Análisis Económico
ISSN: 0185-3937
analeco@correo.azc.uam.mx
Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco
México

Cruz Aké, Salvador; Venegas-Martínez, Francisco; Sánchez Daza, Alfredo
Un modelo de optimización estocástica para la valuación de una franquicia: un enfoque de opciones reales
Análisis Económico, vol. XXIV, núm. 57, 2009, pp. 7-29
Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco
Distrito Federal, México

Análisis Económico
Núm. 57, vol. XXIV
Tercer cuatrimestre de 2009

Un modelo de optimización estocástica para la valuación de una franquicia: un enfoque de opciones reales

(Recibido: mayo/09–aprobado: septiembre/09)

Salvador Cruz Aké[*]
Francisco Venegas-Martínez[*]
Alfredo Sánchez Daza[**]

Resumen

Este trabajo extiende el método tradicional de valuación de franquicias basado en el flujo descontado de efectivo al enfoque de opciones reales, las cuales surgen de manera natural como resultado de un proceso de optimización estocástico donde el franquiciante busca maximizar su utilidad descontada por su costo de capital sujeto a la riqueza que posee. Esta riqueza incluye los costos de deuda y los costos adicionales a pagar por concepto de regalías. Se examina como es afectado el valor de la franquicia por distintas formas de pago de regalías, a saber: suma fija y porcentaje de las ventas, este último es modelado como un bono a tasa variable con reversión a la media, la cual se supone estocástica y conducida por un movimiento geométrico browniano correlacionado con los beneficios. También se muestra la validez de la irrelevancia en la estructura de capital cuando la estructura de plazos de la tasa de interés es plana. Por último, se establecen algunas recomendaciones de estrategias de negocios basadas en las sensibilidades de las opciones reales.

Palabras clave: opciones reales, estructura óptima de capital, valuación de franquicia.
Clasificación JEL: G31, G32.

[*]Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESE–IPN (salvador.ake22@gmail.com, fvenegas1111@yahoo.com.mx).
[**]Departamento de Economía, UAM–Azcapotzalco (sanchezdaza@yahoo.com).

Introducción

La discriminación entre productos mediante la marca es una acción común entre los consumidores actuales. De este fenómeno surge la importancia de la marca en los esquemas actuales de negocio, a tal grado que buena parte de los activos de algunas compañías está integrado por el intangible crédito mercantil o *good will*; como ejemplos notables, pueden tomarse: Coca-Cola, Mc Donald´s o El Tizoncito. Estas marcas han tenido un rápido crecimiento por medio de las franquicias. Los rasgos comunes de estas compañías es que han logrado un posicionamiento de marca importante y una estandarización en sus métodos de negocio.

Se define como franquiciamiento al proceso de utilizar el método y filosofía de negocio de otro a cambio del pago periódico de una cantidad denominada regalía. En este sistema, el franquiciante (dueño de la marca) se compromete con el franquiciatario (o franquiciado) a permitir el uso de su marca y compartir sus métodos de negocio en la elaboración y distribución de un bien o servicio, además de diseñar campañas de posicionamiento de marca para todos los operadores a cambio de una cantidad mensual (regalía) que puede ser fija o un porcentaje de las ventas.

Los contratos más comunes tienen vigencias de cinco a treinta años e incluyen cláusulas que buscan otorgar al dueño de la marca controles sobre la calidad y métodos usados por el operador independiente (franquiciatario). Estos controles van desde el uso de uniformes hasta la imposición de proveedores. En los contratos también se incluyen pagos iniciales (independientes de la inversión) para acceder al contrato y penas pecuniarias (incluso la rescisión prematura del contrato si el franquiciatario incumple con alguna norma).

Los motivos más comunes para acceder a una franquicia son la garantía de un rápido crecimiento sin la restricción de recolección de capital con la subsecuente pérdida de control sobre el negocio principal, además de la estabilización y aumento de los ingresos mediante las regalías. Asimismo resulta una solución parcial al problema de agencia que surge con los gerentes del negocio ante una expansión pues se convierten en dueños de sus unidades, lo cual alinea sus intereses con los del dueño de la marca. Para el franquiciatario, representa una ventaja el iniciar con un negocio posicionado que también minimizará su curva de aprendizaje (y con ello costos), además de contar con acceso a campañas publicitarias que de otro modo serían inalcanzables.

El objetivo de este trabajo es mostrar que el uso de la técnica de valuación de opciones financieras es aplicable a la valuación de franquicias. También se resalta la conveniencia de modelar el cobro de regalías como el planteamiento de un problema de optimización dinámica estocástica. Asimismo se proporciona un conjunto de recomendaciones de estrategias empresariales basadas en las sensibilidades (griegas) de las opciones financieras. Adicionalmente, se muestra la validez de la irrelevancia de la estructura de capital bajo el supuesto de que el refinanciamiento de las deudas se lleva a cabo con una estructura de plazo plana para la tasa de interés.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En la siguiente sección se establece el proceso de valuación de proyectos utilizando flujos de efectivos descontados y su relación con el *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). En la segunda sección se introduce el concepto de opción real, para posteriormente, en el tercer apartado, mostrar la posibilidad de valuar un proyecto de franquicia usando las herramientas de las opciones reales. En el transcurso de las cuarta y quinta secciones se muestra que el uso de las opciones reales está asociado con un proceso de optimización dinámica estocástica independientemente de la forma del cobro de las regalías, y que la irrelevancia de la estructura de capital depende de la posibilidad de refinanciar las deudas sobre una estructura plana de la tasa interés, en sexto apartado se establecen algunas políticas de gestión de negocios basadas en la sensibilidad de las opciones. Por último, se presentan las conclusiones.

1. Valuación de franquicias usando flujos de efectivo descontados

La metodología tradicional para la valuación de un proyecto cualquiera, en este caso una franquicia, implica la construcción de estados financieros pro-forma, la elaboración de flujos de efectivo esperados (ϕ_i) basados en dichos estados y, por último, el ajuste de los flujos de caja (ϕ_i) del proyecto haciendo uso de la correspondiente tasa de descuento α.

En lo subsecuente no hará supuesto alguno sobre la forma en que la empresa es financiada, pues el cambio en la estructura de capital es compensado por un ajuste en la tasa de descuento aplicada a los flujos de efectivo, lo cual en última instancia vuelve irrelevante la elección de la combinación elegida de capital y deuda para financiar el negocio. Este concepto, revolucionario y “contrario” a la intuición financiera, fue propuesto por primera vez en 1958 por Modigliani y Miller. A grandes rasgos, los autores postulan en este trabajo que el valor de un proyecto permanece constante independientemente de la forma en cómo se financien sus actividades, lo cual implica que el valor del negocio desapalancado (financiado con acciones) es el mismo que el del negocio apalancado (financiado con acciones y deuda), siempre y cuando se encuentre en un ambiente libre de impuestos, costos de quiebra y asimetrías de información. A este principio se le conoce como principio de “la irrelevancia de la estructura de capital”.

