



Análisis Económico

ISSN: 0185-3937

analeco@correo.azc.uam.mx

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad
Azcapotzalco
México

Ortiz Ramírez, Ambrosio; Sánchez Daza, Alfredo; Venegas-Martínez, Francisco
Un modelo GARCH de valuación de derivados: una aplicación a opciones europeas sobre el IPC
Análisis Económico, vol. XXVI, núm. 62, 2011, pp. 31-50
Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco
Distrito Federal, México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=41319914003>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica
Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

Un modelo GARCH de valuación de derivados: una aplicación a opciones europeas sobre el IPC

(Recibido: enero/011–aprobado: junio/011)

*Ambrosio Ortiz Ramírez**

*Alfredo Sánchez Daza***

*Francisco Venegas-Martínez****

Resumen

En este trabajo se desarrolla un modelo para valuación de opciones europeas sobre el Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (IPC) bajo el supuesto de que la volatilidad del activo subyacente es conducida por un GARCH-M(1,1). El modelo propuesto combina las características de los modelos estructurales y estadísticos; es decir, se supone que la volatilidad es conducida por un GARCH-M(1,1) calibrado con datos históricos, pero el precio de equilibrio de la opción se basa en argumentos de no arbitraje. En este contexto, el modelo es capaz de reflejar los cambios en la volatilidad condicional del activo subyacente adecuadamente. Los resultados de la aplicación numérica del modelo sugieren que éste puede ser capaz de explicar desviaciones sistemáticas asociadas con el modelo clásico de Black y Scholes (1973).

Palabras clave: volatilidad, modelo GARCH, activos financieros contingentes.

Clasificación JEL: F31, F41, G1.

* Profesor-Investigador de la Escuela Superior de Economía del IPN (a7ortiz@yahoo.com.mx).

** Profesor-Investigador del Departamento de Economía de la UAM-Azcapotzalco (sanchezdaza@yahoo.com).

*** Profesor-Investigador de la Escuela Superior de Economía del IPN (fvenegas1111@yahoo.com.mx).

Introducción

La administración de riesgos es de gran relevancia en el análisis financiero. Por ejemplo, el modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) postula una relación directa entre el rendimiento de un activo y su riesgo, donde este último es determinado por la covarianza en los rendimientos en un activo particular y un cierto portafolio *benchmark*. Análogamente, el determinante más importante en el precio de una opción es la incertidumbre asociada al precio del activo subyacente, la cual es medida por su volatilidad. Uno de los hechos estilizados más prominentes en los rendimientos de los activos financieros es que su volatilidad cambia con el tiempo. En particular, periodos de movimientos grandes en precios se alternan con periodos durante los cuales los precios cambian poco. Esta característica se refiere comúnmente como *clusters* de volatilidad. Aunque la naturaleza estocástica de la volatilidad de activos financieros ha sido ampliamente estudiada (véanse por ejemplo Mandelbrot, 1963, 1963b, 1967; Fama, 1965).

La modelación y pronóstico de la volatilidad de los activos financieros que se negocian en los mercados ha sido objeto de vasta investigación empírica y teórica durante la década pasada por académicos y practicantes. Por ejemplo, la volatilidad es crucial en los modelos de valuación de activos y en estrategias de cobertura dinámica. La volatilidad, medida por la desviación estándar de los rendimientos, es usada a menudo como una medida “cruda” del riesgo total de los activos financieros. Muchos modelos de valor en riesgo para medir el riesgo de mercado requieren de la estimación o pronóstico de la volatilidad. La volatilidad del precio del activo subyacente en una opción entra directamente en la fórmula de Black y Scholes, para calcular las primas de las opciones que se negocian en los mercados financieros de todo el mundo.

Por lo anterior, desde un punto de vista empírico, es de suma importancia modelar cuidadosamente cualquier cambio temporal en el proceso de la volatilidad. El modelo de heteroscedasticidad condicional autorregresiva (ARCH, por sus siglas en inglés) y algunas de sus extensiones han resultado ser herramientas efectivas al respecto. De hecho, la literatura sobre ARCH se ha expandido de manera impresionante desde el artículo seminal de Engle (1982) y con su generalización en Bollerslev (1986).

En este contexto el objetivo central del presente trabajo es extender el modelo desarrollado por Duan (1995) y aplicarlo en la valuación de opciones europeas sobre el IPC. El trabajo está organizado como sigue: en la primera sección se desarrolla el modelo y sus características teóricas, en la sección dos se utiliza la simulación Monte Carlo para la implementación empírica del modelo; en la sección tres se presentan y analizan los resultados obtenidos. Al final se presentan las conclusiones.

