Revista Integración
ISSN: 0120-419X
integracion@matematicas.uis.ed
Universidad Industrial de Santander
Colombia

Angulo-Castillo, Vladimir
Una aplicación de las funciones débilmente contractivas a problemas de valor en la frontera de funciones con valores en intervalos
Revista Integración, vol. 32, núm. 1, enero-junio, 2014, pp. 27-37
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia

Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 32, No. 1, 2014, pág. 27–37

Una aplicación de las funciones débilmente contractivas a problemas de valor en la frontera de funciones con valores en intervalos

Vladimir Angulo-Castillo*
Universidad Industrial de Santander, Escuela de Matemáticas, Bucaramanga, Colombia.

Resumen. Se estudia la existencia y unicidad de soluciones para problemas de valor en la frontera asociadas a ecuaciones diferenciales de funciones con valores en intervalos, usando la derivada de Hukuhara y algunos teoremas de punto fijo de funciones débilmente contractivas definidas en conjuntos parcialmente ordenados.
Palabras claves: Funciones contractivas, funciones con valores en intervalos, diferenciabilidad de funciones con valores en intervalos, ecuaciones diferenciales de funciones con valores en intervalos.
MSC2010: 47H09, 26E25, 34L30.

An application of weakly contractive mappings to boundary value problems of interval-valued functions

Abstract. We study the existence and uniqueness of solutions for boundary value problems associated to differential equations of interval-valued functions, by using the derivative of Hukuhara and some fixed point theorems for weakly contractive mappings defined on partially ordered sets.
Keywords: Contractive functions, interval-valued functions, differentiability interval-valued functions, differential equations interval-valued.

1. Introducción

Durante los últimos años, el análisis multívoco ha venido desarrollándose de forma sorprendente debido a la importancia inherente que posee, tanto en el campo teórico como también en las diversas aplicaciones, que están motivadas, principalmente, por la

* *E-mail*: vladimir_angulo01@hotmail.com.
Recibido: 09 de septiembre de 2013, Aceptado: 12 de noviembre de 2013.
Para citar este artículo: V. Angulo-Castillo, Una aplicación de las funciones débilmente contractivas a problemas de valor en la frontera de funciones con valores en intervalos, *Rev. Integr. Temas Mat.* 32 (2014), no. 1, 27–37.

como un intento de manipular el intervalo de incertidumbre que aparece en muchos modelos matemáticos o computacionales de algunos fenómenos determinísticos del mundo real, resolviendo de esta manera varios inconvenientes que se presentan en el modelado matemático a través de la teoría clásica de ecuaciones diferenciales ordinarias, como por ejemplo en problemas de naturaleza difusa o problemas de tipo no determinístico [7, 10, 11, 14, 15, 19]. Los primeros trabajos en este campo corresponden a las monografías de Moore [12, 13]. Dentro del análisis de funciones con valores en intervalos están las ecuaciones diferenciales de funciones con valores en intervalos, y con ellas, los problemas de valor en la frontera asociados a este tipo de ecuaciones, los cuales serán objeto de estudio en este artículo. En términos generales, un problema de valor en la frontera en el contexto de las funciones con valores en intervalos, asociado a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, consiste en encontrar una aplicación X definida en un intervalo J de números reales, con valores en el espacio de todos los subconjuntos no vacíos, compactos y convexos de $\mathbb{R}$, denotado por $\mathcal{K}_c^1$, tal que

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)), \\ X(t_0) = X(T), \end{cases} \tag{1}$$

donde $t_0 \in J$, J es un intervalo cerrado, $F\colon J \times \mathcal{K}_c^1 \longrightarrow \mathcal{K}_c^1$ es una función con valores en intervalos y la derivada $X'(t)$ de la función incógnita $X(t)$ se considera en el sentido de la H-diferenciabilidad.

