



Análisis Económico

ISSN: 0185-3937

analeco@correo.azc.uam.mx

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad

Azcapotzalco

México

López Herrera, Francisco; Venegas-Martínez, Francisco; Sánchez Daza, Alfredo  
Memoria larga de la volatilidad de los rendimientos del mercado mexicano de capitales  
Análisis Económico, vol. XXIV, núm. 56, 2009, pp. 129-146  
Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco  
Distrito Federal, México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=41312223006>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

# Memoria larga de la volatilidad de los rendimientos del mercado mexicano de capitales

*(Recibido: enero/09–aprobado: mayo/09)*

*Francisco López Herrera*<sup>\*</sup>  
*Francisco Venegas-Martínez*<sup>\*\*</sup>  
*Alfredo Sánchez Daza*<sup>\*\*\*</sup>

## **Resumen**

El presente trabajo proporciona un análisis sobre la volatilidad de memoria larga de los rendimientos del principal indicador del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores. Mediante varias pruebas semiparamétricas se examina la existencia de memoria larga en la volatilidad de los rendimientos del IPC. La evidencia empírica, con base en parametrizaciones del tipo ARFI-GARCH, sugiere la existencia de volatilidad de memoria larga.

**Palabras clave:** volatilidad de memoria larga, GARCH integrados fraccionariamente, modelado de series financieras.

**JEL Clasificación:** C22, G11, G12.

<sup>\*</sup> Profesor-Investigador de la División de Investigación de la FCA–UNAM.

<sup>\*\*</sup> Profesor-Investigador de la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESE-IPN (fvenegas1111@yahoo.com.mx).

<sup>\*\*\*</sup> Profesor-Investigador del Departamento de Economía de la UAM–Azcapotzalco.

## Introducción

La existencia de memoria larga en la volatilidad de los rendimientos de acciones e índices accionarios en los mercados emergentes tiene implicaciones importantes para la toma de decisiones de los inversionistas institucionales en la integración de sus portafolios y coberturas. En los países desarrollados los efectos de memoria larga en los indicadores accionarios son igualmente importantes en virtud de que tienen un impacto sobre el entorno bursátil y de negocios en el mediano y largo plazos.

Recientemente, los procesos denominados de memoria larga han recibido especial atención en la literatura econométrica y financiera ya que la existencia de dependencia de largo plazo en los rendimientos de los activos tiene consecuencias trascendentales en el valor futuro de un portafolio y en sus estrategias de cobertura. Esta existencia puede anular la hipótesis de mercados eficientes e incluso invalidar el uso de modelos de valuación de subyacentes, derivados y notas estructuradas que involucran al movimiento browniano, la caminata aleatoria y, en general, a los procesos martingala.

Las primeras pruebas sobre la existencia de memoria larga en la volatilidad de una variable se basaron en el estadístico  $R/S$ , prueba propuesta inicialmente por Hurst (1951) y posteriormente reconsiderada por Mandelbrot y Wallis (1969). Mandelbrot (1971) sugiere que esta prueba se aplique en el análisis de la dependencia de largo plazo en las series económicas y financieras. Siguiendo este enfoque, los resultados de Mandelbrot (1971) y Greene y Fielitz (1977) reportan evidencia de memoria larga en la volatilidad de los rendimientos de acciones comunes. Otros estudios han obtenido resultados similares, entre ellos: Peters (1992), Goetzmann (1993) y Mills (1993). Sin embargo, Crato (1994) estudió los índices accionarios de los países del G-7 mediante el modelo ARFIMA, sólo encontró evidencia en el caso de Alemania.

Por otra parte, Lo (1991) muestra que la prueba estadística  $R/S$  es débil e incapaz de distinguir entre memoria larga y memoria corta; no encuentra evidencia de que los rendimientos accionarios diarios exhiban efectos de memoria larga al modificar la prueba  $R/S$  para tomar en cuenta los efectos de la dependencia de corto plazo en los datos. Por su parte, Jacobsen (1996), con base en el estadístico  $R/S$  modificado por Lo, concluye que los índices accionarios de Holanda, Alemania, RU, Italia, Francia, EUA y Japón no exhiben efectos de memoria larga en la volatilidad. Como es de esperarse, la prueba propuesta por Lo (1991) no está exenta de críticas; por supuesto, se reconoce que es una mejora en comparación con el estadístico  $R/S$  clásico por su robustez en presencia de dependencia de corto plazo. No obstante, Willinger, Taqqu y Teverovsky (1999) y Taqqu, Teverovsky y Willinger (1999)

muestran que la prueba de Lo (1991) está sesgada al rechazo de dependencia de largo plazo aunque en los datos ésta sea el único tipo de dependencia presente, razón por lo cual recomiendan que para detectar efectos de memoria larga se recurra a diversas pruebas. Los resultados del análisis de Willinger, Taqqu y Teverovsky (1999), aunque no conclusivos, sugieren la presencia de efectos de memoria larga en la volatilidad de los rendimientos diarios de acciones estadounidenses.