Como extensión del artículo original, Miller y Modigliani (1963) relajaron sus supuestos iniciales al incorporar el “escudo fiscal”, ello no es otra cosa que las deducciones permitidas por la autoridad fiscal a las empresas por concepto de pago de intereses, lo que conlleva la integración del gobierno y su prerrogativa impositiva al modelo. Cuando los trabajos de Modigliani y Miller fueron publicados, aún no era desarrollada una metodología estadísticamente robusta para valuar el rendimiento del capital de las empresas. Esto cambió en 1964 después de los trabajos de Treynor (1962), Sharpe (1964), Lintner (1965) y Mossin (1966), los cuales desembocaron en lo que hoy se conoce como el CAPM. Esta metodología, surgió de una optimización con restricciones (minimización de la varianza sujeta a un rendimiento dado) en la cual las fuentes de incertidumbre son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como normales, a saber:

$$\min \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$$

$$s.a.\ E\left[r_p\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i E\left[r_i\right]; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0 \tag{1}$$

Esta optimización, después de combinarse con el activo libre de riesgo, permite hacer un estimado del rendimiento de la empresa en función del premio al riesgo de mercado y el rendimiento de un activo libre de riesgo crédito, específicamente: $E[r_i] = r_i + \beta_i (E[r_m] - r_i)$. Si se hace uso de este herramental, es posible valuar un proyecto de inversión independientemente de si éste es un nuevo proyecto o la replica de uno existente, es decir una franquicia (F). En particular, el método de flujos de efectivo descontados aplicado a una franquicia puede resumirse como el valor presente de los flujos de caja esperados por el nuevo proyecto, esto es:

$$F_L = \sum_{i=0}^{n} \phi_i (1+\alpha)^{-i} \tag{2}$$

Como puede verse, en este método de valuación de un nuevo proyecto se soslaya el valor pecuniario de la flexibilidad de poder ceder a una contraparte el riesgo de implementar el nuevo proyecto, la franquicia, a cambio de una suma fija de efectivo, representada por el precio de ejercicio (K) y de otra cantidad por concepto de regalías (R). También deja de lado el valor que representa la posibilidad de quitar la franquicia si el franquiciante merma el valor de la marca al incumplir con los estándares de calidad o servicio de la marca. Estas posibilidades pueden ser traducidas en un valor justo de mercado usando la metodología de opciones reales la cual concibe la posibilidad de otorgar una franquicia como una posición corta en una opción de compra, mientras que la posibilidad de retirar la concesión de marca es vista como una posición larga en una opción de compra (recompra) pues el franquiciante debe vender al franquiciatario el negocio por un precio preestablecido si no respeta las cláusulas del contrato. Antes de seguir con el análisis del problema, se revisará someramente la metodología de las opciones reales; para mayores referencias, se recomiendan ampliamente los trabajos de Copeland y Antikarov (2001) y Copeland, Koller y Murrin (1991).

2. Revisión de la metodología de opciones reales y planteamiento del problema

La primera referencia formal asociada con el término de "opciones reales" está referida al profesor Stewart Mayers del Massachusetts Institute of Technology en 1977. La idea subyacente en todo el aparato metodológico es la aplicación de la fórmula desarrollada por Black y Scholes (1973) y Merton (1973) para valuar opciones europeas sobre activos financieros, a un proyecto cuya realización depende del buen desempeño del negocio principal.

Es importante hacer notar que por su naturaleza una opción real debe ser valuada como una opción americana, pues los proyectos son ejecutables en cualquier punto en el tiempo, no sólo al final del periodo de valuación (véase Bhattacharya, 1978), por lo cual el uso de opciones europeas es una simplificación del problema que busca hacerlo más sencillo de analizar y manejable. Esta simplificación tiene como costo la subvaluación de las opciones, ya que no toma en cuenta el valor de la ejecutabilidad inmediata. Para profundizar en el tema se refiere al lector interesado a Dixit (1993, 1993b), Dixit y Pindyck (1994, 1995, 2000), Kaslow y Pindyck (1994), Bell (1995), Kulatilaka (1995), Gardner y Zhuang (2000) y Angelis (2000).

El problema de la subvaluación puede ser especialmente grave cuando se trata de proyectos que pagan dividendos, en especial si éstos son cuantiosos pues se puede demostrar que es óptimo el ejercicio adelantado de las opciones americanas tanto de compra como de venta (véanse Hull, 2006; Broadie, 1996). Aun suponiendo que todo el flujo de efectivo es reinvertido en el negocio en aras de su crecimiento, se puede demostrar que puede ser óptimo el ejercer antes de expiración una opción americana de venta, no así con la de compra.

Si se supone que los dividendos pagados son suficientemente pequeños o inexistentes, y que, por lo tanto, el valor de la subvaluación es despreciable, se puede ver al valor de concesión de la franquicia como la prima pagada (φ_t) por una opción europea de compra sobre el valor presente de los flujos esperados de efectivo de la expansión del proyecto (F_t) los cuales serán cedidos al franquiciante a cambio de una inversión inicial (K_1). Todo esto es posible ya que se plantea, para el franquiciante, la venta de la licencia y beneficios propios de la franquicia como la suscripción, al franquiciatario, de una opción de compra sobre los flujos del proyecto, los cuales tomará si son positivos, por lo que el valor de la marca y del *know how* están dados por el valor presente del valor esperado, condicionado a la información actual, del máximo entre el remanente del valor presente de los flujos del proyecto y el costo de inversión y cero, es decir: $\varphi_t = E\left[e^{-r(T_1-t)} \max(F_t - K_1,0)|\Im_t\right]$, donde $\Im_t$ es toda información relevante al tiempo t.

Por otra parte, el franquiciatario se reserva el derecho de quitar la franquicia al franquiciante si este incumple con la calidad, el servicio o los estándares propios del negocio de forma tal que afecte el valor de la marca del franquiciante. Esta cláusula, común dentro de los contratos de franquicia, puede traducirse como una posición larga en otra opción europea de compra (υ_t) para el franquiciatario quien a cambio de un pago fijo (K_2), establecido por contrato como indemnización, recupera el control de la unidad problemática, y con ello el valor esperado, condicional a la información de ese momento, del valor presente del máximo entre la diferencia del valor del proyecto ajustado por la minusvalía (una suma fija) producto de la mala administración del franquiciatario y el monto de la indemnización y cero, es decir: $\upsilon_t = E\left[e^{-r(T_2-t)} \max(F_t - K_2,0)|\Im_t\right]$.

Todo el aparato teórico anterior sólo puede ser usado si se aceptan los supuestos y también las limitaciones dadas por el modelo de Black y Scholes (1973), entre las limitaciones destacan la necesidad de suponer la volatilidad del proyecto (σ_F) como constante, la aceptación de una estructura de plazo plana representada por una tasa de interés libre de riesgo (r_f), también constante, y la suposición que los rendimientos del proyecto original están dados por variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como normales.

Observe que las opciones a las cuales se ha hecho referencia tienen dos tiempos de ejecución distintos, la opción de compra hace mención a un tiempo T_1 referido al inicio del horizonte de planeación del nuevo proyecto (el momento de la firma del contrato de franquicia), en tanto la opción de recompra de la franquicia está referida al momento de revisión contractual cuando se decide si se mantiene o se retira la concesión. Por simplicidad se supone este momento como único, pues de no hacerlo sería necesario usar árboles binomiales como en cualquier opción americana, lo cual dificultaría el análisis.

