Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Una propuesta para la enseñanza de la probabilidad en la universidad basada en la investigación didáctica

José Ignacio Barragués Fuentes y Jenaro Guisasola Aranzabal

Resumen: En este estudio describimos el diseño, la implementación y la evaluación de una secuencia de enseñanza destinada a introducir los conceptos y procedimientos probabilísticos elementales en la enseñanza técnica universitaria. La propuesta se basa en los resultados de las investigaciones sobre las dificultades de enseñanza-aprendizaje, la perspectiva social constructivista del aprendizaje de las matemáticas y el concepto de indicadores de aprendizaje. Proporcionamos pruebas de que esta secuencia de enseñanza, junto con su metodología de aplicación en el aula, puede lograr que los estudiantes adquieran una mayor capacidad de razonamiento probabilístico.

Palabras clave: enseñanza universitaria, probabilidad, competencia matemática, constructivismo, indicadores de aprendizaje, concepciones alternativas, Paradigma de Heurísticos y Sesgos, simulación por computadora.

A proposal for teaching probability at university level based on didactic research

Abstract: This study will describe the design, implementation and evaluation of a teaching sequence aiming to introduce elementary probabilistic concepts and procedures into university level technical teaching. The proposal is based on results from research into teaching-learning difficulties in the constructivist social perspective of learning mathematics within the concept of learning indicators. We will provide evidence that this teaching sequence, along with its methodology to be applied in the classroom, can help students acquire great probabilistic reasoning skills.

Keywords: university teaching, probability, mathematics competency, constructivism, learning indicators, misconceptions, Heuristics and Biases Paradigm, computer simulation.

Fecha de recepción: 15 de agosto de 2008.

INTRODUCCIÓN

Actualmente se acepta que la formación probabilística y estadística es importante para la formación de ciudadanos adultos capaces de orientarse en un entorno de fuertes interdependencias sociales, políticas y económicas, donde se precisa interpretar gráficos de datos y donde con frecuencia las decisiones se toman sobre la base de estudios estadísticos. La competencia estadística proporciona recursos para analizar datos críticamente y para formarse una opinión fundamentada acerca de las decisiones que toman las administraciones, las empresas y otros colectivos, así como acerca de la marcha general de la sociedad. Además, la probabilidad y la estadística contribuyen a aportar una imagen mucho más equilibrada de la ciencia, que tradicionalmente ha presentado ante el alumno un carácter marcadamente determinista en el que todo es explicable en términos de causas y efectos. Razones como las apuntadas indican la importancia de que los estudiantes fortalezcan sus competencias matemáticas generales mediante competencias específicas en probabilidad y estadística. Sin embargo, la investigación didáctica viene señalando que los estudiantes tienen dificultades para lograr un aprendizaje con comprensión de los conceptos y procedimientos formales relacionados con el azar (Batanero *et al.*, 1997; Sáenz, 1998; Scholz, 1991; Serrano *et al.*, 1996; Borovcnik *et al.*, 1991; Borovcnick y Peard, 1996). En este trabajo presentamos una investigación destinada a diseñar y evaluar una innovación en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en estudios técnicos universitarios. Ensayamos la propuesta con estudiantes de segundo curso de Ingeniería (18-20 años) de la Universidad del País Vasco (España). Explicaremos las razones que, a nuestro entender, hacen necesario un cambio metodológico en la enseñanza y en sus objetivos; mostraremos el fundamento teórico de nuestra propuesta y el modo en el que la hemos desarrollado, aplicado en clase y evaluado.

PRINCIPIOS QUE GUÍAN LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

Tres principios diferentes pero interrelacionados han guiado el diseño de la propuesta de enseñanza. El primero se relaciona con los resultados de las investigaciones sobre las dificultades de aprendizaje de los conceptos elementales de la teoría de la probabilidad. Hemos revisado la bibliografía sobre propuestas de enseñanza que promueven el aprendizaje con comprensión de los conceptos y procedimientos probabilísticos (Godino *et al.*, 1998; Borovcnik y Peard, 1996; Kapadia y Borovcnik, 1991; Sáenz, 1998; Díaz, 2005), junto con estudios sobre dificultades de aprendizaje de los conceptos relacionados con el azar. Mostraremos cómo los resultados de investigaciones anteriores han guiado el diseño de nuestra propuesta.

El segundo aspecto que ha contribuido a realizar el diseño de la enseñanza es la perspectiva social constructivista del aprendizaje de las matemáticas y las ciencias (Leitzel, 1991; Roth, 1995; Solow, 1993; Guershon y Trgalová, 1996; Sierpinska y Lerman, 1996; Guisasola *et al.*, 2008). Desde esta perspectiva, los estudiantes aprenden matemáticas construyendo activamente nuevos significados a partir de la experiencia y el conocimiento previos y, para facilitar esa construcción, deben participar en actividades colectivas destinadas a que tomen conciencia de sus conocimientos y estrategias informales y desarrollen su capacidad de razonamiento y argumentación. Bajo este enfoque del aprendizaje, el profesorado tiene el importante papel de proponer a los estudiantes problemas interesantes e involucrarlos en tareas matemáticas significativas (NRC, 1995; NCTM, 2000; Kilpatrick, 1997; Armella y Waldegg, 1992). La propuesta que presentamos se basa en la puesta en práctica en el aula de todos estos aspectos, a través de tareas que demanden a los estudiantes un pensamiento de alto nivel. El cuadro 1 (Romberg, 1993) muestra algunas de las características de este pensamiento de alto nivel y su comparación con el tipo de pensamiento que requieren muchas de las tareas matemáticas algorítmicas que los estudiantes realizan en la universidad.

Esta concepción del aprendizaje de las matemáticas, que busca desarrollar en los estudiantes modos de pensar aplicables en múltiples contextos para analizar situaciones y tomar decisiones personales y colectivas basadas en la ciencia, también es adoptada en el modelo de evaluación del programa PISA (OCDE, 2006), cuando define la competencia matemática como "la capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de modo que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos".

El tercer principio que guía el diseño de la propuesta se basa en el concepto de *demanda de aprendizaje* (Leach y Scott, 2002; Osuna *et al.*, 2007). Las demandas de aprendizaje en un área concreta de contenidos surgen de la diferencia entre las ideas y formas de razonamiento de "sentido común" de los estudiantes y las de las matemáticas en un contexto escolar. Estas diferencias pueden

Cuadro 1 Características de los pensamientos de alto y bajo nivel

Pensamiento de alto nivel	Pensamiento de bajo nivel
No algorítmico. El camino para la acción no se encuentra completamente especificado con anterioridad.	Algorítmico. El camino para la acción se encuentra completamente especificado con anterioridad.
Complejo. El camino total no es mentalmente visible desde un único punto de vista.	Caminos visibles. Se utilizan ejemplos estándar con caminos visibles.
Soluciones múltiples. Suele dar lugar a soluciones múltiples, cada una con costos y beneficios.	Solución única. Existe una única solución posible.
Juicios matizados e interpretación.	No se espera ni juicio ni interpretación.
Criterios múltiples. Involucra la aplicación de múltiples criterios que pueden entrar en conflicto entre sí.	Criterios sencillos. Se requiere la utilización de criterios sencillos que se encuentran bien definidos.
Incertidumbre. No se conoce todo lo que se requiere para desarrollar la tarea.	Certeza. Ha sido suministrada toda la información que se requiere.
Autorregulación. Requiere la autorregulación del proceso de pensamiento.	Regulación externa. En muchas ocasiones es un tercero quien determina lo que debe hacerse en cada momento, en cada paso a dar.
Asignación de significado. Requiere la asignación de significado a una estructura que tiene aparente desorden.	Significado dado. El significado está dado o se supone.
Requiere esfuerzo. Requiere gran cantidad de trabajo mental de descubrimiento de estructuras en aparente desorden. El propósito es desarrollar las elaboraciones y los juicios involucrados.	No requiere esfuerzo. El trabajo normalmente involucra ejercicios estándar tan simplificados que precisan poco esfuerzo mental.

ser ontológicas (por ejemplo, "el número de lotería 00 000 es menos probable que el 36 726"); o deberse a concepciones alternativas en una determinada área (por ejemplo, "si el suceso A sólo puede ocurrir antes que el suceso B, entonces el suceso A es probabilísticamente independiente del suceso B"), o bien, pueden deberse a asunciones epistemológicas ("la explicación es válida porque la gente entiende lo que estoy diciendo" frente a "las explicaciones matemáticas deben ser consistentes en lógica y consistentes entre sí"). Hemos utilizado la noción de demanda de aprendizaje para concretar los objetivos específicos de la enseñanza de la teoría de la probabilidad en su interpretación frecuencial.

INVESTIGACIONES PREVIAS SOBRE DIFICULTADES DE APRENDIZAJE DE LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD Y SU NATURALEZA

Se consultaron algunos de los trabajos más relevantes acerca de las dificultades de aprendizaje de la teoría de la probabilidad (Batanero *et al.*, 1997; Godino *et al.*, 1998; Serrano *et al.*, 1996, 1998, 1999 y 2001; Borovcnik *et al.*, 1991; Borovcnik y Bentz, 1991; Borovcnik y Peard, 1996; Kahneman y Tversky, 1972; Kahneman *et al.*, 1982; Kapadia, 1984; Konold, 1991; Lecoutre, 1985 y 1992; Lecoutre y Durand, 1988; Hirsch y O'Donnell, 2001; Díaz, 2005; Estrada *et al.*, 2006; Batanero y Díaz, 2007). Aunque la gran mayoría de estos estudios se refiere a niveles de enseñanza preuniversitaria, encontramos en ellos ideas clave que pudimos utilizar en nuestro propio trabajo. Así, estos trabajos de investigación se refieren al Paradigma de Heurísticos y Sesgos como modelo teórico útil para estudiar en qué medida los estudiantes han adquirido competencia probabilística tras recibir su enseñanza. Este paradigma describe diversos mecanismos y estrategias no probabilísticas, la mayoría de ellas ingenuas y de inspiración cotidiana, que suelen ser utilizados por las personas cuando deben emitir algún juicio en situaciones de azar. Mostremos como ilustración tres ejemplos de interpretación incorrecta:

- Probabilidad como pronóstico: la probabilidad se suele interpretar como una expectativa hacia el resultado que se obtendrá en la próxima ejecución del experimento aleatorio, en vez de ser interpretada como una regularidad que sólo es visible en una gran muestra de observaciones.
- Heurística de representatividad: se considera menos probable una secuencia que presente cierta simetría fácilmente reconocible (por ejemplo, el número de lotería 22 222) que otra secuencia que no muestre simetría alguna (por ejemplo, el número 59 251).
- Insensibilidad al tamaño de la muestra: se considera que una pequeña muestra es suficiente para estimar el valor de la probabilidad de un suceso. Por ejemplo, tras lanzar cuatro veces una moneda y obtener tres caras y una cruz, interpretar erróneamente que $p(\text{CARA}) = 3/4$ y $p(\text{CRUZ}) = 1/4$.