Estudiar un problema asociado a ecuaciones diferenciales implica investigar la existencia y unicidad de solución a ese problema, que en muchos casos no es posible garantizar. En el contexto clásico, se han obtenido diversos resultados de existencia y unicidad usando diferentes técnicas para encontrar su solución, destacando principalmente la técnica de punto fijo, la cual resulta ser una herramienta muy útil y que va muy de la mano con el desarrollo inherente de las ecuaciones diferenciales bajo diferentes tipos de condiciones. Recientemente, en [8, 16, 17] se han obtenido resultados de existencia y unicidad de solución a problemas de valor en la frontera en el contexto clásico usando algunos resultados de punto fijo más generales que el Teorema clásico de punto fijo de Banach. Así, el interés del presente artículo está enfocado hacia el estudio de la existencia y unicidad de problemas de valor en la frontera asociados a ecuaciones diferenciales de funciones con valores en intervalos, usando, en lugar del Teorema clásico de punto fijo de Banach, algunos resultados de punto fijo, establecidos en [8], sobre funciones débilmente contractivas definidas sobre conjuntos parcialmente ordenados (ver también [6, 20]).

Este artículo está organizado como sigue: En la Sección 2 se dan algunos preliminares sobre la H-derivada y la integral en el contexto multívoco, los cuales serán necesarios para el estudio de problemas de valor en la frontera asociado a ecuaciones diferenciales de funciones con valores en intervalos. En la Sección 3 se presentan algunos resultados de punto fijo de funciones débilmente contractivas sobre conjuntos parcialmente ordenados. Y finalmente, en la Sección 4 se prueba un resultado sobre la existencia y unicidad de solución a un problema de valor en la frontera asociado a una ecuación diferencial de una función con valores en intervalos.

2. Derivada de Hukuhara e integración multívoca

Se denota por $\mathcal{K}_c^n$ el espacio de todos los subconjuntos no vacíos, compactos y convexos del espacio euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$. Si $A, B \in \mathcal{K}_c^n$ y $||\cdot||$ denota la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$, la métrica de Hausdorff d_H sobre $\mathcal{K}_c^n$ se define por

$$d_H(A,B) = \text{máx}\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}||a-b||, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}||a-b||\right\}.$$

Para $A, B \in \mathcal{K}_c^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, las siguientes operaciones son conocidas como operaciones Minkowski:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\} \qquad \text{y} \qquad \lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}. \tag{2}$$

La pareja $(\mathcal{K}_c^n, d_H)$ es un espacio métrico completo (cf. [18]); además la métrica d_H verifica las siguientes propiedades para cualesquiera $A, B, C, D \in \mathcal{K}_c^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$: (i) $d_H(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| d_H(A, B)$; (ii) $d_H(A + B, C + D) \leq d_H(A, C) + d_H(B, D)$; (iii) $d_H(A + C, B + C) = d_H(A, B)$. Es conocido que en $\mathcal{K}_c^n$, en general, $A + (-A) \neq \{0\}$, donde $-A = (-1)A = \{-a \mid a \in A\}$, y así $\mathcal{K}_c^n$ no es un espacio lineal. Con el fin de superar esta dificultad han sido propuestas algunas alternativas. De hecho, en [9] fue introducida la diferencia de Hukuhara (o H-diferencia). Si $A, B \in \mathcal{K}_c^n$, la H-diferencia entre A y B, denotada por $A \ominus_H B$, es definida como

$$A \ominus_H B = C \Longleftrightarrow A = B + C. \tag{3}$$

Con esta definición se obtienen algunas propiedades de $\mathcal{K}_c^1$, que resumimos en la siguiente proposición.

Proposición 2.1 ([9]). *Sean $A, B, C \in \mathcal{K}_c^1$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces,*

- (i) $A \ominus_H A = \{0\}$.
- (ii) $(A + B) \ominus_H B = A$.
- (iii) *Si $A \ominus_H B = C$ existe, C es único.*
- (iv) $A = A + (B \ominus_H B) = (A \ominus_H B) + B$, *si $len(A) \geq len(B)$ (aquí, $len(A)$ denota la longitud del intervalo A).*
- (v) *Si $\beta \leq \lambda$, $(\lambda - \beta)A = \lambda A \ominus_H \beta A$.*
- (vi) $\beta(A \ominus_H B) = \beta A \ominus_H \beta B$ *siempre que $A \ominus_H B$ exista.*
- (vii) *Si $len(B) \leq len(A)$, entonces $d_H(A \ominus_H B, \{0\}) = d_H(A, B)$.*