3. ¿Por qué evaluar la franquicia como una opción real?

Si se sigue con la notación introducida anteriormente, se mostrará que el valor justo de mercado de la franquicia está regido por una ecuación diferencial parcial de segundo orden que cumplen todos los derivados, razón por la cual es posible valuarlo con la fórmula de Black y Scholes (1973).

Se inicia entonces el análisis suponiendo que los rendimientos del proyecto en funcionamiento son conducidos por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dF_t = (\mu_t \, dt + \sigma_F \, dW_t)F_t \tag{3}$$

Donde:

$W_t \sim N(0,t)$.

Esto implica que, al aplicar el cálculo de Itô, el diferencial del valor de la franquicia, el cual es función del valor del negocio original (una variable aleatoria), está dado por:

$$d\varphi(F_t, t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt + \frac{\partial\varphi}{\partial F_t}dF_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial F_t^2}dF_t^2 \tag{4}$$

Después de sustituir la ecuación diferencial estocástica del rendimiento del proyecto (dF_t) en la ecuación diferencial del rendimiento de la franquicia y aplicando el cálculo estocástico (véanse Lamberton y Lapeyre, 1996; Mikosch, 1998; Gikhman y Skorokhod, 2003), se tiene que:

$$d\varphi(F_t, t) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial_t} + \frac{\partial\varphi}{\partial F_t}\mu_F F_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial F_t^2}\sigma_F^2 F_t^2\right)dt + \frac{\partial\varphi}{\partial F_t}\sigma_F F_t \, dW_t \tag{5}$$

Si se supone que los mercados son completos y que no existe posibilidad alguna de arbitraje, se sigue el argumento clásico de los portafolios replicantes. En lo subsecuente se intentará eliminar el riesgo de un portafolio (Π_t) que contiene al valor del negocio en funcionamiento (F_t) y a la franquicia (φ_t), igualándolo con el valor del mismo portafolio invertido en un bono que paga una tasa libre de riesgo constante (r), es decir:

$$\Pi_t = \omega_1 F_t + \omega_2 \varphi_t \tag{6}$$

A continuación se determina el cambio marginal en el valor de este portafolio donde las proporciones ω_i, $i = 1,2$ permanecen constantes a lo largo de todo el ejercicio. Para ello, se tiene que determinar la diferencial (estocástica) de dicho portafolio y, posteriormente, sustituir las diferenciales de cada una de sus componentes, lo cual conduce a:

$$d\,\Pi_t = \left(\mu_F F_t \omega_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial F_t} \mu_F F_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial F_t^2} \sigma_F^2 F_t^2 \right) \omega_2 \right) dt + \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial \varphi}{\partial F_t} \right) \sigma_F F_t \, dW_t \qquad (7)$$

Para eliminar el riesgo de este portafolio, se desea que la parte estocástica del mismo sea anulada, lo cual se logra haciendo $\omega_1 + \omega_2\,(\partial\varphi/\partial F_t) = 0$. Esto implica que una posibilidad de los ponderadores sea $\omega_1 = -\,\partial\varphi/\partial F_t$ y $\omega_2 = 1$, en cuyo caso, se tiene que:

$$d\,\Pi_t = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial F_t^{\,2}} \sigma_F^2 F_T^2 \right) dt \qquad (8)$$

Por otro lado, el supuesto de no arbitraje y la completitud del mercado, conduce a que un portafolio libre de riesgo como el descrito anteriormente tenga un rendimiento equivalente a una inversión segura que paga una tasa libre de riesgo (r). El rendimiento de este portafolio está dado por:

$$d\,\Pi_t = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial F_t} F_t + \varphi \right) r \, dt \qquad (9)$$

Dada la existencia de un mercado completo, es posible igualar las ecuaciones (8) y (9) para obtener la ecuación diferencial parcial que debe cumplir cualquier derivado incluidas las opciones reales (véase Abel, 1983), esto es:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial F_t^2} \sigma_F^2 V_F^2 + r \frac{\partial \varphi}{\partial F_t} F_t + \varphi r = 0 \qquad (10)$$

Es bien conocido el hecho de que la solución de esta ecuación diferencial parcial de segundo orden fue obtenida por Black y Scholes (1973) para valuar una opción europea. Esta fórmula será usada para valuar las opciones reales implicadas por la franquicia y su cláusula de rescisión del contrato.

4. El contrato de franquiciamiento visto como un portafolio de bonos y opciones

Al enfrentar la decisión de replicar el negocio, el dueño de la empresa busca maximizar su beneficio sujeto a la riqueza que posee, la cual puede ser entendida como un portafolio integrado por el valor de su negocio original (F_t), la posibilidad de explotar el poder de mercado que representa su marca al franquiciar su modelo de negocio representado por la prima (φ_t) que obtiene al firmar el contrato de franquicia, los pagos que recibirá del franquiciatario (inicialmente supuestos como una cantidad fija) representados por un bono (B_{r^*}) que paga la tasa libre de riesgo más un diferencial (r^*).

A la riqueza del dueño del negocio se añaden los pagos que debe realizar a distintos proveedores y otros costos no especificados en el modelo representados por un bono (B_{r_f}) que, por simplicidad, se supone que paga la tasa libre de riesgo (r_f). Por último se incorpora a la riqueza del dueño del negocio el valor de la cláusula de rescisión, la cual es representada por una posición larga en otra opción de compra (υ_t) con vencimiento (T_2) y precio de ejercicio (K_2) diferentes a la primera.

Como consecuencia de lo anterior, el pago inicial que recibirá el franquiciante por concepto de celebración del contrato puede ser aproximado mediante la solución propuesta por Black y Scholes (1973) para valuar una opción de compra, a saber:

$$\varphi_t = F_t\,\Phi(d_1) - K_1 e^{-r\,(T-t)}\Phi\,(d_2) \tag{11}$$

Por su parte, el valor de la cláusula de rescisión está dado por la prima pagada a cambio de la opción de recompra, es decir:

$$\upsilon_t = F_t\Phi(d_1) - K_2 e^{-r\,(T-t)}\Phi\,(d_2) \tag{12}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\dfrac{F_t}{K_1}\right) + \left(r + \dfrac{1}{2}\sigma_F^2\right)(T-t)}{\sigma_F\,\sqrt{T-t}} \tag{13}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_\upsilon\sqrt{T-t} \tag{14}$$

Es importante aclarar que $\Phi(d)$ es la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar ($\varepsilon \sim N(0,1)$), es decir:

$$\Phi(d) = IP_{\varepsilon}\ \{\varepsilon \leq d\} = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1 - \Phi\,(-d) \tag{15}$$

Una vez establecidos los elementos integrantes del portafolio del franquiciatario, se determinarán las participaciones óptimas de cada uno de ellos a fin de maximizar su beneficio esperado descontado por la tasa promedio ponderada del mismo, es decir la tasa promedio del costo de capital (WACC: *weighted average cost of capital*). Como puede observarse, la búsqueda de una proporción óptima de tenencias sobre el bono a pagar a los acreedores y el proyecto original equivale a vincular las proposiciones de Modigliani y Miller (1958) con el resultado de la optimización dinámica estocástica, este punto será aclarado en la siguiente sección.

