contexto* contempla nueve etapas que se desarrollan en el ambiente de aprendizaje en equipos de alumnos, en donde deberá identificarse

un líder académico, un líder emocional y un líder de trabajo:

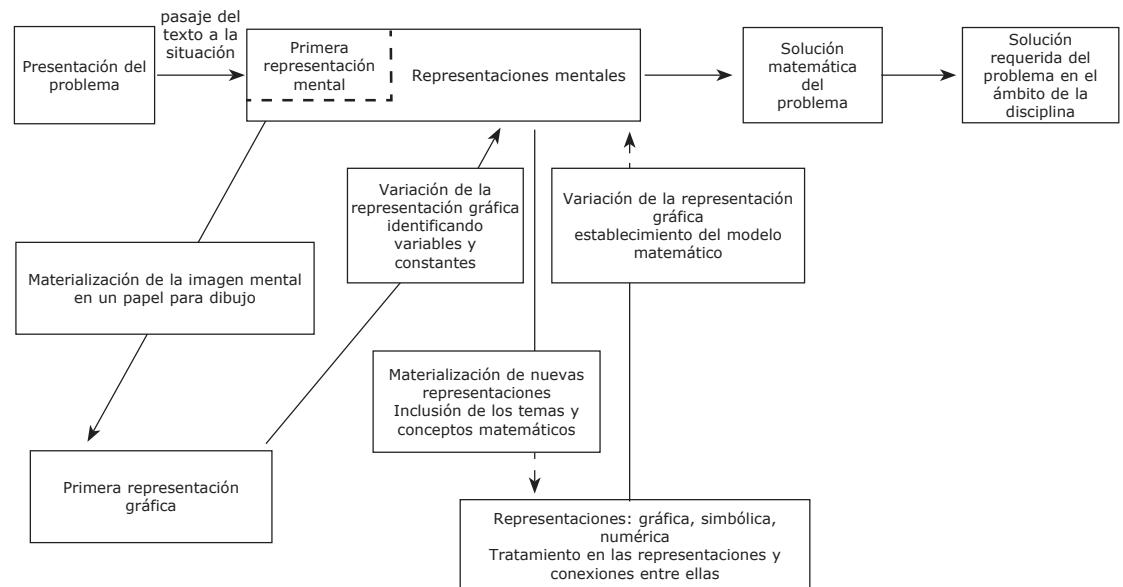
1. Identificar los eventos contextualizados.
2. Plantear el evento contextualizado.
3. Determinar las variables y las constantes del evento.
4. Incluir los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelo matemático y solución del evento.
5. Determinar el modelo matemático.
6. Dar solución matemática al evento.
7. Determinar la solución requerida por el evento.
8. Interpretar la solución en términos del evento y disciplinas del contexto.
9. Presentar una matemática descontextualizada.

Entre las actividades que el estudiante desarrolla son importantes las representaciones de los objetos matemáticos, elemento al que se aboca la presente investigación.

El papel que desempeñan las representaciones en el aprendizaje de la matemática es fundamental ya que posibilitan la comunicación y comprensión del sujeto con su medio. Son configuraciones —palabras, gráficas, ecuaciones— que pertenecen a sistemas altamente estructurados, denominados “esquemas simbólicos” (Kaput, 1987), “sistemas representacionales” (Goldin, 1987), o “sistemas semióticos” (Duval, 1993), constituidos de caracteres o signos primitivos para ser combinados a través de reglas particulares en cada sistema. Dichas reglas estructuran el sistema de producción de la representación que contribuye a enriquecer su contenido (Duval, 1996; Goldin y Kaput, 1996).

Callejo (1994), estudia el empleo de las representaciones gráficas por alumnos de nivel medio básico (secundaria) cuando resuelven problemas; su investigación reporta los elementos que, desde su perspectiva, determinan la elección, interpretación y modificación de estas representaciones, es decir, descripción de la situación, preguntas y contexto matemático en que está envuelto el enunciado. Estos factores influyen de modo directo para elegir el primer acercamiento con la representación gráfica, a ello Callejo denomina representación generatriz, por ser ésta la primera representación gráfica que inicia el proceso de resolución del problema en operación, siguiendo un acompañamiento de representaciones diseñadas con la misma finalidad del proceso. Por ejemplo: ilustrar el enunciado del problema, formalizar el problema dentro del dominio matemático, aplicar una estrategia de solución, entre otras, de tal manera que el acompañamiento de las representaciones diseñadas en el curso de la resolución del problema está determinado por la primera representación generatriz (Benítez, 2007). El esquema 1 muestra el análisis de la primera representación gráfica en eventos contextualizados.