El problema es que estas estrategias erróneas pueden resultar para los estudiantes más plausibles que las estrategias probabilísticas formales y, en consecuencia, dificultar el aprendizaje de estas últimas. Por esta razón, nosotros creemos que uno de los criterios más importantes que se deben utilizar para analizar el aprendizaje probabilístico consiste en investigar la persistencia de este tipo de razonamientos tras la enseñanza.

Tras analizar la citada bibliografía, realizamos nuestro propio estudio en el nivel universitario (Guisasola y Barragués, 2002*a* y 2002*b*; Barragués *et al.*, 2005, 2006, 2007*a* y 2007*b*; Barragués y Guisasola, 2006, 2007*a* y 2007*b*). Analizamos el aprendizaje logrado por los estudiantes tras recibir su enseñanza siguiendo el formato habitual en la universidad, esto es, exposición formal del marco teórico, presentación de ejemplos de aplicación y realización de ejercicios. Los resultados que obtuvimos sugieren que la mayoría de los estudiantes presenta, tras su formación universitaria, las citadas ideas erróneas acerca del modo de entender y estimar la probabilidad y adquiere un conocimiento meramente instrumental del cuerpo teórico, en vez de la comprensión relacional necesaria para aplicar el conocimiento probabilístico en la práctica. De este modo, encontramos pruebas de que el modelo habitual de enseñanza de la probabilidad en la universidad tiene deficiencias estructurales, epistemológicas y didácticas que, en buena medida, pueden explicar la pobreza del aprendizaje obtenido.

¿QUÉ SIGNIFICA APRENDER LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD?

Caracterizar qué es aprender la teoría de la probabilidad consiste en definir las capacidades (competencias) que los estudiantes deben adquirir para su aplicación en cierto contexto. Para ello nos basamos en la epistemología de las matemáticas y en las aplicaciones de la teoría de la probabilidad para la resolución de problemas de Ingeniería. Aquí, el término *problema* alude a una situación que exige una solución satisfactoria, pero que usualmente estará definida de un modo no formal o estará insuficientemente definida, no resultan visibles los conceptos matemáticos relacionados con ella, se plantea en contextos multidisciplinares, etc. Un problema es una situación de alta demanda cognitiva que se planteará de modo habitual en el entorno de trabajo de nuestros titulados. Así, para definir en qué consiste la competencia probabilística, estudiamos el significado actual del marco teórico de la probabilidad: en qué tipo de problemas se hace necesario el enfoque probabilístico, cuáles soluciones se aportan y qué metodologías se utilizan. Este análisis nos permitió definir la colección de indicadores de aprendizaje para describir si se ha logrado un aprendizaje con comprensión (véase el cuadro 2).

Cuadro 2 Indicadores para valorar un aprendizaje con comprensión de la probabilidad

1. Saber por qué son necesarios los modelos probabilísticos. Es decir, comprender las carencias de los modelos deterministas a la hora de estudiar fenómenos reales. En concreto, debe comprenderse que el modo en que se desarrolla un fenómeno real depende de una cantidad inconcreta de factores y contingencias, cuya interacción es demasiado compleja para que pueda ser determinada por unas pocas variables y por relaciones de causa/efecto.

2. Entender la estrategia general que utiliza la teoría probabilística para la resolución de problemas. Es decir, si bien el enfoque probabilístico formal no niega necesariamente la existencia de mecanismos causales subyacentes, se adopta una posición según la cual se ignoran tales posibles mecanismos, centrándose en las regularidades que ocurren en una serie de ensayos realizados en las mismas condiciones.

3. Conocer las estrategias particulares de resolución de problema y el alcance de las soluciones probabilísticas. Es decir:

3.1. Entender las condiciones en las que existe una regularidad en la frecuencia relativa de un suceso.

3.2. Realizar predicciones probabilísticas acerca de una población.

3.3. Reconocer los conceptos probabilísticos elementales y proponer soluciones probabilísticas. En particular, deben reconocerse estos conceptos en:

3.3.1. Situaciones alejadas del problema tipo.

3.3.2. Problemas mal o insuficientemente definidos.

3.3.3. Situaciones en las que la intuición o el sentido común parezcan ser suficientes para proporcionar una solución.

4. Saber utilizar los aspectos procedimentales fundamentales relacionados con el cálculo de la probabilidad:

4.1. Determinación del espacio muestral.

4.2. Formulación de la hipótesis de equiprobabilidad.

4.3. Cálculo combinatorio.

4.4. Definición formal del suceso.

4.5. Formulación de la hipótesis de independencia.

4.6. Cálculo de la probabilidad.

4.7. Interpretación de la solución probabilística.

Cuadro 2 Indicadores para valorar un aprendizaje con comprensión de la probabilidad *(continuación)*

5. Emplear la simulación de modelos probabilísticos mediante computadora como medio de investigación acerca del significado de los conceptos y sus propiedades, así como de búsqueda de soluciones a problemas.
6. Comprender el alcance y las limitaciones del marco teórico probabilístico para la resolución de problemas en el ámbito del azar.
7. Ser capaz de reflexionar acerca del proceso de construcción de un marco teórico científico, captar una visión de la matemática que, al igual que la mayoría de los asuntos humanos, arranca de situaciones problemáticas y se desarrolla impulsada por la controversia y el debate.
8. Valorar positivamente la teoría de la probabilidad como marco útil para resolver pro-blemas.

ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA DE LA PROPUESTA

Hemos considerado las diferentes propuestas presentadas en la bibliografía para lograr un aprendizaje con comprensión. Basándonos en una perspectiva social constructivista del aprendizaje y en estrategias de enseñanza sobre resolución de problemas (De Guzmán, 1997; Schoenfeld, 1987; Niss, 1996; Grugnetti y Jaquet, 1996; Boero y Parenti, 1996), hemos diseñado una secuencia de enseñanza para apoyar la construcción de nuevos conceptos implicados en la teoría de la probabilidad en su interpretación frecuencial. Las actividades de enseñanza fueron diseñadas con un doble objetivo. Por un lado, ayudar a los estudiantes a conocer sus carencias en el análisis de situaciones de azar. Por el otro, proporcionarles una clara concepción de las tareas que se iban a realizar y dar sentido e interés al trabajo. Este último aspecto, que claramente incide en la motivación del alumno, prácticamente nos obligó a incorporar en el programa de actividades situaciones problemáticas de Electricidad, especialidad de Ingeniería de los grupos de alumnos con los que experimentamos nuestra propuesta. No obstante, el incentivo de los problemas propios de la especialidad es compatible con el planteamiento de una amplia variedad de situaciones adicionales, también interesantes para el alumno, capaces de hacer ver el carácter general de la teoría que se está desarrollando: juegos de azar, situaciones cotidianas, de interés social, etc. El diseño de las actividades incluye tanto las propias actividades como los objetivos didácticos y sugerencias para su implementación en el aula (Guisasola *et al.*, 2008). Esto no implica que el profesorado deba seguir estrictamente cada paso de la propuesta, sino que cada actividad va acompañada de información acerca del tratamiento didáctico que, según la experiencia de los autores y la bibliografía, puede llevar a lograr los objetivos fijados. Explicamos esta cuestión en la siguiente sección.

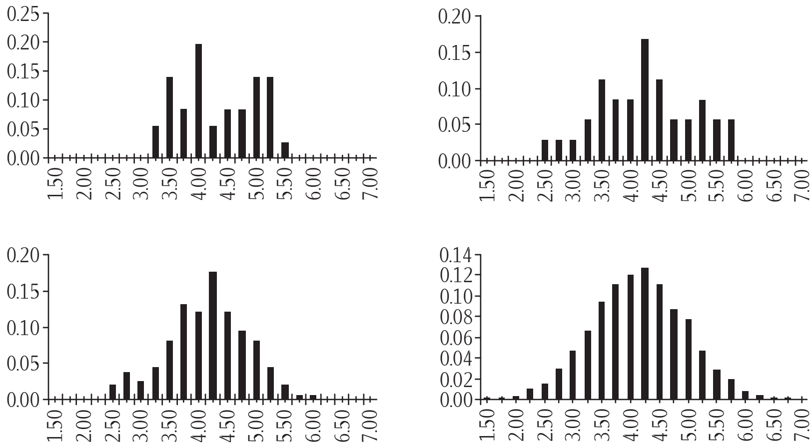
DISEÑO DE LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA Y DE LAS ACTIVIDADES

Se organizó la secuencia de tareas en tres unidades didácticas, cada una de las cuales agrupa similitudes cualitativas a la hora de tratar la problemática estudiada. Cada unidad didáctica se divide en lecciones que pueden completarse en una clase de 50 minutos. La unidad didáctica 1, "La complejidad del azar", que contiene actividades de introducción en las que se discute la problemática por abordar, consta de cuatro lecciones. Las actividades se centran en la idea de que existen factores de naturaleza aleatoria que pueden influir en el modo como evoluciona un fenómeno real cualquiera (por ejemplo, el funcionamiento de un circuito eléctrico) y que, sin embargo, no son tomados en consideración en los modelos analíticos usuales. Para enfocar el trabajo, nos centramos en el hecho de que los valores reales de componentes de circuitos eléctricos, como resistencias, inductancias o condensadores, tienen una oscilación imposible de predecir, pero que puede comprometer el funcionamiento del circuito (véase indicador de aprendizaje 1 en el cuadro 2).

