Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Pérez Juárez, Ángel
Rectas perpendiculares
Educación Matemática, vol. 22, núm. 3, abril, 2010, pp. 143-148
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

NOTA DE CLASE

Rectas perpendiculares

Ángel Pérez Juárez

Resumen: Se demuestra la condición de ortogonalidad entre dos rectas sin usar funciones trigonométricas. La alternativa es plantear una ecuación de segundo grado y recurrir a las propiedades de estas ecuaciones, tales como la relación entre el número de soluciones y el signo del discriminante de la ecuación cuadrática. Esta manera de resolver el problema de ortogonalidad entre rectas nos muestra, de paso, la utilidad de algunas propiedades de un polinomio cuadrático.

Perpendicular lines

Abstract: A proof of the orthogonality condition between two lines without using trigonometric functions is presented. The alternative proof consists in developing a second degree equation and working with quadratic equations properties, such as the relationship between the number of solutions and the discriminant sign. This approach shows as well the usefulness of some of the properties of a quadratic polynomial.

La motivación para buscar una prueba de la ortogonalidad entre rectas sin usar trigonometría es que, en los cursos de álgebra elemental que he impartido, si bien se incluye en el temario la revisión de algunos conceptos de trigonometría, este tema viene al final del curso, mientras que la condición de ortogonalidad se suele utilizar antes, en el tema de línea recta.

En textos elementales que incluyen trigonometría, como en Zill o en Corral, se prueba la identidad de la tangente de una diferencia de ángulos y, a partir de ahí, es relativamente simple probar la condición de rectas perpendiculares, que no es la herramienta que se utiliza aquí.

Existe una condición bien conocida de perpendicularidad entre dos rectas, que es: dos rectas, con pendiente diferente de cero, son ortogonales si y sólo si el producto de sus pendientes es -1.

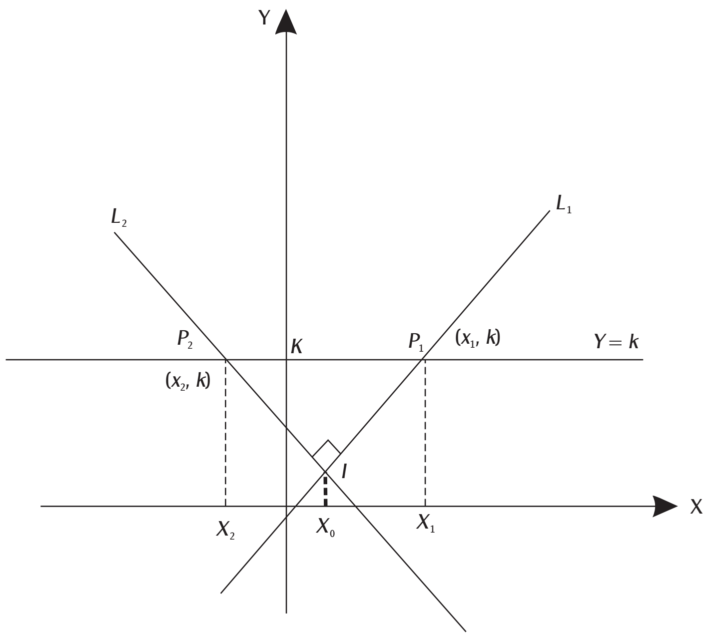
Fecha de recepción: 26 de noviembre de 2010.

Suponiendo que las rectas son ortogonales, se va a demostrar que $m_1m_2 = -1$.
Sean las rectas con ecuaciones

$$L_1\text{: } y = m_{1x} \neq b_1$$

$$L_2\text{: } y = m_2x \neq b_2$$

con $m_1m_2 \neq 0$.



Como las rectas no son paralelas, existe un punto de intersección entre ellas que denotamos con $I(x_0, y_0)$. Consideremos una recta horizontal que no pasa por el punto I. Sin perder generalidad, supongamos que la ecuación de esta recta horizontal es H: $y = k$ con $k \neq y_0$. Esta recta H interseca las rectas L_1 *y* L_2 en los puntos P_1 *y* P_2, respectivamente, y sus coordenadas son $P_1(x_1, k)$ *y* $P_1(x_2, k)$ por estar en la recta horizontal H.

El triángulo P_1P_2I es rectángulo y, por tanto, podemos aplicar el teorema de Pitágoras, donde la hipotenusa es el segmento P_1P_2 y los catetos son P_1I y P_2I.