Sobre $\mathcal{K}_c^n$, se define el orden parcial dado por la inclusión de conjuntos, el cual se denota por $\preceq$. Además, se denota por $C(J, \mathcal{K}_c^n)$ el conjunto de todas las multifunciones $F\colon J \longrightarrow \mathcal{K}_c^n$ continuas, y se considera sobre este espacio el orden parcial definido por

$$F \preceq G \Longleftrightarrow F(t) \preceq G(t), \quad \forall t \in J \quad \text{y} \quad \forall F, G \in C(J, \mathcal{K}_c^n). \tag{4}$$

Con este orden se tiene que cualquier par de elementos de los espacios $(\mathcal{K}_c^n, \preceq)$ y $(C(J,\mathcal{K}_c^n), \preceq)$ tiene siempre una cota superior. Por otro lado, considerando la métrica D_H sobre $C(J,\mathcal{K}_c^n)$, definida por

$$D_H(F,G) = \sup_{t\in J} d_H(F(t),G(t)), \quad F,G \in C(J,\mathcal{K}_c^n), \tag{5}$$

se cumple que $(C(J,\mathcal{K}_c^n), D_H)$ es un espacio métrico completo [5].

Definición 2.2 **([4]).** Una multifunción $F\colon (a,b) \to \mathcal{K}_c^n$ es diferenciable según Hukuhara (ó H-diferenciable) en $t_0 \in (a,b)$, si existen $F'(t_0) \in \mathcal{K}_c^n$, $F(t_0+h) \ominus_H F(t_0)$ y $F(t_0) \ominus_H F(t_0-h)$ tales que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0+h) \ominus_H F(t_0)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{F(t_0) \ominus_H F(t_0-h)}{h}$$

existen y son iguales a $F'(t_0)$. Aquí, el límite se toma en el espacio $(\mathcal{K}_c^n, d_H)$.

Lema 2.3. *Sea $X\colon (0,T) \longrightarrow \mathcal{K}_c^1$ una multifunción H-diferenciable; entonces, para $\lambda > 0$ se cumple que*

$$\left(e^{\lambda t} X(t)\right)' = e^{\lambda t} X'(t) + \lambda e^{\lambda t} X(t).$$

Demostración. Sea $F\colon (0,T) \longrightarrow \mathcal{K}_c^1$ la multifunción definida por $F(t) = e^{\lambda t} X(t)$. Nótese que la diferencia $F(t+h) \ominus_H F(t)$ existe puesto que $len(F(t+h)) > len(F(t))$. Por lo tanto, usando las propiedades (iv), (v) y (vi) de la Proposición 2.1 se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{F(t+h) \ominus_H F(t)}{h} &= \frac{e^{\lambda(t+h)} X(t+h) \ominus_H e^{\lambda t} X(t)}{h} \\
&= \frac{\left[e^{\lambda(t+h)} X(t+h) + (e^{\lambda(t+h)} X(t) \ominus_H e^{\lambda(t+h)} X(t))\right] \ominus_H e^{\lambda t} X(t)}{h} \\
&= \frac{\left[e^{\lambda(t+h)} X(t+h) \ominus_H e^{\lambda(t+h)} X(t) + e^{\lambda(t+h)} X(t)\right] \ominus_H e^{\lambda t} X(t)}{h} \\
&= \frac{e^{\lambda(t+h)} X(t+h) \ominus_H e^{\lambda(t+h)} X(t)}{h} + \frac{e^{\lambda(t+h)} X(t) \ominus_H e^{\lambda t} X(t)}{h} \\
&= e^{\lambda(t+h)} \left(\frac{X(t+h) \ominus X(t)}{h}\right) + \left(\frac{e^{\lambda(t+h)} - e^{\lambda t}}{h}\right) X(t) \\
&\overset{h\to 0}{\longrightarrow} e^{\lambda t} X'(t) + \lambda e^{\lambda t} X(t),
\end{aligned}$$

donde el límite se toma en el espacio $(\mathcal{K}_c^1, d_H)$. De igual manera, nótese que la diferencia $F(t) \ominus_H F(t-h)$ existe, puesto que $len(F(t)) > len(F(t-h))$. Por lo tanto,

$$\frac{F(t) \ominus_H F(t-h)}{h} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} e^{\lambda t} X'(t) + \lambda e^{\lambda t} X(t),$$

donde el límite se toma en el espacio $(\mathcal{K}_c^1, d_H)$. Así, $F'(t) = e^{\lambda t} X'(t) + \lambda e^{\lambda t} X(t)$. ☑