La unidad didáctica 2, "Buscando tendencias en variables aleatorias", consta de seis lecciones y contiene un acercamiento al concepto de frecuencia relativa de un suceso. Trabajando con histogramas, los estudiantes observan que los valores que toman las variables tienen un comportamiento que mantiene, en ciertas condiciones, cierta regularidad. La frecuencia relativa de un intervalo [*a*, *b*] parece converger hacia un valor característico (probabilidad) a medida que el número de observaciones aumenta. En la figura 1 aparecen algunos histogramas que los alumnos elaboran y que les permiten observar la gran variabilidad de la frecuencia relativa de las pequeñas muestras. Sólo se distingue un patrón claro en los histogramas inferiores de la figura 1, que hacen uso de una gran muestra de la variable (véanse indicadores de aprendizaje 2 y 6 en el cuadro 2).

La unidad didáctica 3, "La probabilidad", consta de 34 lecciones, a lo largo de las cuales se construye el marco teórico de la probabilidad frecuencial y se muestra cómo pueden resolverse problemas simulando fenómenos aleatorios en

Figura 1 Histogramas de la distribución de una variable continua a medida que aumenta el tamaño muestral



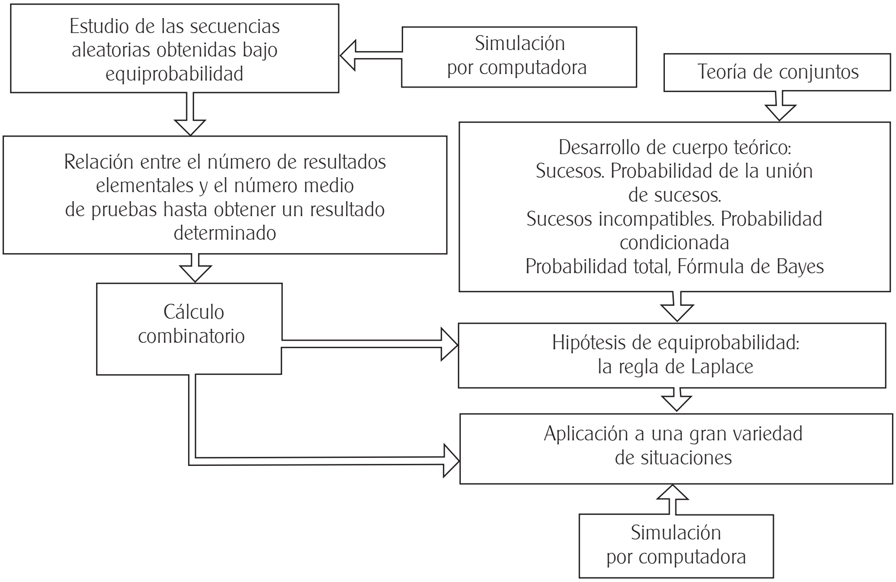
la computadora. Seguidamente nos centraremos en esta unidad, que cuenta con un mayor contenido teórico. El cuadro 3 relaciona las demandas de aprendizaje con los indicadores de aprendizaje (véase el cuadro 2) y las previsibles dificultades de aprendizaje. Algunas de estas dificultades se describen en el Paradigma de Heurísticos y Sesgos al que hicimos referencia en el apartado "Investigaciones previas...". El resto de las dificultades de aprendizaje que aparecen en el cuadro 3 fueron identificadas durante la aplicación en el aula de versiones preliminares de la unidad didáctica.

La figura 2 muestra el plan de trabajo seguido a lo largo de la unidad. Comenzamos adoptando la terminología de teoría de conjuntos para definir los diferentes resultados que pueden ocurrir al ejecutar un experimento aleatorio. Se investigan las propiedades de la probabilidad y, mediante nuevas situaciones problemáticas, aparecen los conceptos de independencia, compatibilidad y equiprobabilidad, así como nuevas relaciones como la regla de Laplace (con la consiguiente necesidad del cálculo combinatorio) y las fórmulas de la probabilidad total y de Bayes. Se aplica todo ello a una gran variedad de situaciones de azar, mostrando que estamos obteniendo un marco teórico muy general para trabajar formalmente el azar (véase indicador de aprendizaje 8 en el cuadro 2). Concretemos de qué manera aparecen los conceptos más importantes. Un primer procedimiento de cálculo de la probabilidad de un suceso F en un espacio

Cuadro 3 Demandas de aprendizaje para la unidad didáctica 3

Demandas de aprendizaje y su relación con los indicadores	Posibles dificultades de aprendizaje
1. Comprender la conceptualización formal del suceso como subconjunto de un espacio muestral (indicadores 3 y 4).	Dificultades para operar con conjuntos. No comprensión del significado de operaciones mediante sucesos. Dificultades para asociar términos conjuntistas abstractos con términos que cuentan con fuerte referente intuitivo. Por ejemplo, "suceso contrario" y "complementario".
2. Comprender el concepto de probabilidad condicionada desde una interpretación frecuencial (indicadores 3 y 4).	Dados los sucesos A y B, una interpretación causa-efecto de A/B se superpone a la interpretación frecuencial.
3. Comprender la conceptualización formal de independencia entre sucesos (indicadores 3 y 4).	Dificultades para relacionar las nociones intuitiva y formal de independencia entre sucesos y la expresión formal.
4. Comprender la conexión entre la probabilidad y la teoría combinatoria: regla de Laplace (indicadores 3 y 4).	Creencia irreflexiva en la equiprobabilidad de todos los sucesos elementales.
5. Construcción de las expresiones generales de cálculo combinatorio (indicador 4).	No entender las condiciones de aplicación de cada una de las relaciones combinatorias. Aplicación de esquemas erróneos diferentes a los procedimientos formales para el recuento de casos.
6. Estudiar los resultados que se obtienen bajo la hipótesis de equiprobabilidad. –Relación entre el número de sucesos elementales y la media de experimentos necesarios hasta obtener un suceso elemental determinado. –Frecuencia de aparición de sucesos que presentan simetrías o patrones. (Indicador 4)	Creencia de que un resultado que presenta una simetría es menos frecuente que otro en el que no se aprecia simetría alguna.
7. Emplear las simulaciones por computadora de experimentos aleatorios para estudiar el significado de los conceptos y buscar soluciones a problemas (indicador 5).	Dificultades para el manejo del software utilizado. Dificultad para diferenciar el valor de la probabilidad y una estimación de éste obtenida mediante simulación.
8. Mostrar a los estudiantes una visión de la matemática en la que se arranca de situaciones problemáticas y se desarrolla impulsada por la controversia y el debate, y que además es posibles participar en su construcción (indicadores 7 y 8).	Visión de la matemática como una disciplina en la que fundamentalmente se trata de aprender procedimientos tipo, codificados en un lenguaje simbólico, y en la que los significados tienen un carácter definitivo.

Figura 2 Contenidos y secuenciación para la unidad 3: La probabilidad



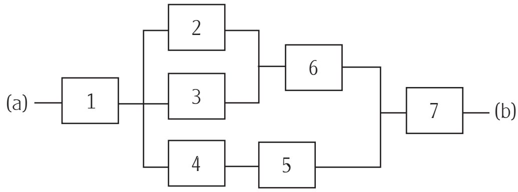
muestral E consiste en sumar las probabilidades de los sucesos elementales que lo forman. Es decir:

$$\mathrm{E} = \{\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2,...,\mathrm{S}_n\},\ \mathrm{F} = \{\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2,...,\mathrm{S}_k\}\ (k \leq n) \Rightarrow p(\mathrm{F}) = p(\mathrm{S}_1) +...+ p(\mathrm{S}_k) \quad (1)$$

Sin embargo, el procedimiento 1 pronto se vuelve ineficaz si E tiene un gran número de elementos, porque es muy trabajoso especificar los sucesos elementales que forman cada suceso F. Un ejemplo que utilizamos para ilustrar el nuevo problema es el de una red (de transporte terrestre, de información, de computadoras, de distribución de electricidad, etc.) como la que aparece en la figura 3.

Se supone conocida la probabilidad individual de funcionamiento de cada uno de los siete nodos, $p(1),..., p(7)$, pero ¿cuál es la probabilidad de que se pueda transferir información desde el punto a hasta el punto b? La solución pasa por expresar el suceso F = “existe un camino disponible entre a y b” mediante uniones e intersecciones de sucesos:

Figura 3 ¿Cuál es la probabilidad de que exista un camino disponible entre a y b?



$$F = 1 \cap 7 \cap (((2 \cup 3) \cap 6) \cup (4 \cap 5)) \tag{2}$$

Sin embargo, la idea 2 abre un nuevo problema, el de calcular la probabilidad de una intersección de sucesos, lo cual lleva a la introducción de la probabilidad condicionada y del difícil concepto de independencia probabilística (Estrada *et al*., 2006):

$$\text{A y B son independientes} \Leftrightarrow p(A/B) = p(A) \Leftrightarrow p(A/B) = p(B) \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A)p(B) \tag{3}$$

La definición formal 3, que aparece en la mayoría de los textos universitarios (Barragués y Guisasola, 2006), incluye los diferentes significados de $p(A/B)$ algunos de los cuales son: probabilidad de A recalculada a la luz de la nueva información B, probabilidad de A en el subespacio muestral B, valor hacia el que "converge" la frecuencia relativa de A, pero calculada sobre aquellas veces en las que ocurre B. Sin embargo, no es fácil comprender estos significados a partir de la definición 3. Para ilustrar las dificultades de aprendizaje, tomemos uno de los enunciados que discutimos en clase (cuadro 4).