Esquema 1
Análisis de la primera representación gráfica.



Fuente: Benítez, 2007.

Respecto a las representaciones semióticas Duval (2000), menciona la necesidad de manejar al menos dos registros de representación semiótica para llevar a cabo las tres funciones cognitivas —formación, tratamiento y conversión— y poder lograr la aprehensión del objeto. La visualización matemática no es un acto de aprehensión simultánea en el campo de la percepción, es una actividad cognitiva intencional que produce una representación en una superficie de dos dimensiones —pantalla, papel— la cual muestra las relaciones entre las unidades que componen las figuras. Eso quiere decir que: la visualización matemática expone solo a los objetos que se hacen “ver” a través de las organizaciones de las relaciones que tienen las unidades de las figuras. Por lo cual “ver” en matemática implica identificar las relaciones o la organización de relaciones entre las unidades representacionales que constituyen una representación semiótica (Duval, 1996).

Para reconocer las unidades representacionales es preciso la exploración detallada para producir construcciones de acuerdo con las propiedades o reglas de la representación. Estas unidades se conectan, bi-dimensionalmente, porque se requiere la organización de al menos dos dimensiones para establecerla. Las representaciones gráfica y numérica son un tipo de visualización en matemática, particularmente necesarias en la investigación a realizar. Ambas representaciones poseen organizaciones visuales bi-dimensionales: el cuadriculado del plano en líneas para la gráfica y la distribución en columnas para la tabla.

Metodología

El propósito de la experiencia educativa fue proporcionar al estudiante diversas situaciones asociadas a la representación gráfica, empleando tratamientos que evidencian su riqueza, impulsando la formulación de problemas. La actividad se realizó en el contexto de la química en un curso de álgebra. Con anterioridad los alumnos no habían participado en esta forma de trabajo, es decir, se modificó la práctica en el salón de clase, se impulsó la comunicación de ideas y la continua participación activa.

La experiencia contó con un grupo de 40 alumnos del nivel medio superior del CECyT 11 *Wilfrido Massieu Pérez*, de primer semestre del ciclo escolar, con una duración de 18 semanas. Las edades de los participantes fluctuaban entre 15 y 16 años.

Desarrollo de la experiencia educativa

Identificación de los eventos contextualizados

Para el diseño de las actividades previamente se analizó el contenido matemático con el propósito de identificar las ideas principales a desarrollarse. El resultado se enfocó en dos ideas centrales que articulan toda la organización conceptual de álgebra: lenguaje algebraico y modelación con ecuaciones y funciones, ello facilitó plantear modelos lineales y de cuadráticas en situaciones concretas. En función de estas ideas se diseñaron las actividades; algunas fueron observadas en un curso

paralelo, anterior a la experiencia, a fin de examinar el potencial o bien identificar las dificultades que podrían tener los alumnos.

Una de las características principales de las actividades fue proporcionar información al estudiante —presentada en tablas, gráficas, enunciados verbales para explorar contenidos y establecer conexiones— con el objetivo de analizar diversas representaciones y darles seguimiento.

Planteamiento del problema de las disciplinas del contexto

Dos velas (V_1 y V_2) del mismo tamaño (120 cm) están hechas de distintos materiales tales que, una se consume de modo uniforme en tres horas, en tanto la otra se consume en cuatro horas:

1. ¿Cuál es la altura de V_1 al término de 2 hrs. 40 min?
2. ¿Cuál es la altura de V_2 al término de 2 hrs. 30 min?
3. Si V_1 y V_2 se encienden a las 2:00 pm: ¿a qué hora V_1 tendrá 30 cm de altura?
4. Si V_1 y V_2 se encienden a las 5:00 pm: ¿a qué hora V_2 tendrá 15 cm de altura?
5. ¿Cuál es la ecuación de la recta correspondiente a cada vela?
6. ¿Dar una explicación de lo que representa cada vela?
7. ¿A qué hora deben encenderse ambas velas simultáneamente para que a las 5:00 pm un cabo de vela mida el triple del otro?