Por otro lado, la integral de una multifunción $F\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{K}_c^n$ se define como el conjunto

$$\int_a^b F(t)\, dt = \left\{ \int_a^b g(t)\, dt : g\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{es una selección medible para } F \right\}. \tag{6}$$

Así, se dice que la multifunción F es integrable si el conjunto dado en (6) es distinto de vacío. Además, Kaleva en [10] mostró que si $F\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{K}_c^1$ es una función con valores en intervalos H-diferenciable y si F' es integrable sobre (a,b), se sigue que

$$F(t) = F(a) + \int_a^t F(s)ds, \quad \forall t \in (a,b). \tag{7}$$

El siguiente teorema resume algunas propiedades de la integral de multifunciones.

Teorema 2.4 ([10]). *Sean $F, G\colon (a,b) \longrightarrow \mathcal{K}_c^n$ dos multifunciones y $c \in \mathbb{R}$. Entonces,*

(i) $\int_a^b (F+G)(t)\ dt = \int_a^b F(t)\ dt + \int_a^b G(t)\ dt$;

(ii) $\int_a^b cF(t)\ dt = c\int_a^b F(t)\ dt$;

(iii) $d_\infty(F(t), G(t))$ *es integrable;*

(iv) $d_\infty(\int_a^b F(t)\ dt, \int_a^b G(t)\ dt) \leq \int_a^b d_\infty(F(t), G(t))\ dt$;

(v) Si $F \preceq G$ y F, G son continuas, entonces $\int_a^b F(t)\ dt \preceq \int_a^b G(t)\ dt$.

3. Algunos resultados de punto fijo de funciones débilmente contractivas no decrecientes

En [8] se obtuvieron algunos resultados de punto fijo de funciones débilmente contractivas sobre espacios métricos completos, que luego fueron aplicados al estudio de existencia y unicidad de soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con condiciones de frontera de tipo periódico. En esta sección presentamos algunos de esos resultados.

Definición 3.1. Una función de distancia alternante (o "altering distance") es una función $\psi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que:

(i) ψ es continua y no decreciente (con el orden usual en $[0,\infty)$).

(ii) $\psi(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$.

Definición 3.2 ([8]). Sean (X,d) un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función. Se dice que f es débilmente contractiva si

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \psi(d(x,y)) - \phi(d(x,y)), \quad \forall x, y \in X, \tag{8}$$

donde ψ, ϕ son funciones de distancia alternante.

Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $f\colon X \longrightarrow X$ una función. Decimos que f es monótona no decreciente si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \leq y$ se cumple que $f(x) \leq f(y)$. La función f es monótona no creciente si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \leq y$ se cumple que $f(x) \geq f(y)$. A continuación se muestran algunos resultados de punto fijo obtenidos en [8], donde la función f no es necesariamente continua.

Teorema 3.3 ([8]). *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y supóngase que existe una métrica d en X tal que (X, d) es un espacio métrico completo. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ una función monótona no decreciente tal que*

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y)), \text{ para } x \geq y, \tag{9}$$

para algunas funciones de distancia alternante ψ y ϕ. Supóngase que X verifica que si una sucesión no decreciente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente a $x \in X$, entonces $x_k \leq x$ para todo $k \in \mathbb{N}$, o que f sea continua. Si existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 \leq f(x_0)$, entonces f tiene un punto fijo.

El próximo teorema garantiza la existencia y unicidad de un punto fijo y la convergencia global del método de aproximaciones sucesivas; esto es, si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $f\colon X \longrightarrow X$ es una función, la sucesión $(f^k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge al punto fijo de f para todo $x \in X$.

Teorema 3.4 ([8]). *Bajo las hipótesis del Teorema 3.3, si toda pareja de elementos de X tiene una cota superior o una cota inferior, f tiene un único punto fijo. Además, si $\overline{x}$ es el punto fijo de f, entonces para todo $x \in X$ se cumple que $\lim_{k\to\infty} f^k(x) = \overline{x}$.*

4. Problemas de valor en la frontera en el contexto multívoco

Considere el siguiente problema de valor en la frontera en el contexto de las funciones con valores en intervalos:

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)), \quad t \in J = [0, T], \\ X(0) = X(T), \end{cases} \tag{10}$$

donde la derivada X' es considerada en el sentido de la H-derivada y la función con valores en intervalos $F\colon J \times \mathcal{K}_c^1 \longrightarrow \mathcal{K}_c^1$ es continua. Se denota por $C^1(J, \mathcal{K}_c^1)$ el conjunto de todas las multifunciones continuas $F\colon J \longrightarrow \mathcal{K}_c^1$ con derivada continua. Se dice que una función con valores en intervalos $X \in C^1(J, \mathcal{K}_c^1)$ es solución para el Problema 10, si ella verifica (10).