Si denotamos B1 = "blanca la primera bola", N1 = "negra la primera bola", B2 = "blanca la segunda bola", las soluciones son:

i. $p(B2/B1) = \frac{1}{3}$

ii. $p(B2) = p((B2 \cap B1) \cup (B2 \cap N1)) = p(B1)p(B2/B1) + p(N1)p(B2/N1) = \frac{1}{2}$

Cuadro 4 Inofensiva situación probabilística que esconde importantes dificultades

Una urna contiene dos bolas blancas y dos negras. Sacamos al azar una bola. Sin mirar el color y sin reemplazar la bola en la urna, sacamos una segunda bola.

i. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea blanca, sabiendo que la primera ha sido blanca?

ii. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola haya sido blanca, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

$$p\left(B2/B1\right) = \frac{p\left(B1 \cap B2\right)}{p\left(B2\right)} = \frac{p\left(B1\right)p\left(B2/B1\right)}{p\left(B2\right)} = \frac{1}{3}$$

Al tratar de interpretar el significado de los valores calculados, como en la cuestión *i)* se pide calcular la probabilidad del suceso B2 sabiendo que ha tenido lugar un suceso B1, no existe conflicto, porque B2 se sitúa *después* de B1 en el tiempo. En cambio, el apartado *ii)* es problemático y describe una situación conocida como fenómeno de Falk (Sáenz, 1998; Borovcnik y Bentz, 1991). Ahora se trata de calcular la probabilidad de un suceso (B1), sabiendo que ha tenido lugar otro suceso (B2), *que ocurre más tarde*, lo cual se interpreta como absurdo si se confunde la independencia probabilística con la independencia *causal*. El suceso posterior no influye causalmente en el anterior, pero ambos sucesos son probabilísticamente dependientes. Al igual que Batanero y Díaz (2007, p. 6), nosotros empleamos tablas de doble entrada como recurso didáctico, estimando las probabilidades a partir de las frecuencias absolutas de los sucesos involucrados.

Por otra parte, también exploramos el uso de simulaciones por computadora como herramienta cognitiva (véase indicador de aprendizaje 5 en el cuadro 2), esto es, como medio capaz de ir más allá de las limitaciones de la mente, de ayudar a pensar, aprender y realizar actividades de resolución de problemas (Inzunsa, 2008, p. 2). Trabajamos con una simulación elaborada mediante Excel del funcionamiento de la red de la figura 3, lo cual nos permite estimar la probabilidad del suceso F (véase la ecuación 2) mediante su frecuencia relativa y comprobar que el resultado obtenido coincide con el del modelo probabilístico teórico. Como indican Batanero y Díaz (2007, p. 2), un conocimiento genuino de probabilidad sólo se alcanza con el estudio de la probabilidad formal, apoyado en la experiencia estocástica de los estudiantes, lo cual puede lograrse combinando los enfoques clásico, axiomático y frecuencial. Además, también hemos tenido en cuenta otras dificultades asociadas al uso de simulaciones por computadora (Countinho, 2001; Batanero, 2001, p. 9).

El concepto de probabilidad condicionada es todavía observado en el programa de actividades de esta unidad didáctica 3 desde una nueva óptica: la máquina bayesiana. Considérese el enunciado del cuadro 5.

Cuadro 5 Máquina bayesiana

Supongamos que participamos en un concurso en el que se trata de adivinar cuántas bolas blancas y negras hay en una bolsa. Sólo sabemos que hay un total de cuatro bolas. El presentador saca una bola de la bolsa, nos dice el color, reintegra la bola a la bolsa y repite la misma operación varias veces. Con estas informaciones, ¿cómo podríamos decidir cuántas bolas hay de cada color en la bolsa?

Denotando como C0(0 B, 4 N), C1(1 B, 3 N), C2(2 B, 2 N), C3(3 B, 1 N) y C4(4 B, 0 N) los cinco posibles contenidos de la bolsa, se trata de ir recalculando mediante la fórmula de Bayes (6) la probabilidad $p(Ci)$ de cada posible contenido C*i* de bolsa, a medida que se realiza una nueva extracción S (S = "B" o S = "N").

$$p\left(Ci/S\right)=p\left(Ci\cap S\right)/p\left(S\right)=p\left(Ci\right)p\left(S/Ci\right)/p\left(S\right) \tag{6}$$

$$p\left(S\right)=p\left(C0\right)p\left(S/C0\right)+p\left(C1\right)p\left(S/C1\right)+p\left(C2\right)p\left(S/C2\right)+p\left(C3\right)p\left(S/C3\right)+p\left(C4\right)p\left(S/C4\right)$$

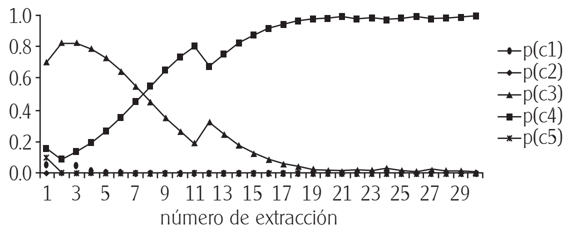
Los estudiantes realizan las extracciones de bolas y los cálculos de (6) se automatizan con Excel. Pero nótese que es necesaria una asignación inicial de $p(Ci)$, $i = 0,..., 4$. ¿Optamos por equiprobabilidad, $p(Ci) = 0.2$? No necesariamente. Por ejemplo, quizá tengamos razones *subjetivas* para pensar que son menos probables los sucesos C0 y C4. Esto nos sugiere una novedosa interpretación de la probabilidad, basada en la opinión personal acerca del fenómeno aleatorio que se está estudiando: la interpretación subjetiva, que cobra una gran importancia dada la incorporación de las aplicaciones de la estadística a todos los campos del conocimiento (Batanero y Díaz, 2007, p. 2). Este modo de entender la probabilidad es muy intuitivo y de gran interés en aquellas situaciones en las que, por ejemplo, no se disponga de información frecuencial. La figura 4 muestra una posible evolución de $p(Ci)$ obtenida en clase a lo largo de 30 extracciones. La composición real fue C3 y los valores iniciales $p(C0) = p(C4) = 0.05$, $p(C1) = p(C3) = 0.1$, $p(C2) = 0.7$. Los alumnos observan la creciente verosimilitud del suceso *C3/S* y la "caída" del resto de las probabilidades.

Creemos que, a pesar de su dificultad, no se debe renunciar a la enseñanza del teorema de Bayes y sus aplicaciones, puesto que es una herramienta fundamental para la formulación de inferencias (véanse indicadores de aprendizaje 3 y 4 en el cuadro 2).

El marco teórico probabilístico que se ha construido en la unidad didáctica 3 permite abordar el problema que ha estructurado todo el trabajo, esto es, encontrar un modo de construir modelos matemáticos de fenómenos físicos complejos en los que estén involucradas diversas variables aleatorias. Ya que puede ser muy complicado o imposible obtener la función de densidad de probabilidad del modelo, la solución a que se llega consiste en simular valores de todas las variables aleatorias consideradas, introducir estos valores en el modelo, simularlo un gran número de veces, estimar mediante la frecuencia relativa la probabilidad $p(S)$ del suceso S en el que estemos interesados y, como también apunta Inzunsa (2008, p. 1), explorar el efecto que tiene sobre $p(S)$ el modificar los diferentes parámetros del modelo (véase indicador de aprendizaje 5 en el cuadro 2).

Dedicamos también diversas actividades para ayudar al alumno a superar ciertas ideas acerca del azar que son un obstáculo para el aprendizaje. En concreto, la creencia de que una secuencia de cierto tamaño obtenida al azar no

Figura 4 Una posible evolución de las probabilidades $p\left(Ci/S\right)$



puede mostrar simetrías o patrones. Así, la simetría de la secuencia CXCXCXCX, obtenida al lanzar ocho veces una moneda, puede conducir a pensar que "es mucho menos probable que la desordenada secuencia CCXXXCXC", y que el número de lotería 12 345 "debe aparecer con menor frecuencia que el 41 327". Leemos artículos sobre esta cuestión (Stewart, 1998; Gardner, 1990) y realizamos actividades de simulación con computadora (Barragués *et al.*, 2007*b*; Barragués y Guisasola, 2007*a*). Por ejemplo, se anima a los alumnos a descubrir, en grandes masas de datos aleatorios simulados, cualquier estructura que cuente con algún significado para ellos. Sacadas de contexto, puede parecer inverosímil que tales estructuras provengan del azar y, sin embargo, así ha sido (véase indicador de aprendizaje 3.3.3 en el cuadro 2).

En esta unidad didáctica también realizamos actividades de lectura y comentario de artículos (Stewart, 1998; Paulos, 1998) acerca del auge, a finales del siglo XVIII, de la concepción determinista del universo y de los precursores de las ideas formales acerca del azar y la probabilidad. Se discute en clase sobre una visión de la matemática en la que el inmovilismo cede terreno en favor del debate y la controversia, aspecto inmerso en las relaciones entre la ciencia, la técnica y la sociedad que nos interesa resaltar (OCDE, 2006). Las notas históricas que utilizamos muestran la naturaleza problemática de la manera como han evolucionado los conceptos relacionados con la probabilidad (véanse indicadores de aprendizaje 7 y 8 en el cuadro 2).