1. El modelo

El modelo de Black y Scholes, no obstante su renombre, exhibe algunos sesgos sistemáticos. El punto crítico en la valuación de opciones es si se cumple que la distribución en el modelo teórico es consistente con las características de la distribución de la serie de tiempo del activo subyacente. Dado el hecho de que un cuerpo extenso en la literatura ha demostrado que el modelo de heteroscedasticidad condicional autorregresiva generalizada (GARCH, por sus siglas en inglés), proporciona una descripción adecuada de la dinámica del precio de un activo, Duan (1995) desarrolló un GARCH para valuar opciones y sugirió que éste puede evitar potencialmente los errores de valuación asociados al modelo Black y Scholes. Debido a que el GARCH para valuar opciones no tiene una solución en forma cerrada, la afirmación de su desempeño se prueba empíricamente.

A continuación se extiende el modelo de Duan (1995). Para ello se supone que los rendimientos (logarítmicos) diarios de un activo son independientes e idénticamente distribuidos de acuerdo con $N(\mu, \sigma^2)$:

$$R_{t+1} = \ln(S_{t+1}) - \ln(S_t) \sim N(\mu, \sigma^2).$$

El rendimiento agregado en T días se distribuye también normal con media μ y varianza σ^2 escaladas de la siguiente manera:

$$R_{t+1:t+T} = \ln(S_{t+T}) - \ln(S_t) \sim N(T\mu, T\sigma^2),$$

y el precio futuro del activo es:

$$S_{t+T} = S_t \exp(R_{t+1:t+T})$$

El modelo supone que el rendimiento esperado del activo subyacente es igual a la tasa libre de riesgo r más un premio al riesgo por volatilidad λ y un término de normalización. El rendimiento diario observado es igual al rendimiento esperado más un término de perturbación. La distribución condicional de este término se distribuye normal con media cero y la varianza sigue un GARCH (1,1) con apalancamiento. Al hacer que el rendimiento pasado entre en la varianza con la magnitud del signo del rendimiento, el efecto de apalancamiento crea una asimetría en la distribución de los rendimientos. Esta asimetría es importante para capturar el sesgo implícito observado en precios de opciones. Específicamente, se supone que el proceso de rendimientos del subyacente satisface:

$$R_{t+1} \equiv \ln(S_{t+1}) - \ln(S_t) = r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}z_{t+1} \quad (1)$$

Donde:

$$Z_{t+1} \sim N(0,1); \text{ y}$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1(\sigma_t z_t - \theta\sigma_t)^2 + \beta\sigma_t^2.$$

Obsérvese que el valor esperado y la varianza del rendimiento del periodo siguiente, condicional a toda la información disponible al tiempo t son, respectivamente:

$$\begin{aligned} E[R_{t+1} | \mathfrak{F}_t] &= r + \lambda\sigma_{t+1} \\ \text{Var}[R_{t+1} | \mathfrak{F}_t] &= \sigma_{t+1}^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Para una variable $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ se sabe que $E[\exp(x)] = \exp(\mu + \sigma^2/2)$, por lo que la esperanza condicional del proceso anterior es:

$$\begin{aligned} E\left[\frac{S_{t+1}}{S_t} \middle| F_t\right] &= E\left[\left(r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}z_{t+1}\right) \middle| \mathfrak{F}_t\right] \quad (3) \\ &= \exp\left(r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2\right) E[\exp(\sigma_{t+1}z_{t+1}) | \mathfrak{F}_t] \\ &= \exp\left(r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2\right) \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2\right) \\ &= \exp(r + \lambda\sigma_{t+1}) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2\right) \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2\right) \\ &= \exp(r + \lambda\sigma_{t+1}) \end{aligned}$$

En el desarrollo previo se ha utilizado el hecho que $\sigma_{t+1}z_{t+1} \sim N(0, \sigma_{t+1}^2)$. La ecuación del rendimiento esperado en (3) destaca el papel de λ como la prima al riesgo por volatilidad. El precio de la opción se obtiene bajo neutralidad al riesgo:

$$c = e^{-r(T-t)} E^* [\max (S_{t+T} - K, 0 \mid \mathfrak{F}_t)]$$

De donde se sigue que:

$$\begin{aligned} E^* \left[\frac{S_{t+1}}{S_t} \mid \mathfrak{F}_t \right] &= \exp(r) \\ \text{Var}^* [R_{t+1} \mid \mathfrak{F}_t] &= \sigma_{t+1}^2. \end{aligned} \quad (4)$$

De este modo, la tasa esperada de rendimiento en el activo con riesgo es igual a la tasa libre de riesgo, y la varianza condicional bajo neutralidad al riesgo es la misma que bajo el proceso original. Considérese el proceso siguiente:

$$R_{t+1} \equiv \ln (S_{t+1}) - \ln (S_t) = r - \frac{1}{2} \sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1} z_{t+1}^*$$

Donde:

$$z_{t+1}^* \sim N(0, 1); \text{ y}$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_t z_t^* - \lambda \sigma_t - \theta \sigma_t)^2 + \beta \sigma_t^2$$