El interés por estudiar la presencia de efectos de memoria larga en la volatilidad de los activos financieros también ha generado varias extensiones debido a las implicaciones que puede tener en la administración de riesgos de mercado. Al respecto, Ding, Granger y Engle (1993) encuentran fuertes autocorrelaciones en las series de cuadrados y valores absolutos de los rendimientos del índice SP&500. Motivados por esos resultados, Baillie, Bollerslev y Mikkelsen (1996) proponen el modelo GARCH integrado fraccionariamente (FIGARCH) mostrando que, en comparación con los modelos ARCH y GARCH convencionales, es posible mejorar el modelado de la dinámica de largo plazo de la volatilidad si se incluye un parámetro de memoria larga. Tse (1998) analiza el tipo de cambio yen-dólar y extiende el modelo *Asymmetric Power*-ARCH (APARCH) de Ding, Granger y Engle (1993) al caso del FIAPARCH lo cual permite estimar el parámetro de memoria larga en la volatilidad y el parámetro de asimetría o efecto apalancamiento que se ha encontrado empíricamente significativo en diversos estudios.<sup>1</sup> De acuerdo con Davidson (2003) la memoria y la amplitud son dos características distintas: la memoria indica cuanto tiempo tarda un *shock* en ser absorbido y la amplitud indica su dimensión en la varianza condicionada. Esta última determina la existencia de los momentos superiores en su distribución de probabilidad, lo cual implica estacionariedad en covarianza. Davidson también muestra que la característica de memoria es totalmente ajena a la cuestión relacionada con la estacionariedad en covarianza, lo cual explica por qué tanto un modelo de memoria corta (IGARCH) como uno de memoria larga (FIGARCH) son no estacionarios.

Asimismo, se ha obtenido evidencia empírica que sugiere la existencia de memoria larga en diferentes mercados. El estudio de Quan, Ito y Voges (2008) sugiere presencia de memoria larga en la volatilidad del mercado accionario chino. Los resultados de Conrad (2007) utilizan especificaciones FIGARCH e HYGARCH y muestran efectos significativos de memoria larga en la volatilidad de la Bolsa de Valores de Nueva York. Similarmente, Wen (2008) encuentra la presencia de memoria

<sup>1</sup> En el IPC también se ha encontrado evidencia significativa sobre el efecto apalancamiento, véase por ejemplo Hernández, Morales y Rodríguez (2007) y López (2004). López y Vázquez (2002) encuentran efectos asimétricos en el caso de acciones mexicanas.

larga cuando estudia el comportamiento de la volatilidad de la bolsa de Malasia. De la misma manera, Islas y Venegas-Martínez (2003), mediante un modelo de volatilidad estocástica, detectan la presencia de memoria larga en la volatilidad del IPC y muestran los efectos negativos que puede tener para la cobertura con opciones europeas de compra. Por último, Venegas-Martínez e Islas (2005) examinan también varios mercados accionarios encontrando evidencia de memoria larga en las volatilidades de los índices bursátiles de Argentina, Brasil, Chile, México y EUA.

Por otro lado, la investigación en el tema de memoria larga de la volatilidad se ha extendido también en relación con el desempeño de los GARCH integrados fraccionalmente. Según Níguez y Rubia (2006), el HYGARCH supera claramente el desempeño de variantes GARCH más simples para pronosticar la volatilidad de un portafolio de cinco tipos de cambio, revelando que el modelado correcto del componente de largo plazo de la volatilidad es importante incluso si el interés radica en el pronóstico de la volatilidad a corto plazo. Asimismo, Tang y Shieh (2006) encuentran que el HYGARCH supera al FIGARCH en el pronóstico del valor en riesgo de tres futuros de índices accionarios estacionarios (de acuerdo con las pruebas de razón de verosimilitud propuestas por Kupiec, 1995).

Karanasos, Sekioua y Zeng (2006) mediante modelos ARFIMA-APARCH detectan efectos de memoria larga en las tasas reales de interés estadounidenses y en su volatilidad. Estos resultados también podrían ser importantes para la teoría del mercado de capitales, pues el modelo de valuación de activos de capital con base en el consumo implica que las series temporales de la tasa de crecimiento del consumo y de la tasa de interés real deben tener características similares; no obstante, Rapach y Wohar (2004) encuentran persistencia muy moderada en la tasa de crecimiento del consumo real en EUA aunque un tanto más persistente en el caso de otros países industrializados.

En esta investigación se presenta un marco teórico que conjunta y ordena sistemáticamente varios modelos disponibles en la literatura especializada para analizar la presencia de volatilidad de memoria larga. Para tal fin se consideran modelos de dos tipos: semiparamétricos en el dominio de la frecuencia y de series de tiempo. El objetivo principal del presente trabajo consiste en examinar el comportamiento de los rendimientos del IPC y de su volatilidad. El estudio considera los rendimientos diarios del IPC durante el periodo 1983-2007. Las características distintivas de esta investigación son: 1) evalúa la pertinencia de modelar el proceso de los rendimientos diarios del IPC considerando los efectos de volatilidad de memoria larga mediante diferentes enfoques propuestos en la literatura especializada; 2) selecciona los modelos semiparamétricos y de series de tiempo más adecuados para describir la dinámica de memoria larga de dichos rendimientos; y 3) propor-

ciona una discusión sobre las posibles causas por las cuales la serie de rendimientos diarios del IPC presenta de efectos de memoria larga.