METODOLOGÍA

Muestra y organización de la enseñanza

La secuencia de enseñanza que hemos descrito viene siendo implementada y evaluada desde el curso académico 2001-2002 con grupos de estudiantes ($N = 35$-50) de segundo curso de Ingeniería en la Universidad del País Vasco, y se han obtenido resultados de aprendizaje similares en todos los cursos. El aprendizaje de los estudiantes fue evaluado desde la óptica de los indicadores mediante instrumentos muy diferentes, buscando una convergencia en los resultados de todos ellos. En concreto, se utilizó un cuestionario individual escrito, un cuestionario de resolución de problemas en equipo, una entrevista en equipo sobre epistemología de la teoría de la probabilidad y un cuestionario individual sobre actitudes. El primer cuestionario se aplicó también a un grupo de control para observar las diferencias obtenidas respecto al grupo experimental. Las restantes tres pruebas se aplicaron únicamente a los estudiantes del grupo experimental, porque el tipo de preguntas y el formato con el que se realizaron no era coherente con la dinámica de clase y los objetivos de enseñanza seguidos por los grupos de control, como seguidamente se explicará.

En este artículo presentamos los resultados obtenidos con una muestra de 46 estudiantes experimentales y 60 de control. Todos los estudiantes tenían un perfil similar, porque: *a)* habían recibido en su enseñanza secundaria al menos un curso de matemáticas que incluía una introducción a la probabilidad y la estadística; *b)* superaron el mismo examen de matemáticas para ingresar en la universidad, y *c)* fueron sometidos al inicio del curso a un cuestionario de probabilidad que ya hemos validado mediante otras investigaciones sobre comprensión de la probabilidad (Guisasola y Barragues, 2002*a* y *b*; Barragués *et al.*, 2005).

Los estudiantes del grupo de control recibieron su enseñanza a cargo de profesorado que contaba con amplia experiencia docente, según la secuenciación habitual: presentación formal de conceptos y propiedades, ejemplos, ejercicios de aplicación más o menos inmediata y uso de computadora para la automatización de cálculos.

Los estudiantes que siguieron la enseñanza experimental estaban organizados en clase en equipos de tres o cuatro personas que colaboraban entre sí y con otros equipos en las actividades propuestas. Cada estudiante trabajaba en el programa de actividades que se ha descrito en los apartados anteriores, participaba en las discusiones y tomaba nota de la puesta en común que posteriormente dirigía el profesor. Algunas de las actividades del programa, problemas adicionales, lectura de artículos, etc., quedaban a cargo del equipo para ser investigadas y resueltas fuera del horario de clase (enseñanza no presencial). Una vez finalizada cada unidad didáctica, el profesor recogía el informe que debía elaborar cada equipo y lo evaluaba desde la óptica de los indicadores de aprendizaje (cuadro 2). Después, el equipo defendía oralmente su trabajo ante el profesor, quien cuidaba de tomar nota individualizada de las intervenciones, a fin de contar con criterios adicionales para reflejarlos en la evaluación del estudiante. La implementación en el aula fue realizada por uno de los autores de este trabajo.

Instrumentos de evaluación

La primera prueba para ambos grupos de estudiantes consistió en aplicar un cuestionario de preguntas de tipo abierto con énfasis en los niveles de comprensión de las ideas y de la complejidad de los razonamientos. El cuestionario 1 del anexo contiene parte de las preguntas. Las respuestas de los estudiantes fueron analizadas por los autores y por otros dos profesores del Departamento de Matemática Aplicada, a partir de protocolos cuyos criterios de corrección fueron previamente discutidos. El cuestionario se aplicó a los estudiantes al finalizar el cuatrimestre, en situación de examen. Seguidamente se explican los objetivos de los ítems y los criterios de evaluación empleados.

El ítem 1 persigue detectar la preeminencia del pensamiento causal sobre el probabilístico. Se valora positivamente si no se acepta la solución propuesta en el enunciado, razonando que aparecen factores aleatorios que intervienen en la definición de una trayectoria específica de la bola que hacen imposible su predicción exacta, y se opta por un enfoque probabilístico, esto es, tratar de estimar o calcular la probabilidad de cada orificio.

El objetivo del ítem 2 es detectar el sesgo de equiprobabilidad. Se valoran positivamente las respuestas que propongan una solución en términos de los parámetros p(R), p(V), p(AF), p(AI), o bien, expliquen que no es posible calcular la probabilidad pedida porque la probabilidad de cada uno de los estados del semáforo es desconocida. También se considera correcta una respuesta que formule de manera explícita la hipótesis de equiprobabilidad de cada uno de los cuatro estados del semáforo y obtenga correctamente la solución numérica (0.5).

El objetivo del ítem 3 es detectar una concepción de la probabilidad según la cual la probabilidad de que un elemento A pertenezca a cierta población S se estima atendiendo solamente a la experiencia personal acerca de A y de S (heurístico de representatividad). Se valoran positivamente aquellas respuestas en las que se emplea correctamente el concepto de suceso intersección.

La segunda prueba (cuestionario 2 del anexo) se diseñó con la intención de profundizar en las explicaciones de los estudiantes experimentales y contrastar hasta qué punto se habían producido logros en los indicadores de aprendizaje. Se presentaba a los estudiantes situaciones problemáticas de especial dificultad, que eran resueltas en equipo de trabajo. Al finalizar la tarea, cada equipo debía realizar un informe con los resultados obtenidos y las justificaciones para lograr dichos resultados. En cada tarea se realizaron grabaciones a 6 de los 13 equipos de trabajo, elegidos al azar, para observar los comentarios de los estudiantes desde el inicio de la tarea hasta la realización del informe.

El ítem 4 trata de detectar en las explicaciones de los alumnos la creencia de que la probabilidad de un suceso es siempre aproximadamente igual a la frecuencia relativa, independientemente del tamaño muestral. Valoramos positivamente una respuesta que indique que una muestra de seis elementos no es significativa para tomar una decisión probabilística acerca de la afirmación $p(\text{REGALO}) = 0.5$.

En el ítem 5, valoramos positivamente que se reconozca la dependencia probabilística entre los sucesos AS1 y AS2. Luego debe obtenerse correctamente el valor de p(AS1) modificado a la luz del nuevo dato, es decir, debe reconocerse el concepto de probabilidad condicionada y calcularse el valor $p\left(AS1/AS2\right)=\frac{1}{3}$.

La tercera prueba (cuestionario 3 del anexo) consistió en una entrevista a 6 de los 13 equipos, elegidos al azar, con el objetivo de observar la perspectiva general que habían adquirido acerca de la teoría de la probabilidad y de la construcción de un marco teórico científico.

La cuarta prueba consistió en un cuestionario de opinión sobre los contenidos que se habían trabajado y la manera de trabajarlos. Se presentaban diversas afirmaciones y los estudiantes debían valorar de 0 a 10 su grado de acuerdo con cada una.

Análisis de los datos

El análisis de la primera prueba se basa en métodos convencionales de comparación del número de respuestas correctas entre los grupos experimental y de control. Para decidir en cada ítem si existen diferencias estadísticas significativas entre ambos grupos, se utiliza el test chi-cuadrado que se describe a continuación (Viedma, 1990, p. 198). Se calcula el número de respuestas consideradas como correctas e incorrectas en el grupo experimental (a y b) y en el de control (c y d); se establece la hipótesis nula H_0 = "El número de respuestas correctas es estadísticamente independiente del método de enseñanza empleado"; se calcula el valor E del estadígrafo de prueba chi-cuadrado:

$$E = \frac{(ad - bc)^2 (a + b + c + d)}{(a + b)(a + c)(b + d)(c + d)}$$

Si la hipótesis nula H_0 es cierta, entonces el valor calculado E es una observación de una variable aleatoria chi-cuadrado con un grado de libertad; se calcula el valor p de probabilidad de que una variable aleatoria chi-cuadrado con un grado de libertad tome un valor mayor que E (nosotros empleamos la hoja de cálculo Excel); si $p < 0.05$ (nivel de significación de 95%), entonces se rechaza la hipótesis nula H_0, es decir, se considera que el número de respuestas correctas obtenidas en el ítem depende del método de enseñanza empleado.

En la segunda y tercera pruebas se han analizado los informes y las conversaciones grabadas para valorar los razonamientos y argumentos empleados por los estudiantes. Las discusiones han sido literalmente transcritas a un protocolo y el análisis de éste se ha realizado tomando como referentes las categorías de respuestas que se encontraron en trabajos de investigación anteriores sobre dificultades de aprendizaje de la probabilidad (Barragués *et al.*, 2006 y 2007*a*). A lo largo del análisis, las categorías previas fueron matizadas y reformuladas de acuerdo con los resultados obtenidos (Ericsson y Simon, 1984).

En la cuarta prueba se utilizaron métodos convencionales de análisis de una prueba Likert (Sierra, 1995). Este cuestionario fue contestado por los estudiantes al final del curso, poniéndolos en la situación más desfavorable para la evaluación de la enseñanza impartida, ya que, como señala la investigación, las expectativas y las actitudes positivas de los estudiantes hacia la enseñanza-aprendizaje de las ciencias disminuye a lo largo del curso académico.

El análisis de los datos refleja el aprendizaje logrado por los estudiantes al utilizar la secuencia de enseñanza en la Escuela Universitaria Politécnica de la Universidad del País Vasco. Pensamos que los instrumentos utilizados en esta investigación son válidos para la evaluación de la propuesta innovadora que presentamos y para su comparación con la enseñanza habitual.

RESULTADOS

Los resultados parecen mostrar pruebas de que esta secuencia de enseñanza, junto con su metodología de aplicación en el aula, logra que los estudiantes adquieran una mayor capacidad de razonamiento probabilístico que una enseñanza convencional.

El cuadro 6 muestra los porcentajes de respuestas correctas obtenidos por ambos grupos de alumnos en los ítems del cuestionario 1. También aparece el valor *E* del estadígrafo chi-cuadrado obtenido de los citados porcentajes y el valor *p* de la probabilidad de que una variable aleatoria chi-cuadrado con un grado de libertad tome un valor mayor que *E*. Como se desprende de este análisis, con una confianza mayor que 95%, se concluye que existen diferencias significativas a favor del grupo experimental entre los porcentajes de respuestas correctas.