Este problema ha sido abordado en la literatura por diferentes autores en el contexto de las ecuaciones diferenciales ordinarias, usando diferentes resultados de punto fijo con el fin de garantizar existencia y unicidad de solución. Por ejemplo, en [16, 17] se estudiaron problemas de valor en la frontera en el contexto de las ecuaciones diferenciales ordinarias usando algunas generalizaciones del Teorema clásico de punto fijo de Banach, y recientemente, en [8] se han resuelto este tipo de problemas a través de resultados de punto fijo de funciones débilmente contractivas.

Lema 4.1. *Una función con valores en intervalos $X \in C^1(J, \mathcal{K}_c^1)$ es solución para el Problema 10 si y sólo si satisface la ecuación integral*

$$X(t) = \int_0^T G(t, s)\,(F(s, X(s)) + \lambda X(s))\,ds, \tag{11}$$

donde G es la función de Green definida por

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda(T+s-t)}}{e^{\lambda T}-1}, & si \quad 0 \le s < t \le T, \\ \dfrac{e^{\lambda(s-t)}}{e^{\lambda T}-1}, & si \quad 0 \le t < s \le T. \end{cases}$$

Demostración. Supóngase primero que la función con valores en intervalos $X \in C^1(J, \mathcal{K}_c^1)$ es solución para el Problema 10. Entonces

$$X'(t) = F(t, X(t)) \quad \text{y} \quad X(0) = X(T), \tag{12}$$

con $F\colon J \times \mathcal{K}_c^1 \longrightarrow \mathcal{K}_c^1$ continua. El Problema 12 es equivalente al Problema

$$e^{\lambda t} X'(t) + \lambda e^{\lambda t} X(t) = e^{\lambda t} \left(F(t, X(t)) + \lambda X(t) \right), \quad X(0) = X(T). \tag{13}$$

Por el Lema 2.3, la ecuación (13) se transforma en $\left(e^{\lambda t} X(t)\right)' = e^{\lambda t} \left(F(t, X(t)) + \lambda X(t) \right)$. Luego, en vista de (7), se sigue que $e^{\lambda t} X(t) = X(0) + \int_0^t e^{\lambda s} \left(F(s, X(s)) + \lambda X(s) \right) ds$ con $X(0) = X(T)$.

Así, por la propiedad (v) de la Proposición 2.1 se tiene que $(e^{\lambda T}-1)X(T) = e^{\lambda T} X(T) \ominus_H X(T) = \int_0^T e^{\lambda s} \left(F(s, X(s)) + \lambda X(s) \right) ds$, y por lo tanto,

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_0^T \frac{e^{\lambda(s-t)}}{e^{\lambda T}-1} \left(F(s, X(s)) + \lambda X(s) \right) ds + \int_0^t \frac{e^{\lambda(s-t)}}{e^{\lambda T}-1} \left(F(s, X(s)) + \lambda X(s) \right) ds \\ &= \int_0^t \frac{e^{\lambda(T+s-t)}}{e^{\lambda T}-1} \left(F(s, X(s)) + \lambda X(s) \right) ds + \int_t^T \frac{e^{\lambda(s-t)}}{e^{\lambda T}-1} \left(F(s, X(s)) + \lambda X(s) \right) ds \\ &= \int_0^T G(t,s) \left(F(s, X(s)) + \lambda X(s) \right) ds. \end{aligned}$$

Ahora, supóngase que $X \in C^1(J, \mathcal{K}_c^1)$ verifica (11); entonces, al multiplicar por $(e^{\lambda T}-1)e^{\lambda t}$ la ecuación (11) se obtiene que

$$(e^{\lambda T}-1)e^{\lambda t} X(t) = \int_0^t e^{\lambda(T+s)} \left(F(s, X(s)) + \lambda X(s) \right) ds + \int_t^T e^{\lambda s} \left(F(s, X(s)) + \lambda X(s) \right) ds.$$