5. Proporciones óptimas de tenencias de activos como resultado de una optimización dinámica estocástica

Antes de iniciar con la determinación de los valores óptimos de las proporciones de las tenencias de activos, es importante hacer una revisión de los supuestos subyacentes en el proceso. El primero de ellos es que el franquiciante es un agente económico racional, adverso al riesgo, el cual prefiere más a menos beneficios cuya función de beneficios está dada por Π_t^{γ}/γ.

También se supone que el franquiciante toma una decisión sobre las proporciones una vez que ha analizado toda la información histórica disponible al momento t. Esto incluye cualquier clase de filtro o combinación lineal o no lineal a su alcance y los precios de los activos públicos relacionados. Toda esta información está contenida y representada por una sigma álgebra ($\Im_t$) que condiciona la esperanza de la optimización.

En una primera aproximación, se supone una única fuente de incertidumbre dentro del análisis, pues a pesar de que los rendimientos de las primas por firma de contrato y cláusula de rescisión son variables aleatorias, éstas dependen (por eso se les llama derivados) de la suerte de los rendimientos del subyacente, en este caso del negocio principal.

Resulta importante aclarar que aunque el ejercicio de la cláusula de rescisión de contrato no está dada por el deseo de obtener una ganancia *per se,* sino por el deseo de frenar la caída del valor de la marca ante el mal manejo de una de las unidades, sigue la misma lógica (función de pago) que las opciones comunes, esto es $\upsilon_t = E\left[e^{-r(T_2-t)} \max(F_t - K_2,0)|\Im_t\right]$.

Suponga un escenario donde el negocio principal se encuentra inmerso en un entorno de bonanza, pero el franquiciatario incumple con las condiciones estipuladas en el contrato, en este caso, el valor de la prima (υ_t) será positivo, por lo que existe una razón pecuniaria para ejercer la opción. Ahora suponga el escenario contrario, en el cual el valor del negocio principal está por debajo del precio de ejercicio (K_2). En este caso, el franquiciante decidirá cerrar la unidad franquiciada si y sólo si el valor presente del valor esperado del máximo entre la diferencia del valor de los flujos de la unidad en cuestión menos el precio de recompra es mayor que cero. Este hecho conduce a una política de recompra por parte del franquiciante asociada con la *kappa* (sensibilidad de la opción respecto al precio de ejercicio) la cual indica que a mayor precio de recompra (K_2) en la cláusula de cierre de la franquicia, mayor será la libertad del franquiciatario pues no resultará óptimo para el dueño de la marca tomar el control de su unidad.

Una vez analizado el mecanismo de acción de la cláusula de rescisión a la luz de la metodología de las opciones reales, se procede a establecer la ecuación de evolución de la riqueza del franquiciante. Ésta incluye una proporción ($\omega_1 = F_t/a_t$) destinada a su negocio inicial (F_t); otra ($\omega_2 = \varphi_t/a_t$) destinada a la posición corta en una opción de compra cuya prima representa el pago inicial para ceder la franquicia (φ_t); una tercera ($\omega_3 = \upsilon_t/a_t$) destinada a la cláusula de rescisión de contrato representada por una posición larga en una opción de compra con un segundo precio de ejercicio (υ_t); una cuarta ($\omega_4 = B_{r^*,t}/a_t$) asignada a la posición larga en un bono (B_{r^*}) que paga una tasa de interés t^* la cual representa pagos fijos periódicos que recibirá por concepto de regalías; y el remanente ($1–(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = B_{r,t}/a_t$) destinado a una posición corta en otro bono (B_r) que representa obligaciones a cubrir con sus proveedores. Todo esto puede resumirse en:

$$a_t = \omega_1 F_t - \omega_2 \varphi_t + \omega_3 \upsilon_t + \omega_4 B_{r^*,t} - (1-(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4))B_{r^*,t} \qquad (16)$$

Si se desea conocer la forma cómo cambiará marginalmente esta riqueza (su diferencial), es necesario conocer la diferencial de cada uno de sus elementos, tomando en cuenta que algunos de ellos son variables aleatorias que dependen del valor del proyecto original. Se iniciará recordando que la diferencial del valor del proyecto original está dada por la ecuación diferencial estocástica expresada por (3), mientras que la diferencial del valor del pago inicial por ceder la franquicia está dada por (5), por simplicidad se denotará:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial F_t}\mu_F F_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial F_t^2}\sigma_F^2 F_T^2\right)\frac{1}{\varphi_t}=\mu_\varphi$$

y

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\sigma_F\right)\frac{1}{\varphi_t}=\sigma_\varphi$$

Lo anterior reduce (5) a:

$$d\varphi\,(F_t,t)=(\mu_\varphi\,dt+\sigma_\varphi\,dW_t)\,\varphi_t \tag{17}$$

Al seguir el mismo procedimiento, se puede obtener la ecuación diferencial estocástica que conduce a la opción de recompra, lo cual finalmente produce:

$$d\upsilon\,(F_t,t)=(\mu_\upsilon\,dt+\sigma_\upsilon\,dW_t)\,\upsilon \tag{18}$$

Donde:

$$\mu_\upsilon=\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\frac{\partial\upsilon}{\partial F}\mu_F F_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial F_t^2}\sigma_F^2 F_t^2\right)\frac{1}{\upsilon_t};\ \text{y}$$

$$\sigma_\upsilon=\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\sigma_F\right)\frac{1}{\upsilon_t}.$$

Por otra parte, los bonos por conceptos de regalías y pago a acreedores (instrumentos libres de riesgo crédito) satisfacen, respectivamente, las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$dB_{r*}=r^*\,dt \tag{19}$$

$$dBr=rdt \tag{20}$$

Resulta prudente aclarar que, por consistencia con el diferencial, las tasas de interés pagadas deben cumplir con $r^*\geq r$.

Al proceder con la metodología estándar de optimización dinámica estocástica, se considera una función de beneficios (estocásticos) cóncava que responde a los beneficios decrecientes del negocio Esta función de beneficios será descontada por la WACC, denotada por W, del portafolio, restringiendo la optimización a los cambios en la riqueza del franquiciante, todo lo cual se resume (véanse Merton, 1973b y 1974) en:

$$\max_{\Pi_t} E\left[\int_t^{\infty} \frac{\Pi_t^{\gamma}}{\gamma} e^{-Wu}\, du \,\middle|\, F_t\right]$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{aligned} da_t \;=\; & a_t\omega_1 dF + a_t\omega_2 d\varphi_t + a_t\omega_3 d\upsilon_t + a_t\omega_4 dB_{r^*,\,t} \\ & + a_t(1-(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4))dB_{r,t} + \Pi_t \end{aligned} \tag{21}$$

Si se sustituyen los rendimientos marginales de cada uno de los componentes de la riqueza del franquiciante en la restricción, se tiene que la diferencial de la riqueza está dada por:

$$\begin{aligned} da_t = & \left(r_f + \omega_1\left(\mu_F - r_f\right) + \omega_2\left(\mu_\varphi - r_f\right) + \omega_3\left(\mu_\upsilon - r_f\right) + \omega_4\left(r^* - r_f\right) - \frac{\Pi_t}{a_t}\right)a_t\, dt \\ & + a_t\left(\sigma_F\,\omega_1 + \sigma_\varphi\,\omega_2 + \sigma_\upsilon\,\omega_3\right)dW_t \end{aligned} \tag{22}$$