El artículo está organizado de la siguiente manera. La siguiente sección presenta, de manera general, el modelado y las pruebas estadísticas para la estimación de los efectos de memoria larga. En el segundo apartado se muestran y discuten los resultados del análisis empírico de la volatilidad de los rendimientos diarios del IPC durante el periodo 1983-2007. Por último, se ofrecen las conclusiones, así como las limitaciones y sugerencias para futuras investigaciones.

## 1. Memoria larga y su estimación

Las series de datos con memoria larga se caracterizan por correlaciones altas entre observaciones distantes en el tiempo con un decaimiento hiperbólico y no geométrico (exponencial) como en el caso de los modelos ARMA estacionarios. La función de autocorrelación  $\gamma(k)$  de una serie estacionaria, para la cual  $d < 0.5$ , con memoria larga se comporta asintóticamente como  $\gamma(k) \sim ck^{2d-1}$ , cuando  $k \rightarrow \infty$ . En este caso,  $d$  mide el grado de intensidad de la memoria larga. Existen varios métodos para estimar dicho parámetro y se describen a continuación.

### 1.1 Métodos semiparamétricos

Los métodos semiparamétricos en el dominio de la frecuencia para estimar el parámetro de memoria larga se basan en el supuesto de que el espectro del proceso tiene la forma:

$$f(\omega) = (|1 - e^{-i\omega}|^{-2d}) f^*(\omega)$$

Donde:

$f^*$  = componente de corto plazo en la relación de dependencia suponiéndose que es una función suave en la vecindad del origen y;

$$f^{*'}(0) = 0$$

De forma alternativa:

$$f(\omega) = \omega^{-2d} g(\omega)$$

Donde:

$g$  es también una función suave en el origen; y

$$g'(0) = 0.$$

Por otro lado, Geweke y Porter-Hudak (1983) proponen un método, en lo sucesivo GPH, para la estimación del parámetro de memoria larga  $d$  mediante la regresión:

$$\log \left( \sum_{j=1}^J I(\omega_{k+k-j}) \right) = c + d \left( -2 \log \sin \left( \frac{\omega_k}{2} \right) \right) + U_k^{(J)}, \quad k=L+J, L+2J, \dots, M \quad (1)$$

Donde:

$$I(\omega_j) = j\text{-ésimo punto del periodograma; y}$$

$$\omega_j = 2\pi j/T.$$

El valor de  $J$  es fijo y  $L$  y  $M$  deben divergir con el tamaño de la muestra. Asimismo, el estimador local gaussiano de Whittle () consiste en maximizar la función:

$$L_t(d) = 2d \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \log \omega_j - \log \left( \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \omega_j^{2d} I(\omega_j) \right) \quad (2)$$

Por último, Moulines y Soulier (1999) proponen el método del log-periodograma de banda ancha, fijando  $M = T/2$ , modelando  $\log(f^*)$  mediante una expansión de Fourier de orden finito, se agrega a la regresión términos de la forma  $\cos(j\omega_k)$ ,  $j = 1, \dots, P$ , donde el número de términos  $P$  debe divergir con la muestra pero se debe mantener la condición  $P/T \rightarrow 0$ .

### 1.2 Modelos de series de tiempo

Los modelos ARFIMA permiten extender el análisis de las series de tiempo al caso de integración fraccionaria, abandonando el paradigma de raíz unitaria el cual implica no estacionariedad y varianza creciente (explosiva) en función del tiempo. Las propiedades del proceso ARFIMA se han derivado independientemente por Granger (1980), Granger y Joyeux (1980) y Hosking (1981). Siguiendo a Hosking (1981), mediante el operador de rezagos  $L^k x_t = x_{t-k}$  se puede obtener la representación de la forma genérica de un proceso integrado de orden  $d$ . Así, el proceso  $AR(p)$  integrado fraccionalmente se puede denotar por:

$$\phi(L)(1-L)^d y_t = \varepsilon_t, \quad \phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_k L^k, \quad \varepsilon_t \approx \text{idd}(0, \sigma^2) \quad (3)$$

De acuerdo con Lombardi y Gallo (2005) si se trata a  $L$  como un escalador, al expandir  $(1-L)^d$  como serie de McLaurin se obtiene:

$$(1-L)^d = \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} (-L)^k = 1 - dL - \frac{1}{2} d(d-1)L^2 + \frac{1}{6} d(d-1)(2-d)L^3 + \dots \quad (4)$$

Donde:

$d$  puede tomar un valor no entero.

Dado que la función factorial está definida sólo para los números naturales, es necesario redefinir los coeficientes binomiales utilizando la función gamma  $\Gamma$ :

$$\binom{d}{k} = \frac{d!}{k!(d-k)!} = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)} \quad (5)$$

Recurriendo nuevamente a la expansión como serie de McLaurin se tiene:

$$(1-L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)} (-L)^k \quad (6)$$

Si  $d$  puede tomar valores entre cero y uno, el proceso  $y_t = (1-L)^d \varepsilon_t$  recibe el nombre de ruido blanco fraccionario. Volviendo al caso en que  $d$  es un número natural y expandiendo  $(1-L)^d$  de acuerdo con (4), se obtiene la serie de coeficientes de  $L^k$ :

$$\psi_k = \binom{k+d-1}{k} \quad (7)$$

o en notación recursiva:

$$\psi_k = \psi_{k-1} \binom{k+d-1}{k} \quad \text{con } \psi_0 = 1 \quad (8)$$

En el caso del ruido blanco fraccionario, utilizando también la función, (6) se puede escribir como:

$$\psi_k = \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d)} \quad (7.1)$$