Por lo tanto, derivando término a término se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} (e^{\lambda T}-1)e^{\lambda t}(\lambda X(t) + X'(t)) &= e^{\lambda(T+t)} \left(F(t, X(t)) + \lambda X(t) \right) \ominus_H \left(e^{\lambda t} \left(F(t, X(t)) + \lambda X(t) \right.\right. \\ &= (e^{\lambda T}-1)e^{\lambda t} \left(F(t, X(t)) + \lambda X(t) \right). \end{aligned}$$

Realizando algunas simplificaciones se tiene que $X'(t) + \lambda X(t) = F(t, X(t)) + \lambda X(t)$, y esto último implica que $X'(t) = F(t, X(t))$. Además, nótese que

$$X(0) = \int_0^T \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T}-1} \left(F(s, X(s)) + \lambda X(s) \right) ds = X(T).$$

Por consiguiente, X es solución al Problema 10. ☑

Definición 4.2. Se dice que una función con valores en intervalos $\mu \in C^1(J, \mathcal{K}_c^1)$ es una solución inferior para el Problema 10, si para $t \in J$ se cumple que

$$\mu'(t) \preceq F(t, \mu(t)), \quad \mu(0) \preceq \mu(T).$$

El principal resultado sobre la existencia y unicidad de soluciones para problemas de valor en la frontera en el contexto de las funciones con valores en intervalos que obtuvimos es el siguiente Teorema.

Teorema 4.3. *Sea $F\colon J \times \mathcal{K}_c^1 \longrightarrow \mathcal{K}_c^1$ una función con valores en intervalos continua y no decreciente en la segunda variable, es decir,*

$$F(t, X) \preceq F(t, Y) \quad \textit{siempre que} \quad X \preceq Y.$$

Supóngase que existen $\lambda > 0$ y $\gamma > 0$, con $\gamma < \lambda$, tales que para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{K}_c^1$ con $X \succeq Y$ se tiene que

$$-\gamma(Y \ominus_H X) \preceq (F(t, Y) + \lambda Y) \ominus_H (F(t, X) + \lambda X)\,. \tag{14}$$

Si el Problema 10 tiene una solución inferior, entonces el Problema 10 posee una única solución.

Demostración. De acuerdo al Lema 4.1, el Problema 10 es equivalente al problema integral

$$X(t) = \int_0^T G(t, s)\,(F(s, X(s)) + \lambda X(s))\,ds, \tag{15}$$

donde

$$G(t, s) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda(T+s-t)}}{e^{\lambda T} - 1} & \text{si} \quad 0 \le s < t \le T, \\[2ex] \dfrac{e^{\lambda(s-t)}}{e^{\lambda T} - 1} & \text{si} \quad 0 \le t < s \le T. \end{cases}$$

Se define el operador $\mathcal{A}\colon C(J, \mathcal{K}_c^1) \longrightarrow C(J, \mathcal{K}_c^1)$ como

$$[\mathcal{A}X](t) = \int_0^T G(t, s)\,(F(s, X(s)) + \lambda X(s))\,ds. \tag{16}$$

Nótese que si $X \in C(J, \mathcal{K}_c^1)$ es un punto fijo de $\mathcal{A}$, $X \in C^1(J, \mathcal{K}_c^1)$ es una solución del Problema 10. Así, bastaría probar que el operador $\mathcal{A}$ tiene un único punto fijo verificando todas las hipótesis del Teorema 3.4. Para ello, se muestra primero que el operador $\mathcal{A}$ es no decreciente. Como F es una función con valores en intervalos no decreciente en la segunda variable y $G(t, s) > 0$ para todo $(t, s) \in J \times J$, se sigue para $X \preceq Y$ que

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}X](t) &= \int_0^T G(t, s)\,(F(s, X(s)) + \lambda X(s))\,ds \\ &\preceq \int_0^T G(t, s)\,(F(s, Y(s)) + \lambda Y(s))\,ds = [\mathcal{A}Y](t). \end{aligned}$$