Estos tres lados satisfacen la relación

$$(P_1I)^2 + (P_2I)^2 = (P_1\ P_2)^2 \tag{1}$$

Si utilizamos la fórmula de la distancia entre dos puntos para cada uno de estos segmentos, se tiene

$$(P_1I)^2 = (x_1 - x_0)^2 + (k - y_0)^2$$

$$(P_2I)^2 = (x_2 - x_0)^2 + (k - y_0)^2$$

$$P_1\ P_2 = (x_2 - x_1)$$

sustituyendo estas expresiones en (1)

$$(x_1 - x_0)^2 + (k - y_0)^2 + (x_2 - x_0)^2 + (k - y_0)^2 = (x_2 - x_1)^2 \tag{2}$$

Con las coordenadas de los puntos P_1 e I podemos escribir

$$m_1 = \frac{k - y_0}{x_1 - x_0} \text{ entonces}$$

$$k - y_0 = m_1(x_1 - x_0) \tag{3}$$

$$m_2 = \frac{k - y_0}{x_2 - x_0}, \text{ de donde } k - y_0 = m_2(x_2 - x_0) \tag{4}$$

Sustituimos estas dos expresiones en (2).
Ahora sumamos $x_0 - x_0$ en el paréntesis del lado derecho

$$\begin{aligned}&(x_1 - x_0)^2\ m_1^2(x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_0)^2 + \\ &m_2^2(x_2 - x_0)^2 = (x_2 - x_0 + x_0 - x_1)^2\end{aligned} \tag{5}$$

Desarrollando el lado derecho, lo podemos escribir en la forma

$$(x_2 - x_0 + x_0 - x_1)^2 = (x_2 - x_0)^2 + (x_1 - x_0)^2 - 2(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)$$

La ecuación (5) queda como

$$\begin{aligned}&(x_1 - x_0)^2 + m_1^2(x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_0)^2 + m_2^2(x_2 - x_0)^2\\&= (x_2 - x_0)^2 + (x_1 - x_0)^2 - 2(x_2 - x_o)(x_1 - x_o)\end{aligned}$$

En esta ecuación se cancelan los términos $(x_2 - x_0)^2$ y $(x_1 - x_0)^2$ que aparecen en ambos lados de la ecuación. Se tiene entonces

$$(x_1 - x_0)^2\ m_1^2 + (x_2 - x_0)^2\ m_2^2 = -2(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)$$

Las cantidades $(x_2 - x_0)$ y $(x_1 - x_0)$ no son cero, ya que los puntos P_1 *y* P_2 están necesariamente a la izquierda y a la derecha del punto de intersección de las rectas. Si dividimos entre $(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)$ la última ecuación

$$\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} m_1^2 + \frac{x_2 - x_0}{x_0 - x_1} m_2^2 = 2$$

Definimos la cantidad ξ como

$$\xi = \frac{x_2 - x_0}{x_0 - x_1}$$

con lo que

$$\frac{1}{\xi} m_1^2 + \xi m_2^2 = 2$$

Si multiplicamos por ξ e igualamos a cero

$$\xi^2 m_2^2 - 2\xi + m_1^2 = 0 \tag{6}$$

Ya se dijo anteriormente que ninguna de las rectas L_1 y L_2 tienen pendiente cero y, como son rectas perpendiculares, ninguna de ellas es vertical. Por tanto, ninguno de los puntos P_1 *y* P_2 tiene su primera coordenada igual a x_0. De la geometría elemental sabemos que, por ser no paralelas, las rectas L_1 y L_2 se intersecan en un solo punto, *i.e.* x_0 es único. Una vez que se escogen los puntos P_1 *y* P_2 y con x_0 único, se tiene que el valor de ξ también lo es. La ecuación (6), que es de segundo grado en ξ, tiene solución única, pues proviene de la condición de las dos rectas no paralelas. Luego, el discriminante de esta ecuación debe ser cero

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4m_2^2 m_1^2 = 0$$

y de aquí se sigue de inmediato que

$$m_1 m_2 = \pm 1$$

La solución de la ecuación cuadrática para ξ es

$$\xi = \frac{2}{2m_2^2} = \frac{1}{m_2^2} > 0$$

De la definición de ξ tenemos que $(x_2 - x_0)$ y $(x_0 - x_1)$ son de igual signo; con $(x_2 - x_0) < 0$, se tiene que $(x_0 - x_1) < 0$. Antes dijimos que $k > y_0$, *i.e.* $k - y_0 > 0$ y, con estos signos en las pendientes (3) y (4), tenemos que $m_1 < 0$ y $m_2 > 0$.

Conclusión: $m_1 m_2 = -1$

De los detalles de esta demostración, podemos apreciar la relevancia de las propiedades de un polinomio cuadrático y de la fórmula general para resolver una ecuación cuadrática. Se ha utilizado la relación que hay entre el signo del discriminante de una ecuación de segundo grado y el tipo de solución de esa ecuación.

En el texto de Zill se propone la demostración como un ejercicio para el lector.

En el libro de Stewart se resuelve el mismo problema que propone Zill, pero se hace con la restricción de que las rectas pasan por el origen, lo que no le quita generalidad a la demostración.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Corral, M., *Trigonometry*, GNU free documentation, http://www.mecmath.net/trig.

Stewart, J., L. Redlin y S. Watson, *Precalculus. Mathematics for Calculus*, 4a. ed., Brooks/Cole, Thomson Learning.

Zill, D. G., *Precálculo, con avances de cálculo*, 4a. ed., McGraw-Hill.

DATOS DEL AUTOR

Ángel Pérez Juárez
Universidad Autónoma de la Ciudad de México, México
angel5969@gmail.com