Determinación de las variables y de las constantes del problema

Las variables identificadas: tiempo, altura.

Inclusión de los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelaje y su solución

Temas: ecuación de la recta, interpretación de la gráfica y la tabla numérica, sistema de ecuaciones lineales.

Determinación del modelo matemático

Ecuación V_1	Ecuación V_2
$V_1 = 120 - 40t$	$V_2 = 120 - 30t$

Solución matemática del problema

$$\begin{aligned}V_1 &= 120 - 40t & 3(120 - 40t) &= 120 - 30t \\V_2 &= 120 - 30t & 360 - 120t &= 120 - 30t \\3V_1 &= V_2 & 360 - 120 &= 120t - 30t \\&& 240 &= 90t \\t &= \frac{240}{90} & t &= \frac{24}{9} \\&& t &= 2.66 \text{ hrs} \\&& t &= 160 \text{ min} \\&& t &= 2 \text{ hrs } 40 \text{ min}\end{aligned}$$

Ambas velas deben encenderse simultáneamente a las 2:20 pm para que a las 5:00 pm un cabo de vela mida el triple que el otro.

La experiencia

Fase de introducción. Los alumnos participantes carecían de experiencia para practicar la nueva dinámica debido a que estaban habituados a la enseñanza magistral. Ante esta situación, en la primera semana se les introdujo al trabajo y discusión en equipo durante la cual el profesor fungió como coordinador.

Dinámica de trabajo en el aula. La clase se organizó en equipos de cuatro a cinco integrantes, con un total de seis equipos por grupo. Al inicio de la sesión se entregó el planteamiento del problema a resolver con la finalidad de trabajarlo de manera colectiva; un integrante del equipo se encargó de recoger la información que se obtuvo en el proceso de solución; en tanto el profesor participó como espectador y en caso necesario dio asesoramiento. Una vez terminada la tarea los equipos presentaron un reporte escrito.

El docente como resultado de su observación a los equipos seleccionó uno —teniendo en cuenta los diferentes puntos de vista expuestos en el grupo, la participación en la discusión para aclarar dudas y superar dificultades— para que expusiera su trabajo al grupo. Los reportes de los equipos se les entregaron en la siguiente sesión con diferentes anotaciones a fin de que el alumno, de manera individual, revisara y corrigiera el trabajo si era el caso.

En determinados momentos el maestro expuso al grupo algunos tópicos que ocasionaron dificultad, por ejemplo: identificar información relevante en el transcurso del estudio de las representaciones, a lo cual los alumnos manifestaron mayor interés para explorar los trazos.

Discusión del trabajo

Se utilizaron los reportes escritos y grabaciones de las sesiones en audio y video como instrumentos de recolección de datos. Para presentar los resultados del estudio se consideró lo siguiente:

1. Las estrategias que el alumno empleó ante una situación contextualizada.
2. Las variables y los criterios de selección.
3. La elección de la primera representación y el tratamiento realizado.
4. Etapas transitadas en el proceso de solución del evento contextualizado.

Los estudiantes en sus primeros acercamientos con la información construyeron un modelo inicial con elementos parciales y omisión de otros, manteniendo la mayoría de ellos el esquema original del modelo sin presentar cambio alguno. Pocos estudiantes modificaron el modelo

inicial mediante la interacción con la tarea, demostrando la habilidad de reestructurar la situación, actividad desarrollada a lo largo de toda la experiencia educativa.

Otro elemento importante a destacar fue el tratamiento aritmético que tuvieron los alumnos, a pesar de haber practicado procedimientos aritméticos como base fundamental a fin de pasar a un tratamiento simbólico con las relaciones identificadas.

Con respecto al análisis de las representaciones emplearon tres de éstas: gráfica, numérica y algebraica, cuyo tratamiento se enfocó en el estudio cuantitativo, es decir, se exploró el contenido de las representaciones con la elección de puntos, aunque se identificaron algunos rasgos en la representación gráfica en cuanto al comportamiento cualitativo de la curva.