Con base en el problema anterior se puede definir la siguiente funcional:

$$J(a_t, t) = \max_{\Pi_t} E\left[\int_t^{\infty} \frac{\Pi_t^{\gamma}}{\gamma} e^{-Ws} ds \,\middle|\, \Im_t\right]$$

A partir de la expresión anterior se obtiene una ecuación recursiva de la forma:

$$J(a_t, t) = \max_{\Pi_t|_{t,t+dt}} E\left[\frac{\Pi_t^{\gamma}}{\gamma} e^{-Ws} ds + o\, dt + J(a_1, t) + dJ(a_1, t) \,\middle|\, \Im_t\right] \tag{23}$$

Aplicando el lema de Itô, tomando esperanzas y dividiendo entre dt para después tomar el límite cuando dt tiende a cero:

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{\Pi_t, \omega_{1t}, \omega_{2t}, \omega_{3t}, \omega_{4t}} & \left\{ \frac{\Pi_t^{\gamma}}{\gamma} e^{-Ws} + J_t \right. \\
& + J_a a_t \left(r_f + \left(\mu_F - r_f\right)\omega_{1t} + \left(\mu_\varphi - r_f\right)\omega_{2t} + \left(\mu_\upsilon - r_f\right)\omega_{3t} + \left(r^* - r_f\right)\omega_{4t} - \frac{\Pi_t}{a_t} \right) \\
& \left. + \frac{1}{2} J_{aa} a_t^2 \left(\sigma_F\, \omega_{1t} + \sigma_\varphi \omega_{2t} + \sigma_\upsilon \omega_{3t} \right)^2 \right\}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Para obtener la solución de esta ecuación diferencial separable de segundo orden, se considera como candidato de solución a $J(a_t,t) = V(a_t)e^{-Wt}$, donde $V(a_t)= \beta\, (a_t^{\gamma} / \gamma)$. La sustitución de esta función lleva a la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$
\begin{aligned}
H = 0 = & \frac{\Pi_t^{\gamma}}{\gamma} W \frac{\beta_{a_t}^{\gamma}}{\gamma} \\
& \beta_{a_t}^{\gamma} \left(r_f + \omega_1 \left(\mu_F - r_f\right) + \omega_2 \left(\mu_\varphi - r_f\right) + \omega_3 \left(\mu_\upsilon - r_f\right) + \omega_4 \left(r^* - r_f\right) + \frac{\Pi_t}{a_t} \right) \\
& + \frac{1}{2} \beta a_t^{\gamma} \left(\gamma - 1\right)\left(\sigma_F\, \omega_1 + \sigma_\varphi\, \omega_2 + \sigma_\upsilon\, \omega_3 \right)^2
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Para calcular los valores óptimos de las proporciones de cada activo y la riqueza óptima, se deriva la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman con respecto a cada uno de las proporciones y de los beneficios, para después igualarlos a cero, y así obtener:

$$
\frac{\partial H}{\partial \Pi_t} = 0 = \Pi_t^{\gamma - 1} - \beta\, a_t^{\gamma - 1} \tag{26}
$$

$$
\frac{\partial H}{\partial \omega_{1t}} = 0 = \beta\, a_t^{\gamma} \left(\mu_F - r\right) + \beta\, a_t^{\gamma} \left(\gamma - 1\right)\left(\sigma_F\, \omega_1 + \sigma_\varphi\, \omega_2 + \sigma_\upsilon\, \omega_3 \right)\sigma_F \tag{27}
$$

$$
\frac{\partial H}{\partial \omega_2} = 0 = \beta\, a_t^{\gamma} \left(\mu_\varphi - r\right) + \beta\, a_t^{\gamma} \left(\gamma - 1\right)\left(\sigma_F\, \omega_1 + \sigma_\varphi\, \omega_2 + \sigma_\upsilon\, \omega_3 \right)\sigma_\varphi \tag{28}
$$

$$
\frac{\partial H}{\partial \omega_{3t}} = 0 = \beta\, a_t^{\gamma} \left(\mu_\upsilon - r\right) + \beta\, a_t^{\gamma} \left(\gamma - 1\right)\left(\sigma_F\, \omega_1 + \sigma_\varphi\, \omega_2 + \sigma_\upsilon\, \omega_3 \right)\sigma_\upsilon \tag{29}
$$

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_{4t}} = 0 = \beta\, a_t^{\gamma}\left(r^* - r_f\right) \tag{30}$$

Este grupo de condiciones de primer orden puede ser resuelto como un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas (con un vector de soluciones único) del cual se obtienen premios al riesgo equivalentes para las tenencias de los activos riesgosos[1] representados por (27), (28) y (29), esto es:

$$\frac{\mu_F - r_f}{\sigma_F} = \frac{\mu_\varphi - r_f}{\sigma_\varphi} = \frac{\mu_\upsilon - r_f}{\sigma_\upsilon} = \left(1-\gamma\right)\left(\sigma_F\,\omega_1 + \sigma_\varphi\,\omega_2 + \sigma_\upsilon\,\omega_3\right) \tag{31}$$

Si se reescribe la ecuación (31) y se sustituyen en ella las definiciones usadas para simplificar (17) y (18), se obtiene que la ecuación diferencial parcial de segundo orden la cual cumple cada una de las opciones de compra contenidas en el portafolio del franquiciante es la misma, esto es:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial F_t}\mu_F F_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial F_t^2}\sigma_F^2 F_t^2 - r_f F_t = 0 = \frac{\partial\upsilon}{\partial t} + \frac{\partial\upsilon}{\partial F_t}\mu_F F_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial F_t^2}\sigma_{F,t}^2 F_t^2 - r_f F_t \tag{32}$$

Se puede verificar en la literatura (véase, por ejemplo, Venegas-Martínez, 2008) que la solución a estas ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden está dada por la fórmula de Black y Scholes (1973) mostrada en (12), (13) y (14). Esto muestra la utilidad de las opciones reales para valuar los proyectos de franquicias.

También resulta interesante el resultado arrojado por la quinta condición de primer orden, ecuación (30), la cual implica la validación de la irrelevancia de la estructura de capital planteada inicialmente por Modigliani y Miller en un entorno de eficiencia de mercados, completitud de los mismos, estructura plana de la tasa de interés y una distribución normal de las fuentes de incertidumbre.

Este resultado puede ser adjudicado a la posibilidad de refinanciamiento ilimitado de las deudas *roll over* sobre una estructura plana de la tasa de interés, ello implica liquidez instantánea del mercado crediticio, razón por la cual $r^* = r_f$. La violación de estos supuestos es una explicación teórica a la preferencia de alguna estructura de capital específica por parte de las empresas.

[1] A saber: el proyecto original, la posición corta en la opción de compra que representa el pago inicial por la franquicia y la cláusula de recompra.