Mediante la aproximación de Stirling se obtiene:

$$\psi_k = \frac{k^{d-1}}{\Gamma(d)} \quad (8.1)$$

La representación  $MA(\infty)$  para un proceso genérico es  $y_t = \psi(L)\varepsilon_t$ , con lo cual se puede decir que  $\{y_t\}$  se define como ARFIMA  $(p, d, q)$  si su proceso generador de datos es:

$$\phi(L) = (1-L)^d y_t = \psi(L)\varepsilon_t \quad (9)$$

Donde:

$\varepsilon_t$  se distribuye como un ruido blanco.

Este proceso goza de las mismas propiedades asintóticas del ruido blanco fraccionario puesto que sólo se diferencian por la dependencia de un breve periodo. Al respecto, Hosking (1981) demostró que  $\{y_t\}$  es un proceso estacionario si  $d < 0.5$  e incluso invertible si  $d > -0.5$ , existiendo límites finitos tanto para su función de densidad espectral como para sus auto correlaciones.

Por otro lado, Robinson (1991) sugiere una extensión del modelo GARCH para producir memoria larga en los cuadrados de una serie de rendimientos y Baillie, Bollerslev y Mikkelsen (1996) concretaron esta idea con el modelo FIGARCH. En el modelo GARCH( $p, q$ ) la varianza condicional de la serie  $\sigma_t^2$  es una función lineal de su pasado y de las observaciones pasadas de una serie  $y_t$  de la siguiente forma:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 - \alpha_1(L)y_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2$$

Donde:

$$\alpha(L) = \sum_{i=1}^q \alpha_i L^i;$$
$$\beta(L) = \sum_{j=1}^p \beta_j L^j;$$

$$q > 0, p \geq 0, \sigma_0 > 0;$$

$$\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, 1; \text{ y}$$

$$\beta_j \geq 0, j = 1, \dots, p.$$

El GARCH así definido puede verse como un proceso ARMA para la serie de los cuadrados, de la forma:

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)] y_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L)] u_t$$

Donde:

$$u_t \text{ es un ruido blanco definido mediante } u_t = y_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2 - (\varepsilon_t^2 - 1).$$

De esta manera, el modelo FIGARCH es una extensión del modelo anterior que incluye el operador de diferencias fraccionales  $(1 - L)^d$  en la parte autorregresiva de la última ecuación, de tal forma que el modelo resultante puede reescribirse como un proceso ARFIMA de la serie de los cuadrados:

$$\phi(L) = (1 - L)^d y_t^2 = \sigma_0 + [1 - \beta(L)] u_t$$

Donde:

$d =$  número real tal que  $0 \leq d \leq 1$ ; y  
todas las raíces de los polinomios  $\phi(L)$  y  $1 - \beta(L)$  están fuera del círculo unitario.

Alternativamente, la ecuación de la varianza condicionada en el FIGARCH puede escribirse como:

$$\sigma_t^2 = [1 - \beta(1)]^{-1} \alpha_0 + [1 - [1 - \beta(L)]]^{-1} \phi(L) (1 - L)^d y_t^2$$

Al permitir órdenes de integración fraccional, el proceso FIGARCH proporciona una gran flexibilidad en el modelado de la dependencia temporal de la varianza condicional, e incluye como casos particulares el GARCH ( $d = 0$ ) y el IGARCH ( $D = 1$ ). Para que el FIGARCH esté bien definido y se garantice la no negatividad de la varianza, los parámetros del modelo deben cumplir varias restricciones que, salvo en casos muy concretos, no son fáciles de establecer, lo cual es una limitación seria en la estimación del modelo. Con respecto a las condiciones de estacionariedad, el FIGARCH sólo es débilmente estacionario cuando  $d = 0$ , en cuyo caso se reduce al

GARCH estándar. No obstante, Baillie, Bollerslev y Mikkelsen (1996) argumentan que el modelo es estrictamente estacionario y ergódico, de la misma forma que lo es el IGARCH.

Ahora bien, si se considera un proceso en que la volatilidad cambia en el tiempo de acuerdo con:

$$\varepsilon_t = h_t^{1/2} \zeta_t, \quad \zeta_t \approx \text{iid}(0,1)$$

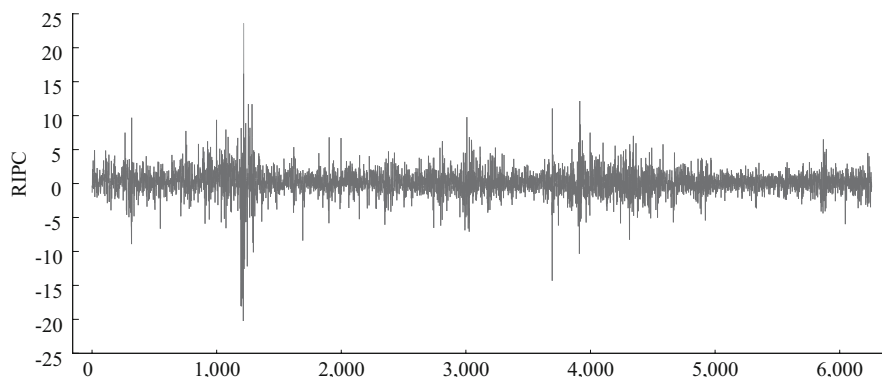
$$\beta(L)(h_t^{\eta/2} - \omega) = \{\beta(L) - \delta(L)[1 + \alpha((1-L)^{d_\sigma} - 1)]\} (|\varepsilon_t| + \lambda |\varepsilon_t|)^{\eta}$$