En este sentido, los estudiantes lograron mejorar el entendimiento de la situación a través de la elaboración o tratamiento de las representaciones; sin embargo, la articulación entre éstas es un proceso que pocos estudiantes lograron concretar debido a las dificultades presentadas, tales como: no poder establecer relaciones entre el comportamiento de las alturas en las velas con el significado de las pendientes y las ordenadas al origen en las expresiones algebraicas. Ello reveló falta de conexión entre el contenido de la gráfica y la expresión algebraica.

No obstante, la exploración en la tabla de valores permitió identificar las pendientes de las rectas en las expresiones algebraicas, reconociendo que las pendientes son negativas y su interpretación se orientó a la disminución del tamaño de las velas en la representación gráfica.

Un aspecto reiterativo en la actividad fue que, si bien los alumnos parecían entender la esencia de las diversas tareas planteadas, emplearon el mismo esquema en todas las actividades, ello sugiere que tienden a examinar relaciones siguiendo un conjunto de reglas propuestas por el docente.

En el transcurso de la actividad se identificaron tres etapas. La primera de apropiación, en la cual los alumnos atendieron algunos aspectos relevantes ya que construyeron preguntas parciales a la situación. En la segunda, identificaron más información que les permitió reexaminar la situación para establecer nuevas preguntas, así como una primera formulación del problema. En la tercera etapa determinaron conexiones entre la información identificada y la formulación de nuevos eventos en la situación. Con esta dinámica los participantes adquirieron de manera paulatina mayor comprensión de la situación. En tanto el docente se concentró en coordinar la discusión en los equipos y en el planteo de preguntas con la intención de aclarar dudas y replantear nuevos retos.

A continuación y a modo de muestra se exhibe el trabajo de un equipo. Éste identificó información parcial de la situación; sin embargo, durante el análisis del consumo de las velas reconoció información relativa a sus alturas respecto al tiempo transcurrido; al cuestionársele la relación en el consumo de las velas no identificó ningún rasgo característico desde el punto de vista de la relación entre ambos eventos. Con base en ello, el equipo analizó la representación numérica, que representaba el comportamiento de las velas para ciertos tiempos, y planteó un primer problema: ¿cómo determinar el comportamiento del consumo de las velas? (Imagen 1).

Imagen 1
Tratamiento de la representación numérica.

A_t	t	h	$4h$
2	0	120	-40
2	2	80	
2	4	40	-40
2	6	0	-10

A_t	t	h	$4h$
2	0	120	-60
2	2	60	
2	4	0	-60

Fuente: Benítez, 2007.

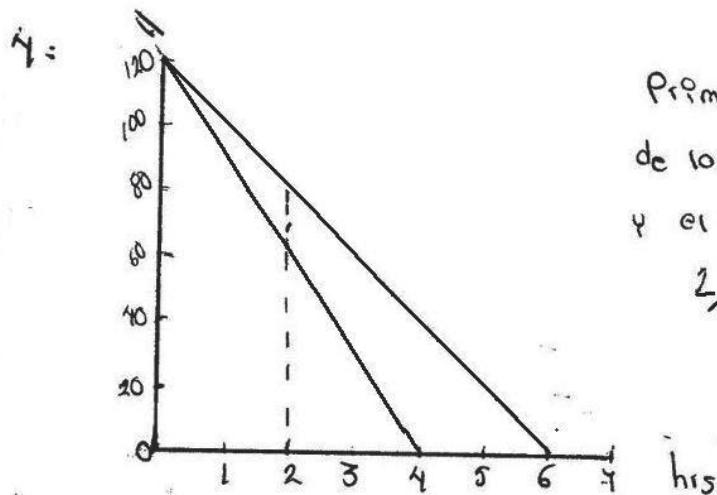
Con la intervención del profesor identificó (el equipo) nueva información que le permitió releer el problema y continuar con la exploración de la representación gráfica.

ca. En este punto, se consideró que el problema planteado aún era vago e impreciso, por lo cual el docente sugirió replantear la situación (Imagen2).

Imagen 2

Tratamiento de la representación gráfica.

3-1. Son a las 2 horas en lo cool uno vela medida el doble de lo otra. Otra.



Primero vemos el consumo de lo vela durante 6 hrs y el punto en que $y > 2$
 $2, 3\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2} \text{ y } 4\frac{1}{2} \text{ s}$

Fuente: Benítez, 2007.