Cuadro 6 Resultados obtenidos para los ítems del cuestionario 1

	% de respuestas correctas			
Número de ítem y conceptos relacionados	Grupo experimental ($N = 46$)	Grupo de control ($N = 60$)	E (valor del estadígrafo chi-cuadrado)	P
Ítem 1. Concepción determinista del azar. Procedimientos probabilísticos.	67.4	16.4	53.4	$<<0.01$
Ítem 2. Heurística de representatividad.	58.1	16.7	36.7	$<<0.01$
Ítem 3. Sesgo de equiprobabilidad.	80.4	60.0	10.0	0.016

Respecto al ítem 4 de la segunda prueba (cuestionario 2), 12 de los 13 equipos de alumnos del grupo experimental hacen referencia al pequeño tamaño de la muestra y/o a que el valor de 50% se verifica a largo plazo, no necesariamente para una pequeña muestra. El ejemplo 1 muestra una respuesta correcta para este ítem.

Ejemplo 1. Respuesta clasificada como correcta (ítem 4)

Seguramente, 50% de los paks tendrán premio, pero hemos tomado una muestra muy pequeña. Cuanto mayor sea la muestra, más se aproximará el valor de la frecuencia al estimado por la empresa, p*(premio) = Núm. PREMIOS/Núm. PAKS.*

Respecto al ítem 5, 10 de los 13 equipos de alumnos del grupo experimental han propuesto soluciones correctas. El ejemplo 2 muestra una respuesta correcta para este ítem.

Ejemplo 2. Respuesta clasificada como correcta (ítem 5).

Cuando tomamos la primera carta tomamos como subíndice un 1 y cuando tomemos la segunda es un 2. Nos piden la condicionada A1/A2

$$p\left(A1/A2\right)=\frac{p\left(A1\cap A2\right)}{p\left(A2\right)}=\frac{p\left(A1\cap A2\right)}{p\left(\left(A2\cap A1\right)\cup\left(A2\cap R1\right)\right)}=$$

[Indica mediante flechas que las intersecciones son de sucesos dependientes y que la unión del denominador es de sucesos incompatibles.]

$$=\frac{p\left(A1\right)p\left(A2/AS1\right)}{\left(p\left(A1\right)p\left(A2/A1\right)+p\left(R1\right)p\left(A2/R1\right)\right)}=$$

$$=\frac{\left(1/3\right)\left(1/2\right)}{\left(\left(1/3\right)\left(1/2\right)+\left(2/3\right)\left(1/2\right)\right)}=1/3<1/2$$

A largo plazo, sí que afecta saber cuál es la segunda carta, puesto que la probabilidad varía.

a) *Falso. El resultado de extraer la segunda carta varía. Puesto que tenemos que pensar que el experimento no lo hacemos una vez sino muchas veces.*
b) *Falso, hemos comprobado el resultado.*
c) *Verdadero. La probabilidad es* 1/3.

Tres de los informes emplean razonamientos incorrectos que no relacionan el análisis del problema con la probabilidad condicionada. El ejemplo 3 muestra un fragmento de grabación en el que los alumnos se equivocan en la aplicación de las relaciones de cálculo de la probabilidad y no reconocen que el valor que debe calcularse es el de $p\left(AS1/AS2\right)$. La conclusión incorrecta obtenida termina siendo "el resultado de la segunda carta no afecta a la primera", pero no parece ser como consecuencia de una interpretación causal del enunciado sino de un incorrecto cálculo de la probabilidad.

Ejemplo 3. Respuesta clasificada como incorrecta (ítem 5).

Hipótesis: *"Equiprobabilidad"*

$$As1 = (As1 \cap As2) \cup (As1 \cap \text{no } As2)$$

[Señalan con flechas que las intersecciones lo son de sucesos dependientes y la unión de incompatibles.]

$$p\left(As1\right) = p\left(As1\right)p\left(As2/As1\right) + p\left(As1\right)p\left(\text{no } As1/As1\right) = \left(1/2\right)\left(1/3\right) + \left(1/2\right)\left(2/3\right) = 1/2$$

El resultado de la segunda carta no afecta a la primera.

Respecto a la tercera prueba (cuestionario 3), todos los equipos de trabajo parecen haber adquirido una perspectiva global correcta de la problemática tratada por la teoría probabilística y del tipo de soluciones que aporta. Por ejemplo, han coincidido en señalar un problema como origen de un trabajo de investigación científica, han definido correctamente la problemática que los ha ocupado, perciben problemas parecidos en otras situaciones reales, aunque estén muy alejadas de la tecnología de fabricación de circuitos eléctricos (ítems 2 y 4 del cuestionario 4) y distinguen entre "fenómeno real" y "modelo" (ítem 3). El ejemplo 4 muestra un fragmento de entrevista.

Ejemplo 4. Fragmento de entrevista a uno de los equipos, en la que se refieren a la necesidad de los modelos probabilísticos (cuestionario 3).

EQUIPO: *Cuando un ingeniero va a trabajar en un sistema mecánico o eléctrico o en una composición de diferentes sistemas, si sólo se va a producir uno, no existe problema, porque tomas los componentes y tienes la seguridad de que, desde el punto de vista de factores aleatorios* *como tolerancias, te puede funcionar. Pero los sistemas, cuando se van a producir en masa, están sometidos a muchos factores aleatorios, no produces un circuito, sino muchos, no tienes la seguridad de que cada componente vaya a estar en el intervalo que te hace falta. Ésa es una variable aleatoria que puede perjudicar el comportamiento que tú has deseado. Hay que cuantificar el efecto de cada una de esas variables. Hemos visto que aparecen unas distribuciones que se pueden estudiar. Existen otras variables muy difíciles de manejar.*

ENTREVISTADOR: *Y desde un punto de vista general, ¿cuál es el comienzo de una investigación científica?*

EQUIPO: *Dar solución a un problema.*

ENTREVISTADOR: *Pero tenemos unas ecuaciones que nos dicen cómo funciona el circuito, ¿no?*

EQUIPO: *Es una forma de modelar el circuito sin tener en cuenta otras variables que pueden afectar el circuito.*

ENTREVISTADOR: *En otros problemas, aunque no sean de circuitos eléctricos, ¿creéis que existirán dificultades parecidas?*

EQUIPO: *Pienso que se debe dar en todo tipo de problemas. Algunas variables serán más manejables que otras.*

Respecto a las cuestiones relativas al concepto de frecuencia relativa, su estabilidad es señalada por todos los equipos de trabajo como el punto donde se observaron regularidades en las masas de datos con las que trabajaron, se refieren a la necesidad de repetir el experimento en las mismas condiciones y a la de tomar una muestra amplia para que sea visible la estabilidad en las frecuencias relativas (ítem 6). Coinciden también en señalar que el significado del término "muestra amplia" es relativo al propio experimento y que experimentalmente obtuvieron un tamaño muestral que parecía ser suficiente en cada caso. Los alumnos parecen haber entendido que un aumento del tamaño muestral no conlleva necesariamente una mayor proximidad de la frecuencia relativa a la probabilidad. El ejemplo 5 muestra un fragmento de entrevista.

Ejemplo 5. Fragmento de entrevista a uno de los equipos, en la que se refieren a la frecuencia relativa (cuestionario 3).

ENTREVISTADOR: *¿Qué clase de regularidad encontramos cuando analizamos masas de datos?*

EQUIPO: *Medimos muchos valores, muchas resistencias o muchos condensadores. Hicimos un histograma, vimos una estabilidad de la frecuencia relativa en cada intervalo.*

ENTREVISTADOR: *¿Qué se necesitaba para obtener esa estabilidad?*

EQUIPO: *Muchos datos y las mismas condiciones.*

ENTREVISTADOR: *¿Pero qué son muchos datos en general? ¿Qué número? ¿1 000? ¿5 000?*

EQUIPO: *Igual para un experimento sí será y para otro, no. Si se ve que tiende hacia un valor fijo... depende del experimento.*

ENTREVISTADOR: *¿Se os ocurre algún ejemplo en el que podemos esperar ya una estabilidad para muestras no muy grandes?*

EQUIPO: *Por ejemplo, los dados.*

ENTREVISTADOR: *¿Y un experimento para el que sean necesarios muchos más datos para encontrar estabilidad en la frecuencia relativa?*

EQUIPO: *La lotería.*

ENTREVISTADOR: *¿Y cuál es la diferencia entre ambos experimentos que hace que el tamaño de la muestra deba ser tan diferente?*

EQUIPO: *El espacio muestral de la lotería es mucho mayor que el de los dados.*

ENTREVISTADOR: *¿Cómo definimos la probabilidad a partir de la estabilidad de la frecuencia relativa?*

EQUIPO: *Es el valor al que tienden las frecuencias relativas.*

Finalmente, el cuestionario de actitudes muestra que los alumnos experimentales creen que los objetivos perseguidos son interesantes (media = 7.2, desviación típica = 1.3, moda = 7, mediana = 7), que el método utilizado proporciona buenas condiciones para aprender (media = 7.1, desviación típica = 1.4, moda = 7, mediana = 7) y que se percibe un clima de cooperación en clase (media = 6.3, desviación típica = 1.3, moda = 6, mediana = 6).

CONCLUSIONES

El uso competente de los conceptos relacionados con la concepción frecuencial de la probabilidad es problemático para una proporción significativa de estudiantes universitarios, incluso tras recibir la enseñanza. Por ejemplo, los estudiantes tienen dificultades para valorar la importancia del tamaño de la muestra a la hora de estimar la probabilidad de un suceso, asumen de manera irreflexiva la equiprobabilidad de todos los sucesos elementales asociados a un experimento aleatorio y confunden el concepto de independencia probabilística con el de independencia causal. A estas dificultades se suma la tendencia a utilizar, ante situaciones reales de azar, argumentos de inspiración cotidiana que pueden entrar en contradicción con los argumentos probabilísticos formales.