Entonces, se puede obtener una representación bastante general de un modelo de la familia GARCH, denominado ARCH potencial hiperbólico asimétrico o HYAPARCH ( $p, d_\sigma, q$ ), donde  $B(L)$  y  $\delta(L)$  son polinomios que capturan, respectivamente, la dinámica de corto plazo de las volatilidades pasadas y de los errores de valoración en el proceso de la ecuación de la media. El parámetro  $d_\sigma$  corresponde al parámetro de memoria larga en el proceso de la volatilidad, siendo semejante por tanto su interpretación a la del modelo ARFIMA. Si el parámetro del “apalancamiento”  $\lambda$  es mayor a cero las contribuciones de las rendimientos (errores) negativos a la volatilidad son mayores que cuando son positivos. Si  $\eta$  se considera un parámetro libre y es positivo se tiene el modelo APARCH, los modelos FIGARCH (simétrico) o FIGARCH (asimétrico) establecen como restricción  $\eta = 2$ . El parámetro de amplitud está representado por  $\alpha$ , caracterizando un proceso estacionario cuando  $0 < \alpha < 1$ ; pero si es igual en valor a 1 se obtiene el FIGARCH, caso que caracteriza un proceso no estacionario al igual que si dicho valor es superior a la unidad.

## 2. Análisis empírico del mercado accionario mexicano

En el análisis econométrico que a continuación se presenta se tomaron observaciones diarias del IPC desde el primer día en que arrancó este índice de mercado en 1983 hasta el último día de operaciones de 2007. Posteriormente se estimaron los log-rendimientos y sus cuadrados como *proxy* de la volatilidad, obteniéndose un total de 6,256 observaciones de cada serie. En la Gráfica 1 se presentan los rendimientos del IPC y en el Cuadro 1 se muestran sus principales características estadísticas.

**Gráfica 1**  
**Rendimientos del IPC, 1983-2007**



**Cuadro 1**  
**Estadísticas principales del IPC**

<i>Media</i>	<i>Desviación estándar</i>	<i>Asimetría</i>	<i>Curtosis</i>	<i>Normalidad</i>
0.170914	1.87416	-0.516637	19.6744	72752.79* (<0.01)

\* Estadístico Jarque-Bera, valor  $p$  en paréntesis.

Las estimaciones que se presentan a continuación se realizaron con el paquete *TSMMod V4.24*.<sup>2</sup> En el Cuadro 2 se presentan los resultados de la estimación del parámetro de memoria larga  $d$  para los log-rendimientos y para sus cuadrados, mediante los métodos semiparamétricos enunciados en la sección 1.1. Con respecto a la selección de  $M$ , el número de ordenadas del periodograma es importante pues la estimación de  $d$  es sensible a dicha elección, pero es un problema de carácter práctico porque no hay guías simples para seleccionar sus valores. Geweke y Por-

<sup>2</sup> Para correr este paquete, desarrollado por James Davidson, se requiere de *Ox 4.10*, programa que es gratuito para uso académico, véase Doornik (2002) y Doornik y Ooms (2003).

ter-Hudak sugieren un ancho de banda  $M = T^\nu$  con  $\nu = 0.5$ , donde  $T$  es el tamaño de la muestra. Sin embargo, Sowell (1992) argumenta que cuando se selecciona  $M$  se debería considerar el ciclo más corto asociado con el comportamiento de largo plazo. Hurvich, Deo y Brodsky (1998) muestran que la  $M$  óptima que minimiza el error cuadrático medio asintótico es del orden de  $T^{0.8}$  y probaron con esta regla la normalidad asintótica del parámetro de memoria larga estimado mediante el GPH. Kim y Phillips (2000) sugieren que  $0.7 < \nu < 0.8$  es deseable. En el caso del método del propuesto por Moulines y Soulier se tiene que dado que  $P$  depende de la forma de  $\log(f^*)$ , no es fácil la selección de su valor. Por lo anterior, en este análisis únicamente se consideran en la expansión de Fourier de uno hasta seis términos.