Luego $\mathcal{A}X \preceq \mathcal{A}Y$ siempre que $X \preceq Y$. Por otro lado, por el Teorema 2.4, por la Proposición 2.1 y para $Y \succeq X$, se tiene que

$$\begin{aligned}
D_H(\mathcal{A}Y, \mathcal{A}X) &= \sup_{t\in J} d_H\left([\mathcal{A}Y](t), [\mathcal{A}X](t)\right) \\
&\leq \sup_{t\in J} \int_0^T G(t,s) d_H\left(F(s,X(s)) + \lambda X(s), F(s,Y(s)) + \lambda Y(s)\right) ds \\
&= \sup_{t\in J} \int_0^T G(t,s) d_H((F(s,X(s))+\lambda X(s)) \ominus_H (F(s,Y(s))+\lambda Y(s)), \{0\})\, ds \\
&\leq \sup_{t\in J} \int_0^T G(t,s)\gamma d_H\left(X(s) \ominus_H Y(s), \{0\}\right) ds \\
&\leq \gamma D_H\left(X,Y\right) \sup_{t\in J} \int_0^T G(t,s) ds \\
&= \frac{\gamma D_H\left(X,Y\right)}{\lambda(e^{\lambda T}-1)} \sup_{t\in J} \left(e^{\lambda(T+s-t)}\Big|_0^t + e^{\lambda(s-t)}\Big|_t^T \right) \\
&= \frac{\gamma D_H\left(X,Y\right)}{\lambda(e^{\lambda T}-1)} \sup_{t\in J} \left(e^{\lambda T}-1\right) \\
&= D_H\left(X,Y\right) - \left(1-\frac{\gamma}{\lambda}\right) D_H\left(X,Y\right).
\end{aligned}$$

Se define la función $\phi\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ por $\phi(t) = \left(1-\frac{\gamma}{\lambda}\right)t$, entonces ϕ es continua, no decreciente y se verifica que $\phi(t)=0$ si y sólo si $t=0$. Así, ϕ es una función de distancia alternante, y por tanto, al tomar la función de distancia alternante $\psi(t)=t$ se sigue que

$$\psi(D_H(\mathcal{A}X, \mathcal{A}Y)) \leq \psi(D_H\left(X,Y\right)) - \phi\left(D_H\left(X,Y\right)\right), \quad \text{para} \quad Y \succeq X.$$

Finalmente, sea μ una solución inferior para el Problema 10; entonces para $t \in J$ se sigue que $\mu'(t) + \lambda\mu(t) \preceq F(t,\mu(t)) + \lambda\mu(t)$. Luego, multiplicando por $e^{\lambda t}$, se obtiene que $(e^{\lambda t}\mu(t))' \preceq e^{\lambda t}\left(F(t,\mu(t)) + \lambda\mu(t)\right)$, y así, encontramos que

$$e^{\lambda t}\mu(t) \preceq \mu(0) + \int_0^t e^{\lambda s}\left(F(s,\mu(s)) + \lambda\mu(s)\right) ds, \quad \text{para} \quad t \in J, \tag{17}$$

lo cual implica que $e^{\lambda T}\mu(0) \preceq e^{\lambda T}\mu(T) \preceq \mu(0) + \int_0^t e^{\lambda s}\left(F(s,\mu(s)) + \lambda\mu(s)\right) ds$. Por lo tanto,

$$\mu(0) \preceq \int_0^T \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T}-1}\left(F(s,\mu(s)) + \lambda\mu(s)\right) ds. \tag{18}$$

Luego, de (17) y (18), se sigue que

$$\mu(t)e^{\lambda t} \preceq \int_0^t \frac{e^{\lambda(T+s)}}{e^{\lambda T}-1}\left(F(s,\mu(s)) + \lambda\mu(s)\right)\; ds + \int_t^T \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T}-1}\left(F(s,\mu(s)) + \lambda\mu(s)\right) ds,$$

y consecuentemente, para $t \in J$, se sigue que

$$\mu(t) \preceq \int_0^t \frac{e^{\lambda(T+s-t)}}{e^{\lambda T}-1}\left(F(s,\mu(s)) + \lambda\mu(s)\right) ds + \int_t^T \frac{e^{\lambda(s-t)}}{e^{\lambda T}-1}\left(F(s,\mu(s)) + \lambda\mu(s)\right) ds$$

$$= \int_0^T G(t,s)\,(F(s,\mu(s)) + \lambda\mu(s))\,ds = [\mathcal{A}\mu](t).$$

Por lo tanto, $\mu \preceq \mathcal{A}\mu$. De ahí que el operador $\mathcal{A}$ verifica todas las hipótesis del Teorema 3.4, y por consiguiente, el operador $\mathcal{A}$ tiene un único punto fijo. ☑