El equipo realizó una nueva presentación en donde aplicó la analogía con una situación de vida cotidiana, en ese momento surgió una idea que resultó muy importante en el seguimiento del problema: considerar la

interpretación del contenido de la representación gráfica para construir las expresiones algebraicas que modelan el comportamiento de las velas basado en la información obtenida (imagen 3).

Imagen 3

Exploración de la representación algebraica.

3-2 Primero observamos en qué momento de la gráfica una media el doble que la otra y observamos que era a las 3 Hrs. ∴ Se deben de prender a las 3 Hrs.

Demostración.

$$\begin{aligned} Y &= 30x + 120 \\ Y &= -30(3) + 120 \\ Y &= -90 + 120 \\ Y &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= -20x + 120 \\ Y &= -20(3) + 120 \\ Y &= -60 + 120 \\ Y &= 60 \end{aligned}$$

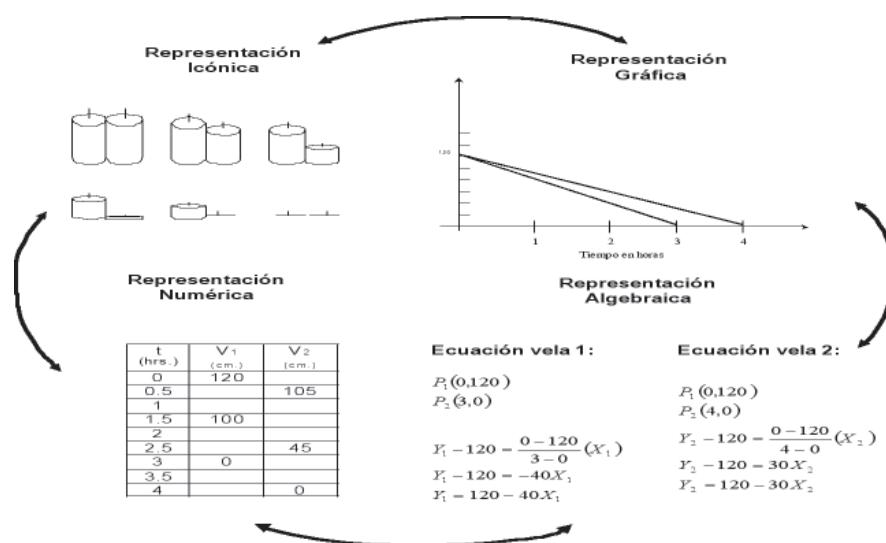
∴ 60 es el doble de 30.

∴ Se prenden a las 2 Hrs. para que a las 5 se consuma y sea mayor que la otra.
 $2 + 3 = 5 \text{ Hrs.}$

Fuente: Benítez, 2007.

Por lo tanto, el equipo empleó en el análisis al menos tres representaciones para su exploración, las cuales se muestran en la imagen 4.

Imagen 4
Representaciones empleadas:
tabla, gráfica, expresión algebraica y expresión icónica.



Fuente: Benítez, 2007.

Aunque la información fue relevante para la situación, el equipo no logró establecer una relación para mostrar la condición del problema: ¿a qué hora deben encenderse V₁ y V₂ simultáneamente para que a las 5:00 pm un cabo de vela mida el triple que el otro?

El proceso comenzó reconociéndose información parcial de la situación que, por lo general, es la más notoria y sobre esa base se construyó un modelo inicial. Mediante las preguntas planteadas por el docente los estudiantes pasaron a otro nivel en donde identificaron nueva información, lo que llevó a revisar el problema planteado originalmente.