**Cuadro 2**  
**Estimaciones semiparamétricas de  $d^a$**

Variable	GPH			Whittle Local		
	$M=T^{0.7}$	$M=T^{0.75}$	$M=T^{0.8}$	$M=T^{0.7}$	$M=T^{0.75}$	$M=T^{0.8}$
RIPC						
RIPC <sup>2</sup>	0.36585 < (0.01)	0.34726 < (0.01)	0.35169 < (0.01)	0.33054 < (0.01)	0.30644 < (0.01)	0.32173 < (0.01)
	<i>Moulines-Soulier</i>					
	<i>Número de términos de Fourier <math>\cos(j\omega_k), j=1, \dots, P</math></i>					
	$P = 1$	$P = 2$	$P = 3$	$P = 4$	$P = 5$	$P = 6$
RIPC	0.15814 < (0.01)	0.03021 (0.092)	0.02768 (0.225)	0.11352 < (0.01)	0.17734 < (0.01)	0.20804 < (0.01)
RIPC <sup>2</sup>	0.34426 < (0.01)	0.30291 < (0.01)	0.3175 < (0.01)	0.40876 < (0.01)	0.35492 < (0.01)	0.45947 < (0.01)

<sup>a</sup> Valores  $p$  entre paréntesis.

En los resultados del Cuadro 2 se puede ver que de acuerdo con la regresión del GPH y el estimador local de Whittle, considerando tres tamaños de banda en cada caso, existe evidencia de memoria larga tanto para los niveles de los rendimientos del IPC como para sus cuadrados, en todos los casos inclusive con un nivel de confianza de 99%. Sin embargo, es de hacerse notar que la estimación por el método de Moulines-Soulier aporta evidencia menos fuerte en el caso de los niveles de los rendimientos, en un caso el parámetro de memoria larga estimado es estadísticamente significativo al 90% mientras que en otro parámetro no es estadísticamente significativo a los niveles estándar en la práctica. El caso de los cuadrados de los rendimientos del IPC (RIPC<sup>2</sup>) es más contundente, pues todos los estimadores proporcionan evidencia altamente significativa de la presencia de efectos de memoria larga en la volatilidad.

La evidencia recabada sobre la existencia de posibles efectos de memoria larga en los rendimientos del IPC y su volatilidad se basa hasta este punto en pruebas individuales de las series de interés. Para dilucidar la cuestión, tomando en cuenta que en virtud de los resultados reportados en el Cuadro 2 existen presumiblemente tales efectos, se estimaron cuatro parametrizaciones del modelo GARCH integrado fraccionalmente, utilizando en todos los casos para la ecuación de la media un modelo autorregresivo también integrado fraccionalmente con dos rezagos. El modelo estimado es:

$$\phi(L)(1-L)^d y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = h_t^{1/2} \zeta_t, \quad \zeta_t \approx \text{iid}(0,1)$$

$$B(L)(h_t^{\eta/2} - \omega) = \{B(L) - \delta(L)[1 + \alpha((1+L)^d - 1)]\} (|\varepsilon_t| + \lambda |\varepsilon_t|)^{\eta}$$

En el Cuadro 3 se ofrecen los resultados del modelo, de acuerdo con la interpretación convencional, en todas las parametrizaciones se obtienen parámetros estimados altamente significativos, destacando en particular que los de la memoria sugieren la existencia de efectos de memoria larga en las volatilidades, notoriamente mucho menores en los primeros que en estas últimas. También se destaca a simple vista que los valores numéricos de los parámetros estimados son en su mayoría muy cercanos entre sí y prácticamente iguales en términos estadísticos. En la estimación del intercepto se observa que es notoriamente más bajo en el FIAGARCH y mucho más alto en el HYAPARCH, siendo semejante el valor en los otros dos casos. Este último también proporciona el valor estimado más alto del parámetro de memoria larga, sin embargo, el error estándar de la estimación es el más bajo en comparación con los otros modelos. La parametrización FIAPARCH muestra el valor más pequeño del parámetro de memoria larga con un error estándar sólo ligeramente superior que el del HYAPARCH.

Aunque no es el objetivo de este análisis comparar el desempeño de los diferentes modelos GARCH integrados fraccionalmente, es de hacerse notar que el modelo HYAPARCH parece ser el de mejor ajuste según el valor del logaritmo de la función de verosimilitud y el criterio de información de Schwarz. Es decir, si se tratase de escoger entre los cuatro modelos estimados con base en esos criterios habituales, el modelo HYAPARCH resultaría favorecido.

**Cuadro 3**  
**Modelos GARCH integrados fraccionalmente<sup>a</sup>**

<i>Variable / Estadística</i>	<i>FIGARCH</i>	<i>FIAGARCH</i>	<i>FIAPARCH</i>	<i>HYAPARCH</i>
$d_M$	0.11401 (0.01688)	0.11103 (0.0168)	0.11134 (0.01882)	0.11601 (0.02059)
$\phi_1$	0.12351 (0.02114)	0.12536 (0.02061)	0.12506 (0.02215)	0.12628 (0.02316)
$\phi_2$	-0.10193 (0.01491)	-0.10161 (0.01454)	-0.10005 (0.01502)	-0.09702 (0.01525)
$d_\sigma$	0.46855 (0.0747)	0.45234 (0.0789)	0.40505 (0.0691)	0.57757 (0.0651)
$\omega$	0.2525 (0.0522)	0.14014 (0.0622)	0.2393 (0.0413)	0.46189 (0.0852)
$\delta$	0.12214 (0.09544)	0.13336 (0.09834)	0.17931 (0.09526)	0.12284 (0.05447)
$\beta$	0.39792 (0.12309)	0.39204 (0.13202)	0.41598 (0.12732)	0.41249 (0.09536)
$\lambda$		0.20029 (0.08672)	0.21622 (0.05349)	1.46862 (0.54072)
$\eta$			1.48517 (0.0954)	1.96179 (0.2154)
$\alpha$				0.66917 (0.0759)
Loglikelihood	-11437.3	-11431.1	-11416.7	-11385.1
SIC <sup>b</sup>	-11467.9	-11466.1	-11456	-11428.8
Ljung-Box Q(12) <sup>c</sup>	14.3699 {0.278}	14.3699 {0.278}	14.8212 {0.251}	11.5732 {0.481}
Ljung-Box Q(12) <sup>d</sup>	7.2322 {0.842}	7.2322 {0.842}	5.9073 {0.921}	6.3886 {0.895}

<sup>a</sup> Errores estándar entre paréntesis, valores  $p$  entre corchetes.