Por último, se determina el beneficio óptimo esperado de la firma y la trayectoria de la riqueza, los cuales se obtienen a partir (26), el primero está dado por:

$$\Pi_t = \left(\beta\, a_t^{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \beta^{\frac{1}{\gamma-1}} a_t$$

Para obtener el valor del parámetro β, es necesario sustituir los beneficios esperados óptimos en la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman evaluada en los valores óptimos, lo cual implica que:

$$\beta^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{1+\gamma}{W - \gamma\Gamma - \left(\left(\frac{\gamma^2-\gamma}{2}\right)\left(\sigma_F\,\omega_1 + \sigma_\varphi\,\omega_2 + \sigma_\upsilon\omega_3\right)^2\right)} \tag{33}$$

En este caso, por simplicidad en la notación, se ha escrito:

$$\Gamma = -\,r_f + \omega_1\,(\,\mu_F - r_f) + \omega_2\,(\,\mu_\varphi - r_f) + \omega_3\,(\,\mu_\upsilon - r_f) + \omega_4\,(\,r^* - r_f)$$

Lo anterior permite expresar las trayectorias de la riqueza y el beneficio en función de parámetros conocidos.

Una vez realizado este primer ejercicio con pagos fijos por concepto de usufructo de marca, el lector puede preguntarse qué sucede en el caso más común en el cual el pago de regalías está vinculado con las ventas (no beneficios) del franquiciatario. Por simplicidad en el análisis y también mayor realismo, se supondrá que el pago de regalías está dado por un bono a tasa variable cuya tasa corta está modelada conforme al modelo de Vasicek (1977) con una fuente de incertidumbre distinta a los beneficios aunque correlacionada a ésta por un factor ρ.

El supuesto anterior obedece a la necesidad de incorporar en una sola variable distintas distorsiones a lo largo del estado de resultados que pueden desviar (momentáneamente) la trayectoria de los beneficios de la trayectoria de las ventas. Aunque es claro que en el largo plazo éstas convergen a una tasa media (por simplicidad, la tasa libre) representada empleando la reversión del modelo de Vasicek, se establece que la dinámica de la tasa corta seguida por el bono el cual representa los beneficios pagados por regalías está dado por:

$$dr^* = \alpha(b - r_f)\,dt + \alpha_{r^*}\,dW_t^* \tag{34}$$

Donde:

(3), (17), (18) y (20) se mantienen sin cambios para la resolución de este problema.

En afán de mantener la continuidad de la exposición y por claridad en la explicación, se usará la misma función de utilidad en este nuevo proceso de optimización dinámica estocástica el cual supone que la tasa corta pagada por el bono recibido por concepto de regalías sigue la ecuación diferencial estocástica (34), con ello el nuevo modelo también puede ser descrito por (21), aunque la restricción asociada se modifica de tal forma que:

$$\begin{aligned} da_t = &\left(r_f + \omega_1 \left(\mu_F - r_f\right) + \omega_2 \left(\mu_\varphi - r_f\right) + \omega_3 \left(\mu_\upsilon - r_f\right) + \omega_4 \left(\alpha \left(b - r_f\right) - r_f\right) - \frac{\Pi_t}{a_t}\right) a_t\, dt \\ &+ a_t \left(\sigma_F \omega_1 + \sigma_\varphi \omega_2 + \sigma_\upsilon \omega_3\right) dW_t + a_t \left(\sigma_{r*} \omega_4\right) dW_t^* \end{aligned} \tag{35}$$

Observe que la función de utilidad no ha cambiado, por lo que la funcional usada para resolver el problema puede ser representada vía (23). El cambio en la tasa corta del bono de regalías es percibido cuando se aplica la regla de Itô para obtener el diferencial de la funcional $dJ(a_t,t)$. Una vez obtenida la diferencial, se toma la esperanza condicional y se divide todo el argumento sobre dt, para después tomar el límite cuando dt tienda a cero, con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 = \max_{\Pi_t, \omega_{1t}, \omega_{2t}, \omega_{3t}, \omega_{4t}} &\left\{ \frac{\Pi_t^\gamma}{\gamma} e^{-Ws} + J_t + J_a a_t \begin{pmatrix} r_f + \left(\mu_{f} - r_f\right) \omega_{1t} + \left(\mu_\varphi - r_f\right)\omega_{2t} + \left(\mu_\upsilon - r_f\right)\omega_{3t} \\ + \left(\alpha\left(b - r_f\right) - r_f\right)\omega_{4t} - \dfrac{\Pi_t}{a_t} \end{pmatrix} \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} J_{aa} a_t^2 \left[\left(\sigma_F \omega_{1t} + \sigma_\varphi \omega_{2t} + \sigma_\upsilon \omega_{3t}\right)^2 + 2\left(\sigma_F \omega_{1t} + \sigma_\varphi \omega_{2t} + \sigma_\upsilon \omega_{3t}\right)\left(\sigma_{r*} \omega_4\right) \rho + \left(\sigma_{r*} \omega_4\right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \tag{36}$$

Al igual que en el problema de optimización dinámica estocástica anterior, se propone un candidato con una forma funcional separable $J(a_t,t) = V(a_t)e^{-Wt}$, donde $V(a_t) = \beta(a_t^\gamma / \gamma)$. Como bien puede observarse, el candidato de solución es el mismo que en el proceso anterior, pues éste depende de la forma de la función de utilidad, no de la restricción. Al tomar las derivadas correspondientes y sustituir se llega a una nueva ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, de la forma:

$$H = 0 = \frac{\Pi_t^{\gamma}}{\gamma} - W\,\frac{\beta a_t^{\gamma}}{\gamma} + \beta a_t^{\gamma}\begin{pmatrix} r_f + \omega_1\left(\mu_F - r_f\right) + \omega_2\left(\mu_\varphi - r_f\right) + \omega_3\left(\mu_\upsilon - r_f\right) \\ + \omega_4\left(\alpha\left(b - r_f\right) - r_f\right) + \dfrac{\Pi_t}{a_t} \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{1}{2}\beta a_t^{\gamma}\left(\gamma - 1\right)\begin{bmatrix} \left(\sigma_F\omega_1 + \sigma_\varphi\omega_2 + \sigma_\upsilon\omega_3\right)^2 \\ +2\left(\sigma_F\omega_1 + \sigma_\varphi\omega_2 + \sigma_\upsilon\omega_3\right)\left(\sigma_{r*}\omega_4\right)\rho + \left(\sigma_{r*}\omega_4\right)^2 \end{bmatrix} \tag{37}$$