Ejemplo 4.4. Considere el siguiente problema de valor en la frontera en el contexto de las funciones con valores en intervalos:

$$\begin{cases} X'(t) = \beta X(t), & t \in J = [0,T], \\ X(0) = X(T), \end{cases} \tag{19}$$

para algún $\beta > 0$. En este caso, la función $F\colon J \times \mathcal{K}_c^1 \longrightarrow \mathcal{K}_c^1$ es dada por $F(t,X(t)) = \beta X(t)$. Nótese que si $X(t) \preceq Y(t)$ se tiene que $F(t,X(t)) = \beta X(t) = \beta Y(t) = F(t,Y(t))$, así F es no decreciente. Además, nótese que $(F(t,Y) + \lambda Y) \ominus_H (F(t,X) + \lambda X) = (\beta + \lambda)\,(X(t) \ominus_H Y(t)) \succeq -\gamma\,(X(t) \ominus_H Y(t))$, para algún $\gamma > 0$. Así, F verifica las condiciones del Teorema 4.3 y el Problema 19 tiene una única solución.

5. Conclusiones

Se estudia el problema de existencia y unicidad de solución para un problema de valor de frontera asociado a una EDO con valores en intervalos, y se obtiene un teorema de existencia y unicidad de solución a través del uso de resultados de punto fijo para aplicaciones débilmente contractivas, donde el análisis diferencial se aborda en el sentido de la derivada clásica de Hukuhara.

Referencias

[1] Aubin J.P. and Cellina A., *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[2] Aubin J.P. and Franskowska H., *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1990.

[3] Aubin J.P. and Franskowska H., "Set-valued analysis in control theory", *Set-Valued Anal.* 8 (2000), 1–9.

[4] Banks H.T. and Jacobs M.Q., "A differential calculus for multifunctions", *J. Math. Anal. Appl.*, 29 (1970), 246–272.

[5] Folland G., *Real Analysis. Pure and Applied Mathematics*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1999.

[6] Dhutta P.N. and Choudhury B.S., "A generalization of contraction principle in metric spaces", *Fixed Point Theory Appl.* (2008), 8 p.

[7] Goetschel R. and Voxman W., "Elementary fuzzy calculus", *Fuzzy Sets and Systems* 18 (1986), 31–43.

[8] Harjani J. and Sadarangani K., "Generalized contractions in partially ordered metric spaces and applications to ordinary differential equations", *Nonlinear Anal.* 72 (2010), 1188–1197.

[9] Hukuhara M., "Intégration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe", *Funkcial. Ekvac.* 10 (1967), 205–223.

[10] Kaleva O., "Fuzzy differential equations", *Fuzzy Sets and Systems* 24 (1987), 301–317.

[11] Kaleva O., "A note on fuzzy differential equations", *Nonlinear Anal.* 64 (2006), 895–900.

[12] Moore R.E., *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.

[13] Moore R.E., *Computational Functional Analysis*, Ellis Horwood Limited, England, 1985.

[14] Negoita C.V. and Ralescu D., *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*, Wiley, New York, 1975.

[15] Nieto J.J. and Rodríguez-López R., "Applications of contractive-like mapping principles to fuzzy equations", *Rev. Mat. Complut.* 19 (2006), 361–383.

[16] Nieto J.J. and Rodríguez-López R., "Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations", *Order* 22 (2005), 223–239.

[17] Nieto J.J. and Rodríguez-López R., "Existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations", *Acta Math. Sin.* (Engl. Ser.) 23 (2007), 2205–2212.

[18] Puri M. and Ralescu D., "Fuzzy random variables", *J. Math. Anal. Appl.* 114 (1986), 409–422.

[19] Puri M. and Ralescu D., "Differential of fuzzy functions", *J. Math. Anal. Appl.* 91 (1983), 552–558.

[20] Rhoades B.E., "Some theorems on weakly contractive maps", *Nonlinear Anal.* 47 (2001), 2683–2693.

[21] Zadeh L.A., "Fuzzy sets", *Infor. and Control* 8 (1965), 338–353.