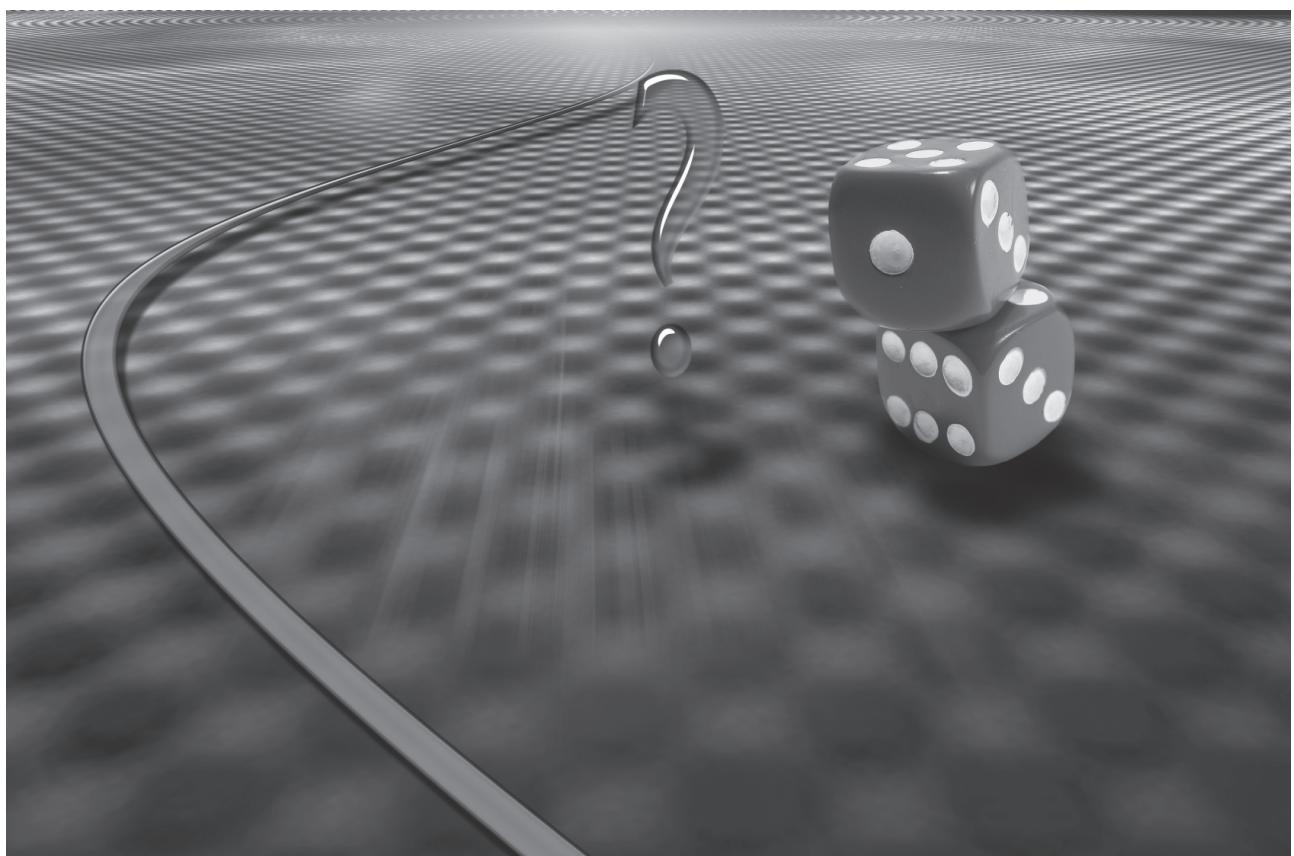
Sin embargo, su reacción no fue espontánea y mantuvieron el planteamiento inicial del problema; es decir que, a pesar de descubrir nueva información no la utilizaron para reexaminar el problema inicial y no la relacionaron con la identificada previamente. Los alumnos cambiaron de perspectiva a causa del cuestionamiento del profesor y de la interacción con las tareas; ambos elementos propiciaron que se comprendiera que la nueva información ocasionó la modificación del problema original.

Las fases que se detectaron fueron:

- Identificación de la información y/o entendimiento de la situación.

- Primera formulación del problema y empleo de la primera representación (numérica).
- Descubrimiento de nueva información y reformulación del problema original para emplear la representación gráfica.
- Explorar el contenido de las representaciones a través de la reformulación del problema.
- Articulación de las representaciones.

En el proceso de formulación del problema aparece entrelazado el seguimiento, es decir, surge una idea o conjectura; en esta etapa los alumnos manipularon las alturas de las velas en la situación y las explicaron de acuerdo a su consumo. Este proceso (el de formulación de problemas) mostró una complejidad con el surgimiento de dificultades o concepciones falsas que lo obstaculizaron. Ahora bien, otro enfoque en la percepción de la situación por nuevos aspectos no trae consigo de modo inmediato un cambio; en la interacción es posible superar las dificultades que se presentan. Otro factor observado en la experiencia, no menos importante, fue las notables deficiencias del lenguaje utilizado por los alumnos para expresarse, en este caso las ideas que pueden surgir en el proceso de formulación.