Después de seguir el mismo proceso que en la optimización previa, se obtienen las condiciones de primer orden derivando la expresión anterior con respecto a cada una de las variables de control, obteniendo:

$$\frac{\partial H}{\partial \Pi_t} = 0 = \Pi_t^{\gamma-1} - \beta a_t^{\gamma-1} \tag{38}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_{1t}} = 0 = \beta a_t^{\gamma}\left(\mu_F - r\right) + \beta a_t^{\gamma}\left(\gamma - 1\right)\left[\left(\sigma_F\omega_1 + \sigma_\varphi\omega_2 + \sigma_\upsilon\omega_3\right)\sigma_F + \left(\sigma_F\,\omega_1\right)\left(\sigma_{r*}\,\omega_4\right)\rho\right] \tag{39}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_{2t}} = 0 = \beta a_t^{\gamma}\left(\mu_\varphi - r\right) + \beta a_t^{\gamma}\left(\gamma - 1\right)\left[\left(\sigma_F\omega_1 + \sigma_\varphi\omega_2 + \sigma_\upsilon\omega_3\right)\sigma_\varphi + \left(\sigma_\varphi\,\omega_2\right)\left(\sigma_{r*}\,\omega_4\right)\rho\right] \tag{40}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_{3t}} = 0 = \beta a_t^{\gamma}\left(\mu_\upsilon - r\right) + \beta a_t^{\gamma}\left(\gamma - 1\right)\left[\left(\sigma_F\omega_1 + \sigma_\varphi\omega_2 + \sigma_\upsilon\omega_3\right)\sigma_\upsilon + \left(\sigma_\upsilon\,\omega_3\right)\left(\sigma_{r*}\,\omega_4\right)\rho\right] \tag{41}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_{4t}} = 0 = \beta a_t^{\gamma}\left(\gamma\left(b - r_f\right) - r_f\right) + \beta a_t^{\gamma}\left(\gamma - 1\right)\left[\left(\sigma_F\omega_1 + \sigma_\varphi\omega_2 + \sigma_\upsilon\omega_3\right)\sigma_{r*}\rho + \left(\sigma_{r*}\,\omega_4\right)\sigma_{r*}\right] \tag{42}$$

Como en el caso anterior, es posible demostrar que los premios al riesgo del negocio principal y sus derivados son iguales (suponiendo proporciones iguales) y que, después de sustituir las medias y desviaciones de cada activo, cumplen con la ecuación diferencial parcial de segundo orden de Black y Scholes, a saber:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_F - r_f}{\sigma_F} &= \left(1 - \gamma\right)\left(\left(\sigma_F\omega_1 + \sigma_\varphi\omega_2 + \sigma_\upsilon\omega_3\right) + \omega_1\left(\sigma_{r*}\omega_4\right)\rho\right) \\ \frac{\mu_\varphi - r_f}{\sigma_\varphi} &= \left(1 - \gamma\right)\left(\left(\sigma_F\omega_1 + \sigma_\varphi\omega_2 + \sigma_\upsilon\omega_3\right) + \omega_2\left(\sigma_{r*}\omega_4\right)\rho\right) \\ \frac{\mu_\upsilon - r_f}{\sigma_\upsilon} &= \left(1 - \gamma\right)\left(\left(\sigma_F\omega_1 + \sigma_\varphi\omega_2 + \sigma_\upsilon\omega_3\right) + \omega_3\left(\sigma_{r*}\omega_4\right)\rho\right) \end{aligned} \tag{43}$$

En virtud de lo anterior, aquí también es válido usar el herramental de valuación de opciones. En cuanto a la quinta condición de primer orden, se genera un premio al riesgo de la forma:

$$\frac{\alpha\left(b-r_f\right)-r_f}{\sigma_{r^*}}=(1-\gamma)\left[\left(\sigma_F\,\omega_1+\sigma_\varphi\,\omega_2+\sigma_\upsilon\,\omega_3\right)\rho+\left(\sigma_{r^*}\,\omega_4\right)\right]$$

Esta ecuación, una vez tomados como dados el resto de los ponderadores, sugiere un único punto de endeudamiento óptimo al resultar único el valor de ω_4. Este hecho confirma la explicación acerca del cumplimiento de Modigliani y Miller debido al *roll over* sobre una estructura plana de la tasa de interés.

En cuanto a la trayectoria óptima de los beneficios ($\Pi_t = (\beta a_t^{\gamma-1})^{1/\gamma-1} = \beta^{1/\gamma-1}a_t$), ésta cambia en la medida que lo hace la riqueza, (a_t), del franquiciante, aunque su forma sigue igual. Por último, el parámetro β ahora está dado por:

$$\beta^{\frac{1}{\gamma-1}}=\frac{1+\gamma}{W-\gamma\,\Gamma-\left(\begin{array}{c}\left(\dfrac{\gamma^2-\gamma}{2}\right)\left(\sigma_F\,\omega_1+\sigma_\varphi\,\omega_2+\sigma_\upsilon\,\omega_3\right)^2\\+2\left(\sigma_F\,\omega_1+\sigma_\varphi\,\omega_2+\sigma_\upsilon\,\omega_3\right)\left(\sigma_{r^*}\,\omega_4\right)\rho+\left(\sigma_{r^*}\,\omega_4\right)^2\end{array}\right)} \qquad (44)$$

Con lo anterior se muestra la utilidad de las opciones reales en la valuación de las franquicias aun cuando no se cumpla la proposición Modigliani y Miller a causa de una estructura basada en el modelo de Vasicek (1977) de la tasa de interés.

6. Estrategias para el manejo de la franquicia

En el transcurso de las secciones anteriores, se estableció que la empresa es un portafolio formado por un subyacente (el proyecto original), posiciones cortas y largas en opciones de compra para el otorgamiento de la franquicia y rescisión del contrato y un par de bonos que representan los ingresos obtenidos por regalías y las erogaciones hacia proveedores. También se estableció que la herramienta usada para la valuación de opciones es útil en la valuación de franquicias y que, por lo tanto, las conclusiones y acotaciones obtenidas en la valuación de opciones se pueden extrapolar a las franquicias. Al respecto, se pueden realizar recomendaciones de estrategia en el manejo de las franquicias haciendo uso de las "griegas" de las opciones, en particular, se sabe que el cambio del valor de la opción con respecto al precio de ejercicio es negativo ($\partial c / \partial K < 0$), ello implica que se puede establecer que el franquiciatario tiene menos incentivos a rescindir el contrato si la indemnización a pagar al franquiciante (K_2) es demasiado alta, por lo cual tendrá que hacer uso de otras medidas para garantizar el cumplimiento del contrato.

La teoría de opciones es capaz incluso de predecir un umbral cuando la rescisión de contrato es una amenaza creíble y por lo tanto efectiva, dada por el punto donde la posición larga en la opción de recompra (υ_t) comienza a tener un valor distinto de cero. Del mismo modo, se puede establecer que la posibilidad de franquiciamiento se vuelve más atractiva para el franquiciatario conforme aumenta el valor del negocio original si se hace la analogía entre la delta de la opción ($\partial c / \partial S_t > 0$) y la delta de la concesión de la franquicia ($\partial \varphi / \partial F > 0$). En este caso, la posición corta de la opción, el franquiciante, no necesita preocuparse por el ejercicio de ésta, ya que no deberá desembolsar cantidad alguna para honrarla (bastará con la renta de la marca y la transmisión del conocimiento), pues los beneficios asociados están dados por la réplica del negocio original en un mercado virgen que no canibaliza sus ganancias al compartir su poder de marca.

Siguiendo el análisis de la opción asociada con la firma del contrato, se puede decir que a mayores inversiones K_1 requeridas para el lanzamiento de la franquicia, ésta se vuelve menos atractiva para el franquiciatario pues al igual que en las opciones financieras, la *kappa* de la opción es negativa ($\partial \varphi / \partial K_t < 0$). Este hecho lleva a pensar que de ser demasiado grande la inversión inicial, el franquiciatario puede ofrecer algún financiamiento al franquiciante para volver atractiva la posibilidad. Los esquemas dependerán de las condiciones crediticias locales.