<sup>b</sup> Criterio de información de Schwarz (en forma de maximando).

<sup>c</sup> Residuales.

<sup>d</sup> Cuadrado de los residuales.

## Conclusiones

Se ha analizado la volatilidad del IPC mediante métodos semiparamétricos y modelos econométricos de series de tiempo para detectar memoria de largo plazo. De acuerdo con el análisis empírico elaborado en esta investigación, los efectos de memoria larga parecen estar presentes en los rendimientos y en la volatilidad de la bolsa mexicana, por lo cual este estudio ha brindado evidencia adicional a la proporcionada por Islas y Venegas-Martínez (2003) y Venegas-Martínez e Islas (2005). La implicación inmediata es que estos efectos deben tomarse en cuenta para modelar el comportamiento de dicho mercado, pues de no hacerlo se podría estar estimando

incorrectamente el riesgo, lo cual podría tener repercusiones importantes para los inversionistas institucionales en el diseño de portafolios y su cobertura.

No obstante los argumentos anteriores, es importante determinar las causas por las cuales las series analizadas exhiben la presencia de efectos de volatilidad de memoria larga. Al respecto, es importante considerar la posibilidad de que la memoria larga sea una característica genuina del comportamiento del IPC o, en su defecto, se trate sólo de efectos espurios. Lobato y Savin (1998) argumentan que los hallazgos confirmatorios de volatilidad de memoria larga podrían deberse entre otras causas a cambios estructurales o al efecto de agregación al estudiar índices bursátiles. En este sentido, es conveniente señalar que López, Ortiz y Cabello (2007) han mostrado evidencia que sugiere que en el IPC existen rupturas estructurales, presuntamente asociadas con el proceso de apertura financiera y con la crisis del peso en diciembre de 1994; aunque cabe acotar que este estudio no incluye análisis de la volatilidad, razón por la cual la respuesta está en el aire.

### Referencias bibliográficas

- Baillie, R. T., T. Bollerslev and H. O. Mikkelsen (1996). "Fractional integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 74(1), pp. 3-30.
- Conrad, C. (2007). "Non-negativity conditions for the Hyperbolic GARCH model", *KOF Working Papers*, 162, Swiss Federal Institute of Technology-KOF Swiss Economic Institute, Zurich.
- Crato, N. (1994). "Some international evidence regarding the stochastic memory of stock returns", *Applied Financial Economics*, 4 (1), pp. 33-39.
- Davidson, J. (2003). "Moment and memory properties of linear conditional heteroscedasticity models", *Journal of Business and Economics Statistics*, 22 (1), pp. 16-29.
- Ding, Z. and C. W. J. Granger (1996). "Modeling volatility persistence of speculative returns: a new approach", *Journal of Econometrics* 73(1), pp. 185-215.
- Ding, Z., C. W. J. Granger and R. F. Engle (1993). "A long memory property of stock market returns and a new model", *Journal of Empirical Finance*, 1, pp. 83-106.
- Doornik, J. A. (2002) *Object-oriented matrix programming using Ox*, London: Timberlake Consultants Press and Oxford, ([www.doornik.com](http://www.doornik.com)).
- Doornik, J. A. and M. Ooms. (2003). "Computational aspects of maximum likelihood estimation of autoregressive fractionally integrated moving average models", *Computational Statistics and Data Analysis*, 41, pp. 333-348.