En este estudio hemos descrito el diseño, la implementación y la evaluación de una secuencia de enseñanza para introducir los conceptos probabilísticos elementales. Acerca de ella, queremos resaltar dos aspectos. El primero trata sobre el contexto escolar universitario donde se ha implementado, el cual ha sido un contexto rígido, en principio no muy favorable a la innovación educativa, donde está extendida la idea de que la enseñanza es una actividad simple para la que bastan conocimientos científicos, sentido común, experiencia y algunos complementos sobre educación (Campanario, 2002, p. 3). Nos hemos visto restringidos por el programa marcado en el plan de estudios y el reto ha sido introducir cambios en la metodología de enseñanza en este contexto. Ha sido necesario, de acuerdo con las restricciones mencionadas, realizar una distribución muy cuidadosa del tiempo disponible y mostrar que, mediante la nueva metodología de enseñanza, no había pérdida en el conocimiento que se lograba con la enseñanza tradicional. Los objetivos de aprendizaje de la enseñanza tradicional son una parte de nuestros indicadores de aprendizaje (véase indicador 4 en el cuadro 2) y, de hecho, se han mostrado pruebas de que los estudiantes experimentales fueron capaces de resolver mejor los ejercicios estándar utilizados en la enseñanza tradicional, pero también fueron capaces de enfrentarse y resolver nuevos problemas de mayor demanda.

El segundo aspecto que queremos resaltar es el papel desempeñado por el profesor. Aunque el currículo señale cuáles teorías y conceptos se deben enseñar, el profesor tiene una fuerte influencia en el modo como se enseñan. Por ello, como investigadores en temas de currículo, nos hemos preocupado de preparar una guía del profesor que acompaña a cada unidad didáctica y que detalla los objetivos y aspectos didácticos de cada actividad propuesta a los alumnos. El objetivo de esta guía del profesor no es recoger un "solucionario" de los problemas ni una "receta" de aplicación, sino proporcionar al profesor previsiones de las dificultades que encontrará en su aplicación y las posibles dificultades de los estudiantes. Estas previsiones se basan en los resultados de la investigación didáctica y en nuestra experiencia en el aula como profesores.

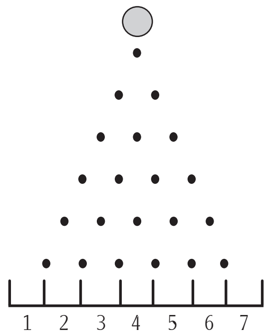
A pesar del limitado ámbito en el que hemos aplicado la secuencia de enseñanza, sostenemos que es "mejor" que la propuesta de enseñanza tradicional para alcanzar los indicadores de aprendizaje (véase el cuadro 2), cuando se trabaja con la metodología y las restricciones de contexto escolar mencionadas. Se han proporcionado pruebas de una mejor comprensión de la probabilidad en su interpretación frecuencial, en el razonamiento probabilístico y en la aplicación de todo ello para la resolución de problemas. La mejora en la competencia matemática observada también se concreta en un retroceso en el uso de las concepciones alternativas acerca del azar y la probabilidad. La nueva metodología de enseñanza parece contribuir también a generar actitudes positivas hacia la probabilidad como marco útil para resolver problemas y proporcionar a los alumnos una visión más ajustada del proceso de construcción de un marco teórico científico.

Nuestra experiencia nos indica que, en la universidad española, no existen muchos materiales curriculares que, con sus correspondientes guías, expliquen la metodología de enseñanza, los objetivos didácticos de cada actividad y las previsiones para su implementación en el aula. No se dispone de ejemplos documentados de buena práctica docente que proporcionen datos para realizar cambios en el temario y en la metodología de enseñanza. Por estas razones, creemos que el diseño y la evaluación de secuencias de enseñanza deberían constituir una de las líneas de investigación relevantes de la enseñanza de las matemáticas.

ANEXO. INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

Cuestionario 1. Prueba individual escrita de razonamiento probabilístico (grupos experimental y de control).

Ítem 1. Tu amigo Borja es muy aficionado a los experimentos físicos. Te ha llamado para hablarte del último que tiene entre manos. Sobre un panel vertical ha clavado algunos clavos, como aparece en la siguiente figura:



Cuando se deja caer desde la parte superior, la bola rebota por los clavos y termina en alguno de los agujeros de la parte inferior. Lo que intenta Borja es predecir cuál será el agujero en el que entrará la bola. Ha medido con mucho cuidado la posición de los clavos, el peso y diámetro de la bola y las características del material con que está fabricada. Su idea es emplear todos estos datos y los principios y leyes de Física sobre choques y movimiento de objetos para calcular la trayectoria que seguirá la bola en su caída y así poder predecir en qué agujero entrará. Sin embargo, Borja no ve claro cómo ponerse en marcha, cuáles leyes físicas emplear y cómo hacerlo. Por eso te ha pedido ayuda. Se trata de que lo aconsejes de la siguiente manera:

1. Te ha explicado su modo de enfocar el problema. Explícale qué te parece ese enfoque.
2. Explícale los pasos más importantes que piensas que habría que dar para resolver el problema.

Item 2. El semáforo que regula el tráfico en cierto cruce puede encontrarse en uno de los cuatro estados siguientes: ROJO, VERDE, AMBAR FIJO o AMBAR INTERMITENTE. ¿Cual es la probabilidad de que en un instante determinado el estado del semáforo sea ROJO o VERDE?

a) La probabilidad es 0.5 *b)* La probabilidad es 0.75

c) La probabilidad es: *d)* No puedo calcular la probabilidad

Item 3. (Adaptado de Kahneman y Tversky, 1972). R. M. es una persona joven, soltera, abierta, brillante, universitaria y muy interesada en las cuestiones sociales. ¿Cuál de las situaciones (1 o 2) te parece más probable?

1. R. M. trabaja en un banco.
2. R. M. trabaja en un banco y es miembro de una Organización No Gubernamental (ONG).
   a) La situación 1 es la más probable.
   b) La situación 2 es la más probable.
   c) Ambas situaciones tienen la misma probabilidad.
   d) Otra respuesta:

Cuestionario 2. Prueba de razonamiento probabilístico para trabajo en equipo

Ítem 4. Durante una promoción de Coca-Cola, la organización asegura que la mitad de los packs de 12 botellas trae premio (peluches parlantes de miembros de la familia Simpson). Con la esperanza de colocar a Bart, Homero y Lisa sobre tu mesilla, has comprado seis packs de Coca-Cola. Y resulta que sólo uno de ellos ha traído premio. La pregunta es: ¿hay en realidad menos de 50% de packs con premio?

Ítem 5. Sobre la mesa tenemos cuatro cartas: dos ASES y dos REYES. Las colocamos boca abajo y las revolvemos. Naturalmente, si ahora sacamos una carta al azar, la probabilidad de que salga AS es idéntica a la probabilidad de que salga REY (esto es, 0.5). Pues bien, extraemos una carta al azar, pero la apartamos sin mirar qué carta es. Luego, de entre las tres cartas restantes sacamos otra y esa sí la descubrimos y resulta que es un AS. Según este segundo resultado, la probabilidad de que la primera carta haya sido un AS ¿es ahora mayor, igual o menor que 0.5?

a) A la primera carta no le afecta el resultado de extraer una segunda carta. Por tanto, la probabilidad de que la primera carta haya sido un AS sigue siendo 0.5.
b) La probabilidad de que la primera carta haya sido un AS es ahora mayor que 0.5.

c) La probabilidad de que la primera carta haya sido un AS es ahora menor que 0.5.

Cuestionario 3. Entrevista en equipo para valorar la perspectiva general de la teoría probabilística que se ha adquirido.

1. ¿Cuál pensáis que es el punto de partida de una investigación científica?
2. ¿Y cuál ha sido nuestro punto de partida?
3. Entonces, ¿no tienen ninguna utilidad las ecuaciones diferenciales que predicen cómo se comportará el circuito si lo montamos?
4. Y en otros problemas, aunque no sean de diseño de circuitos, ¿creéis que nos encontraremos con dificultades parecidas?
5. Nos pusimos a estudiar colecciones de datos, por ejemplo, valores reales de resistencias. ¿Qué clase de organización o regularidad descubrimos? ¿No os parece sorprendente que el azar pueda mostrar regularidades?
6. ¿En qué condiciones aparecían estas regularidades?
7. Pero, ¿a qué llamamos "muestra amplia"? ¿Quizá a 1 000 datos? ¿5 000?
8. Encontramos que las frecuencias relativas son estables en ciertas condiciones. Pero, desde ahí, ¿cómo llegamos al concepto de probabilidad?
9. Si el tamaño de la muestra crece, ¿es seguro que la frecuencia relativa estará más próxima a la probabilidad?
10. Nosotros empleamos la computadora para observar cuál era el "aspecto" de una secuencia aleatoria, si es que las secuencias aleatorias tienen un "aspecto típico". ¿Qué obtuvimos?
11. ¿Existe alguna diferencia en la frecuencia con la que aparecen, por ejemplo, los números 11 111 y 35 204? ¿Cada cuántas veces aparecen esos números en término medio?
12. ¿Qué relación existe entre la combinatoria y la teoría de la probabilidad? ¿Por qué nos interesa saber cómo efectuar recuentos?
13. ¿En qué condiciones podemos emplear la regla de Laplace?
14. ¿Es útil la interpretación frecuencial de la probabilidad en todas las situaciones donde exista el azar? ¿Qué otras interpretaciones pueden darse a la probabilidad?
15. Estáis acostumbrados a que los conceptos matemáticos tengan cierta interpretación establecida que uno debe entender. Y, sin embargo, hay di-

versos modos de entender el significado de la probabilidad, todos válidos. ¿Qué opináis de esto? ¿Cuál de las interpretaciones de la probabilidad os parece más útil?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Armella, L. M. y G. Waldegg (1992), "Constructivismo y Educación Matemática", *Educación Matemática*, vol. 4, núm. 2, pp. 7-15.