Al analizar las políticas de cobro de regalías y asociarlas con la *vega* de las opciones financieras ($\partial \varphi / \partial \sigma_F > 0$), el lector entenderá que a mayor volatilidad la opción se vuelve más atractiva para el franquiciante (la prima recibida aumenta). Si a esto se añade que lo común es ver correlaciones positivas entre las ventas y los beneficios ($\rho > 0$), se entiende que el cobro basado en las ventas, las cuales tienen su propia fuente de incertidumbre (dW_t^2) y que añaden a la volatilidad del negocio, se convierte en el esquema más socorrido por los franquiciantes.

Conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha demostrado mediante un proceso de optimización dinámica estocástica que la tecnología empleada para valuar opciones financieras puede ser usada en la valuación franquicias, ya que éstas satisfacen la ecuación diferencial parcial de segundo orden que siguen todos los derivados independientemente del esquema de cobro de las regalías por uso de marca y transmisión del conocimiento *know how*. También se mostró que la validez del teorema de Modigliani y Miller en un entorno de optimización dinámica estocástica depende de la existencia de una estructura de plazo plana para que el *roll over* sobre las deudas sea perfecto.

Asimismo, se hicieron varias recomendaciones de estrategia de negocios asociadas con las sensibilidades de las opciones respecto de algunos de sus parámetros, haciendo énfasis en que la amenaza de rescisión del contrato sólo es creíble cuando la opción de recompra tiene algún valor y que a mayor compensación para el franquiciatario, menor es el control que puede ejercer el franquiciante sobre las unidades de negocio franquiciadas.

Se deja como línea de investigación futura el análisis de la política de pago de regalías como función de las ventas cuando se hace explícita la dependencia de los beneficios hacia las ventas, pues esto genera la necesidad del uso de la regla de la cadena en el cálculo de Itô. Aun con esta limitación, se puede adelantar que asociando una fuente de incertidumbre con las ventas, una política de cobro de regalías basada en las ventas es la mejor para los franquiciantes.

También queda como posible línea de investigación el validar los resultados cuando el bono asociado con el pago de regalías sigue una tasa corta distinta a la especificada por Vasicek (1977), pues esta modelación de la tasa corta tiene probabilidades positivas de arrojar tasas de interés negativas. En la literatura existen varias especificaciones de la tasa corta que enmiendan esta limitación.

Referencias bibliográficas

Abel, A. B. (1983). "Optimal Investment under Uncertainty", *American Economic Review*, vol. 73, num. 1, pp. 228-233.

Angelis, D. I. (2000). "Capturing the Option Value of R&D", *Research Technology Management*, vol. 43, num. 4, pp. 31-34.

Bell, G. K. (1995). "Volatile Exchange Rates and the Multinational Firm: Entry, Exit, and Capacity Options, Real Options", L. Trigeorgis (ed.), *Capital Investments: Models, Strategies, and Aplications*, Westport: Praeger Publisher, pp.163-181.

Bhattacharya, S. (1978). "Project Valuation with Mean-Reverting Cash-Flow Streams", *Journal of Finance*, vol. 33, num. 5, pp.1317-1331.

Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, vol. 81, num. 3. pp.637-659.

Broady, M. and J. Detemple (1996). "American Option Valuation: New Bounds, Approximations and a Comparison of Existing Methods", *Review of Financial Studies*, vol. 9, num. 4, pp. 1211-1250.

Copeland, T. and V. Antikarov (2001). *Real Options, A Practitioner's Guide*, Texere LLC Publishing.

Copeland, T., T. Koller, and J. Murrin (1991). *Valuation: Measuring and Managing the Value of Companies*, John Wiley & Sons.

Dixit, A. K. (1993). "Choosing among Alternative Discrete Investment Projects Under, Uncertainty", *Economic Letters*, vol.41, pp. 265-288.

——— (1993b). "Irreversible Investment and Competition Under Uncertainty, Capital, Investment and Development, Essays", Baki *et al*., *Memory of S. Chakravarty*, Blackwell.

Dixit, A. K. and R. S. Pindyck (2000). *Expandability, Reversibility, and Optimal Capacity Choice, Project Flexibility, Agency, and Competition, New Developments in the Theory and Applications of Real Options*, Brennan & Trigeorgis–Oxford University Press.

——— (1995). "The Options Approach to Capital Investment", *Harvard Business Review*, May-June.

——— (1994). *Investment under Uncertainty*, Princeton, NJ: Princeton University Press.

Gardner, D. and Y. Zhuang (2000). "Valuation of Power Generation Assets: A Real Options Approach", *Algo Research Quarterly*, vol.3, num. 3, pp. 9-20.

Gikhman, I. I. and A. V. Skorokhod (2003). *Introduction to the Theory of Stochastic Process, Dover Edition* (1969, printed in 1996. Original in Russian, 1965).

Hull, J. C. (2006). *Options, Futures, and Other Derivatives*, USA: Prentice Hall, 6th ed.

Kaslow, T. and R. S. Pindyck (1994). "Valuing Flexibility in Utility Planning", *The Electricity Journal,* vol.7, March, pp. 60-65.

Kulatilaka, N. (1995). "Operating Flexibilities in Capital Budgeting: Substitutability and Complementarity in Real Options", in L. Trigeorgis (ed.), *Capital Investments: Models, Strategies, and Aplications*, Westport, Conn.: Praeger Publisher.

Lintner, J. (1965). "The Valuation of Risk Assets and The Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets". *Review of Economics and Statistics*, vol. 47, num. 1, pp.13-37.

Lamberton, D. and B. Lapeyre (1996). *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall Eds., (Original French version 1991).

Markowitz H. M. (1970). "Portfolio Selection, Efficient Diversification of Coverage Policies and Taxes", *Journal of Finance*, vol. 25, pp. 1005-1027.

Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, num. 1, pp.141-183.

——— (1973b). "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model", *Econometrica*, vol. 41, num. 5, pp.867-887.

Merton, R. C. (1974). "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates", *Journal of Finance*, vol. 29, num. 2, pp.449-470.

Miller, M. and F. Modigliani (1963). "Corporate income taxes and the cost of capital: a correction", *American Economic Review*, vol. 53, num. 3, pp. 433–443.

Mikosch, T. (1998). "Elementary Stochastic Calculus with Finance in View", World Scientific Publishing.

Modigliani, F. and M. H. Miller (1958). "The Cost of Capital, Corporation Finance and The Theory of Investment", *American Economic Review*, vol. 48, num. 3, pp. 261-97.

Mossin, J. (1966). "Equilibrium in a Capital Asset Market", *Econometrica*, vol. 34, num. 4, pp. 768-783.

Sharpe, W. F. (1964). "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk", *Journal of Finance*, vol. 19, num. 3. pp. 425-442.

Treynor, J. L. (1962). "Towards a Theory of Market Value of Risky Assets, Unpublished manuscript". A final version was published in Robert A. Korajczyk (ed.) (1999), *Asset Pricing and Portfolio Performance: Models, Strategy and Performance Metrics*, London: Risk Books.

Vasicek, O. (1977). "An Equilibrium Characterisation of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, vol. 5, num. 2, pp. 177–188.

Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, 2da. Edición, México: Cengage Learning, México.