- Geweke, J. and S. Porter-Hudak (1983). "The estimation and application of long memory time series models", *Journal of Time Series Analysis*, 4(4), pp. 221-238.
- Goetzmann, W. (1993). "Patterns in three centuries of stock market prices", *Journal of Business*, 66(2), pp. 249-269.
- Granger, C. W. J. (1980). "Long memory relationships and the aggregation of dynamic models", *Journal of Econometrics*, 14(2), pp. 227-238.
- Granger, C. W. J. and R. Joyeux(1980). "An introduction to long memory time series models and fractional differencing", *Journal of Time Series Analysis*, 1(1), pp. 15-29.
- Greene, M. T. and B. D. Fielitz (1977). "Long term dependence in common stock returns", *Journal of Financial Economics*, 4(3), pp. 339-349.
- Hernández Ángeles, I. F., A. Morales y D. Rodríguez (2007). "Eficiencia y volatilidad del mercado accionario en México, 1988-2005", *Comercio Exterior* 57 (11), pp. 898-905.
- Hosking, J. (1981). "Fractional differencing", *Biometrika*, 68(1), pp. 165-176.
- Hurst, H. E. (1951). "Long-term storage of reservoirs", *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, pp. 770-799.
- Hurvich, C. M., R. Deo and J. Brodsky (1998). "The mean squared error of Geweke and Porter-Hudak's estimator of the memory parameter in a long-memory time series", *Journal of Time Series Analysis*, 19, pp. 19-46.
- Islas Camargo, A. and F. Venegas-Martínez (2003). "Pricing derivatives securities with prior information on long-memory volatility", *Economía Mexicana* 12 (1), pp. 103-134.
- Jacobsen, B. (1996). "Long term dependence in stock returns", *Journal of Empirical Finance*, 3(4), pp. 393-417.
- Karanasos, M., S. H. Sekioua and N. Zeng (2006). "On the order of integration of monthly US ex-ante and ex-post real interest rates: new evidence from over a century of data", *Economic Letters*, 90(3), pp. 163-169.
- Kim C. S. y P. C. B. Phillips (2000). "Modified log periodogram regression", *Working Paper*, Yale University.
- Kupiec, P. (1995). "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models", *The Journal of Derivatives*, 3(2), pp. 73-84.
- Lo, A. W. (1991). "Long-term memory in stock market prices", *Econometrica*, 59, pp. 1279-1313.
- Lobato, I. N. and N. E. Savin (1998). "Real and spurious long-memory properties of stock market data", *Journal of Business and Economic Statistics*, 16 (3), pp. 261-268.

- Lombardi, M. J. and G. M. Gallo (2005). "Processi a memoria lunga e fractionally integrated GARCH", *Quaderni/2005-2*, Dipartimento de Statistica Giuseppe Parenti–Università degli Studi di Firenze.
- López Herrera, F. (2004). "Modelado de la volatilidad y pronóstico del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores", *Contaduría y Administración*, 213, pp. 43-72.
- López Herrera, F. y F. J. Vázquez (2002). "Variables económicas y un modelo multifactorial para la Bolsa Mexicana de Valores: análisis empírico en una muestra de activos", *Academia, Revista Latinoamericana de Administración*, 29, pp. 5-28.
- López Herrera, F., E. Ortiz y A. Cabello (2007). "Las bolsas de valores en el área del TLCAN: un análisis a largo plazo", *Problemas del Desarrollo*, 38 (151), pp. 37-61.
- Mandelbrot, B., (1971). "When can price be arbitrage? A limit to the validity of the random walk and martingale models", *Review of Economics and Statistics*, 53(3), pp. 225-236.
- Mandelbrot, B. and J. R. Wallis (1969). "Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises", *Water Resources Research*, 5, pp. 260-267.
- Mills, T. (1993). "Is there long-term memory in UK stock returns?", *Applied Financial Economics*, 3 , pp. 303-306.
- Moulines, E. and P. Soulier (1999). "Broad band log-periodogram estimation of time series with long-range dependence", *Annals of Statistics*, 27, pp. 1415-1439.
- Ñíguez, T. M. and A. Rubia (2006). "Forecasting the conditional covariance matrix of a portfolio under long-run temporal dependence", *Journal of Forecasting*, 25(6), pp. 439-458.
- Peters, E. (1992). "R/S analysis using logarithmic returns", *Financial Analysis Journal*, November-December, pp. 81-82.
- Quan Lu, Shu, T. Ito and K. Voges (2008). "An analysis of long memory in the SSE's Component Index", *Journal of Economics, Banking and Finance*, 2 (1), ([www.scientificjournals.org/journals2008/articles/1331.pdf](http://www.scientificjournals.org/journals2008/articles/1331.pdf)).
- Rapach, D. E. and M. E. Wohar (2004). "The persistence in international real interest rates", *International Journal of Finance and Economics*, 9 (4), pp. 339-346.
- Robinson, P. M. (1991). "Testing for strong serial correlation and dynamic conditional heteroskedasticity in multiple regresión", *Journal of Econometrics*, 47(1), pp. 67-84.
- Sowell, F. (1992). "Maximum likelihood estimation of stationary univariate fractionally integrated time series models", *Journal of Econometrics* 53, pp. 165-188.
- Tang, T. L. and S. J. Shieh (2006). "Long memory in stock index future markets: a value-at-risk approach", *Physica A*, 366, pp. 437-448.

- Taqqu, M. S., V. Tevorovsky and W. Willinger (1999). "A critical look at Lo's modified R/S statistic", *Journal of Statistical Planning and Inference*, 80, pp. 211-227.
- Tse, Y. K. (1998). "The condicional heteroscedasticity of the yen-dollar exchange rate", *Journal of Applied Econometrics*, 13 (1), pp. 94-55.
- Venegas-Martínez, F. y A. Islas (2005). "Volatilidad de los mercados bursátiles de América Latina: efectos de largo plazo", *Comercio Exterior*, 55(11), pp. 936-947.
- Wen Cheong, C. (2008). "Volatility in Malaysian stock market: an empirical study using fractionally integrated approach", *American Journal of Applied Sciences*, 5(6), pp. 683-688.
- Willinger, W., M. S. Taqqu and V. Tevorovsky (1999). "Stock market prices and long-range dependence", *Finance and Stochastics*, 3 (1), pp. 1-13.