Barragués, J. I. y J. Guisasola (2006), "La introducción de los conceptos relativos al azar y la probabilidad en libros de texto universitarios", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 24, núm. 2, pp. 242-256.

——— (2007*a*), "¿Qué son las secuencias aleatorias? Enseñanza de la probabilidad basada en la resolución de problemas", UNO: *Revista de didáctica de las matemáticas*, núm. 45, pp. 107-123.

——— (2007*b*), "Simulación por ordenador de experimentos aleatorios en la enseñanza de la probabilidad", *Sigma*, núm. 31, pp. 207-223.

Barragués, J. I., J. Guisasola y A. Morais (2005), "Concepciones de los estudiantes de primer ciclo de universidad sobre estimación de la probabilidad", *Educación Matemática*, vol. 17, núm. 1, pp. 55-85.

——— (2006), "Chance and probability: what do they mean to university engineering students?", *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, vol. 37, núm. 8, pp. 883-900.

——— (2007*a*), "Which event is more likely? Estimating probability by university engineering students", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 27, núm. 1, pp. 45-76.

Barragués, J. I., J. Guisasola, V. Gascón, A. Morais e I. Arrieta (2007*b*), "El ordenador en la enseñanza de la probabilidad en los estudios técnicos", *Cuadernos de Innovación en la Enseñanza Universitaria*, vol. 1, núm. 2, pp. 121-130.

Batanero, C. (2001), "Aleatoriedad, modelización, simulación", en *Actas de las X Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, Zaragoza, ICE, pp. 119-130.

Batanero, C. y C. Díaz (2007), "Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje", en *XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, Granada, Federación Española de Profesores de Enseñanza de las Matemáticas.

Batanero, C., V. Navarro-Pelayo y J. Godino (1997), "Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in Secondary School pupils", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 32, núm. 2, pp. 181-199.

Boero, C. D. y L. Parenti (1996), "Didactics of Mathematics and the Professional Knowledge of Teachers", en Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick y Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 1097-1121.

Borovcnik, M. y H. J. Bentz (1991), "Empirical Research in Understanding Probability", en Kapadia y Borovcnik (eds.), *Chance Encounters: Probability in education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 73-105.

Borovcnik, M., H. J. Bentz y R. Kapadia (1991), "A probabilistic perspective", en Kapadia y Borovcnik (eds.), *Chance Encounters: Probability in Education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 27-70.

Borovcnik, M. y R. Peard (1996), "Probability", en Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick y Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 239-287.

Campanario, J. M. (2002), "Asalto al Castillo: ¿A qué esperamos para abordar en serio la formación didáctica de los profesores universitarios de ciencias?", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 20, núm. 2, pp. 315-325.

Countinho, C. (2001), *Introduction aux situations aléatoires dés le collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnent informatique Cabri-géomètre-II*, Tesis Doctoral, Universidad de Grénoble.

De Guzmán, M. (1997), *Para pensar mejor*, Madrid, Pirámide.

De Jong, O. (1995), *Classroom Protocol Analysis: A Fruitful Method of Research in Science Education. European Research in Science Education II, Proceedings of the Second*, Tesis Doctoral, Grecia, Aristotle University of Thessaloniki.

Díaz, C. (2005), "Evaluación de la falacia de la conjunción en alumnos universitarios", *Suma*, núm. 48, pp. 45-50.

Ericsson, K. A. y H. A. Simon (1984), *Protocol Analysis: Verbal Reports as Data*, Cambridge, The MIT Press.

Estrada, A., C. Díaz e I. de la Fuente (2006), "Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios", en *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Universidad de Zaragoza.

Gardner, M. (1990), "La gran cara de piedra", en M. Gardner, *La nueva era*, Madrid, Alianza Editorial.

Godino, J. D., C. Batanero y M. J. Cañizares (1998), *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*, Madrid, Síntesis.

Grugnetti, L. y F. Jaquet (1996), "Senior Secondary School Practices", en Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick y Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Guershon, H. y J. Trgalová (1996), "Higher Mathematics Education", en Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick y Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Guisasola J. y J. I. Barragués (2002*a*), "Heurísticas y sesgos de los estudiantes de primer ciclo de universidad en la resolución de problemas de probabilidad", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 20, núm. 2, pp. 285-302.

——— (2002*b*), "Formas de razonamiento de los estudiantes en el cálculo de la probabilidad en cursos introductorios de estadística de primer ciclo de universidad", *Epsilon*, núm. 53, pp. 219-242.

Guisasola, J., C. Furió y M. Ceberio (2008), "Science Education based on developing guided research", en Thomase (ed.), *Science Education in Focus*, Hauppauge, NY, Nova Science Publisher.

Hirsch, L. S. y A. M. O'Donnell, (2001), "Representativeness in statistical reasoning: identifying and assessing misconceptions", *Journal of Statistics Education*, vol. 9, núm. 2.

Inzunsa, S. (2008), "Probability calculus and connections between cmpirical and theoretical distributions through computer simulation", Mexico, ICME 11.

Kahneman, D. y A. Tversky (1972), "Subjective probability: a judgment of representativeness", *Cognitive Psychology*, núm. 5, pp. 430-454.

Kahneman, D., P. Slovic y A. Tversky (1982), *Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases*, Nueva York, Cambridge University Press.

Kapadia, R. (1984), *Children's Intuitions and Conceptions of Probability*, Londres, Polytechnic of the South Bank.

Kapadia, R. y M. Borovcnik (1991), *Chance Encounters: Probability in Education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Kilpatrick, J. (1997), "Confronting reform", *The American Mathematical Monthly*, vol. 104, núm. 10, pp. 955-962.

Konold, C. (1991), "Understanding students' beliefs about probability", en Von Glasersfeld (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Leach, J. y P. Scott (2002), "The concept of learning demands as a tool for designing teaching sequences", *Studies in Science Education*, núm. 38, pp. 115-142.

Lecoutre, M. P. (1985), "Effet d"informations de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur les jugements probabilistes", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 6, núm. 2, pp. 193-213.

——— (1992), "Cognitive models and problem spaces in purely random situations", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 23, núm. 6, pp. 557-568.

Lecoutre, M. P. y J. L. Durand (1988), "Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 19, núm. 3, pp. 357-368.

Leitzel, J. R. C. (1991), *A Call for Change: Recommendations for the Mathematical Preparation of Teachers of Mathematics,* Washington, MAA Report.

National Research Council (1995), *National Standards for Science Education,* Washington, National Academy Press.

National Council of Teachers of Mathematics (2000), *Principles and Standards for School Mathematics,* consultado en http://standards.nctm.org el 20 de julio de 2008.

Niss, M. (1996), Goals of mathematical teaching, en Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick y Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education,* Dordrech, Kluwer Academic Publishers.

OCDE (2006), *PISA 2006. Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en ciencias, matemáticas y lectura,* París, OCDE.

Osuna, L., J. Martínez-Torregrosa, J. Carrascosa y R. Verdú (2007), "Planificando la enseñanza problematizada: el ejemplo de la óptica geométrica en educación secundaria", *Enseñanza de las Ciencias,* vol. 25, núm. 2, pp. 277-294.

Paulos, J. A. (1998), "Probabilidad", en J. A. Paulos, *Más allá de los números,* Barcelona, Tusquets, pp. 211-215.

Romberg, T. H. A. (1993), "Cómo uno aprende: modelos y teorías del aprendizaje de las matemáticas", *Sigma,* núm. 15, pp. 3-17.

Roth, W. M. (1995), *Authentic School Science,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Sáenz, C. (1998), "Teaching probability for conceptual change", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 35, núm. 3, pp. 233-254.

Schoenfeld, A. H. (1987), *Cognitive Science and Mathematics Education,* EUA, Lawrence Erlbaum Associates.

Scholz, R. W. (1991), "Psychological research in probabilistic understanding", en Kapadia y Borovcnik (eds.), *Chance Encounters: Probability in Education,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Serrano, L., C. Batanero y J. J. Ortiz (1996), "Interpretación de enunciados de

probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato", *Suma*, núm. 22, pp. 43-49.
Serrano, L., C. Batanero y M. J. Cañizares (1999), "Concepciones sobre distribuciones aleatorias planas en alumnos de secundaria", *Epsilon*, pp. 43-44, 149-162.
Serrano, L., C. Batanero, J. J. Ortiz y M. J. Cañizares (1998), "Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria", *Educación Matemática*, vol. 10, núm. 1, pp. 7-25.
——— (2001), "Concepciones de los alumnos de secundaria sobre modelos probabilísticos en las secuencias de resultados aleatorios", *Suma*, núm. 36, pp. 23-32.
Sierpinska, A. y S. Lerman (1996), "Epistemologies of mathematics and of mathematics education", en Bishop *et al.* (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.
Sierra, R. (1995), *Técnicas de investigación social. Teoría y ejercicios*, Madrid, Paraninfo.
Solow, A. (1993), *Learning by Discovery*, MAA notes, vol. 27, Washington, MAA.
Stewart, I. (1998), "Una ramera llamada fortuna", en I. Stewart, *De aquí al infinito*, Barcelona, Drakontos.
Viedma, J. A. (1990), *Exposición intuitiva y problemas resueltos de métodos estadísticos*, Madrid, Ediciones del Castillo.

DATOS DE LOS AUTORES

José Ignacio Barragués Fuentes
Universidad del País Vasco (UPV/EHU),
Escuela Universitaria Politécnica de San Sebastián,
Departamento de Matemática Aplicada, San Sebastián, España
mapbafuj@sp.ehu.es

Jenaro Guisasola Aranzabal
Universidad del País Vasco (UPV/EHU),
Escuela Universitaria Politécnica de San Sebastián,
Departamento de Física Aplicada I, San Sebastián, España
wupguarj@sp.ehu.es