Conclusiones

De la actividad realizada se observó que en cuanto a los estudiantes:

1. Se enfocaron en sus primeras interacciones a situaciones o elementos parciales omitiendo otros de carácter relevante durante el análisis del problema.
2. Ante una situación atendieron algunos aspectos mientras desatendieron otros –variabilidad en la interacción– lo que determinó que en esta actividad se requiere que tengan la vivencia con la finalidad de fortalecer su percepción frente a las preguntas planteadas.
3. Pretendieron reproducir la actividad en otras diferentes, lo cual sugiere que tienden a examinar datos o relaciones siguiendo las reglas presentadas por el maestro.
4. En el trabajo en equipo se superó la tendencia calculista. No obstante cuando el trabajo a desarrollar fue individual se regresó al uso de tratamientos cuantitativos, mientras que por equipo exploraron las situaciones con métodos cualitativos.
5. Las discusiones en plenaria les permitieron debatir sus argumentos en un ambiente de análisis y de razonamiento.

En cuanto a la práctica:

1. El proceso de aprendizaje sufrió altas y bajas, principalmente en aquellas destinadas a construir o interpretar situaciones.
2. El estudio de la primera representación a través de la reformulación del problema permitió fortalecer el empleo de diversas representaciones para establecer conjeturas, lo cual enriqueció el contenido de la representación generatriz.
3. La organización de las actividades de acuerdo a la *matemática en contexto* –trabajo en equipo, exposiciones y discusión grupal– coadyuvó para que los estudiantes expusieran sus ideas y conjetas.
4. Esta propuesta implicó una nueva perspectiva para el profesor que imparte la asignatura de álgebra, ya que el alumno aprende una forma de estructura diferente para trabajar en el aula, reafirma los conocimientos previos y las experiencias que intercambia con los miembros de su equipo y con el profesor. Por su parte el docente también aprende una nueva perspectiva de su labor que exige disciplina, preparación y compromiso en el proceso de aprendizaje personal y del educando.

Recibido noviembre 2008
Aceptado febrero 2009

Bibliografía

Benítez Pérez, Alma, *Las representaciones gráficas y la matemática en el contexto de las ciencias*, reporte técnico de investigación del proyecto número de registro CGPI 20071568, México, 2007, IPN.

Callejo, María Luz, "Les représentations graphiques dans la résolution de problèmes: une expérience d'entraînement D'étudiants dans un club mathématique" in *Educational Studies in Mathematics* 27, 1994, pp. 1-33.

Camarena, Gallardo, Patricia, *La matemática en el contexto de las ciencias: las competencias profesionales*, reporte de investigación, México, 2005, ESIME-IPN.

Camarena, Gallardo, Patricia, *Los modelos matemáticos como etapa de la matemática en el contexto de la ingeniería*, reporte de investigación, México, 2001, ESIME-IPN.

Camarena, Gallardo, Patricia, "La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería" conferencia presentada en el *XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana*, México, 1995.

Camarena, Gallardo Patricia, *El currículo de las matemáticas en ingeniería*, Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN, México, 1984, IPN.

Duval, Raymond, "Basic issues for research in mathematics education", in *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. I, 2000, pp. 55-69.

Duval, Raymond, "Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage", in *Actes de la 46^{ème} Reencontré Internationale de la CIEAEM*, tome 1, (ed. Antibici), 1996b, Toulouse, Université Paul Sabatier, pp. 3-15.

Duval, Raymond, "Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros", en *Antología de educación matemática*, compilación de Rodrigo Cambray Núñez, Ernesto A. Sánchez Sánchez y Gonzalo Zubieta Badillo, 1993, Cinvestav, México.

Goldin, A. y J. Kaput, "A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics" in *Theories of Mathematical Learning*, Paul Cobb, Gerald A. Goldin y Brian Greer, Hillsdale, New Jersey, 1996, Lawrence Erlbaum Associates.

Goldin, G., "Levels of language in mathematical problem solving", in C. Janvier (ed.) *Problems of Representation in Teaching and Learning of Mathematics*, Hillsdale, New Jersey, 1987, Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, James, "Representation systems and mathematics", in C. Janvier (ed.) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Hillsdale, New Jersey, 1987, Lawrence Erlbaum Associates.