En este caso, se puede verificar que la esperanza condicional es:

$$\begin{aligned} E^* \left[\frac{S_{t+1}}{S_t} \mid \mathfrak{F}_t \right] &= E^* \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1} z_{t+1}^* \right) \mid \mathfrak{F}_t \right] \\ &= \exp \left(r - \frac{1}{2} \sigma_{t+1}^2 \right) E^* [(\sigma_{t+1} z_{t+1}^*) \mid \mathfrak{F}_t] \\ &= \exp \left(r - \frac{1}{2} \sigma_{t+1}^2 \right) \exp \left(\frac{1}{2} \sigma_{t+1}^2 \right) \\ &= \exp(r) \end{aligned} \quad (5)$$

La expresión anterior satisface la primera condición en (4). Además, la varianza condicional bajo el proceso neutral al riesgo es:

$$\begin{aligned}
\text{Var}^* [R_{t+1} | \mathfrak{F}_t] &= E^* \left[\alpha_0 + \alpha_1 \left(\sigma_t z_t^* - \lambda \sigma_t - \theta \sigma_t \right)^2 + \beta \sigma_t^2 \middle| \mathfrak{F}_t \right] \quad (6) \\
&= E \left[\alpha_0 + \alpha_1 \left(R_t - r + \frac{1}{2} \sigma_{t+1}^2 - \lambda \sigma_t - \theta \sigma_t \right)^2 + \beta \sigma_t^2 \middle| \mathfrak{F}_t \right] \\
&= E \left[\alpha_0 + \alpha_1 \left(\sigma_t z_t^* - \theta \sigma_t \right)^2 + \beta \sigma_t^2 \middle| \mathfrak{F}_t \right] \\
&= \sigma_{t+1}^2
\end{aligned}$$

La última igualdad sale de la varianza del periodo $t + 1$, misma que es conocida a final del periodo t en el GARCH. Por lo tanto, se puede concluir que las condiciones para un proceso neutral al riesgo se cumplen.

2. Implementación del modelo: simulación de Monte Carlo

En esta sección se recurre a la simulación Monte Carlo para estimar el precio de una opción europea de compra:

$$c = e^{-r(T-t)} E^* [\max (S_{t+T} - K, 0) | \mathfrak{F}_t] \quad (7)$$

La simulación se hace como sigue. En primer lugar, observe que se puede eliminar un parámetro al escribir:

$$\begin{aligned}
\sigma_{t+1}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_t z_t^* - \lambda \sigma_t - \theta \sigma_t)^2 + \beta \sigma_t^2 \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_t z_t^* - (\lambda + \theta) \sigma_t)^2 + \beta \sigma_t^2 \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_t z_t^* - \lambda^{**} \sigma_t)^2 + \beta \sigma_t^2
\end{aligned}$$

Con:

$$\lambda^{**} \equiv \lambda + \theta.$$

Para una varianza condicional dada σ_{t+1}^2 y parámetros $\alpha_0, \alpha_1, \beta, \lambda^{**}$, se puede utilizar simulación Monte Carlo para crear posibles trayectorias de los rendimientos del activo. La estimación de los parámetros será discutida posteriormente. El siguiente diagrama ilustra la simulación de los rendimientos diarios a partir

del día $t + 1$ hasta el vencimiento en el día $t + T$, donde las $z_{i,j}^*$ se obtienen de un generador de números aleatorios de una distribución $N(0,1)$ y M es el número de trayectorias de los rendimientos simulados.

**Diagrama
Simulación de los rendimientos**

$$\sigma_{t+1}^2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} \hat{z}_{1,1}^* \rightarrow \hat{R}_{1,t+1}^* \rightarrow \hat{\sigma}_{1,t+2}^2 & \hat{z}_{1,2}^* \rightarrow \hat{R}_{1,t+2}^* \rightarrow \hat{\sigma}_{1,t+3}^2 & \cdots & \hat{z}_{1,T}^* \rightarrow \hat{R}_{1,t+T}^* \\ \hat{z}_{2,1}^* \rightarrow \hat{R}_{2,t+1}^* \rightarrow \hat{\sigma}_{2,t+2}^2 & \hat{z}_{2,2}^* \rightarrow \hat{R}_{2,t+2}^* \rightarrow \hat{\sigma}_{2,t+3}^2 & \cdots & \hat{z}_{2,T}^* \rightarrow \hat{R}_{2,t+T}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{z}_{M,1}^* \rightarrow \hat{R}_{M,t+1}^* \rightarrow \hat{\sigma}_{M,t+2}^2 & \hat{z}_{M,2}^* \rightarrow \hat{R}_{M,t+2}^* \rightarrow \hat{\sigma}_{M,t+3}^2 & \cdots & \hat{z}_{M,T}^* \rightarrow \hat{R}_{M,t+T}^* \end{array} \right.$$

A continuación se calcula la esperanza en (7) con el proceso neutral al riesgo. Primero se calcula el rendimiento simulado neutral al riesgo en el periodo $t + j$ para la trayectoria i de la simulación como:

$$\hat{R}_{i,t+j} = r - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{i,t+j}^2 + \hat{\sigma}_{i,t+j} \hat{z}_{i,j}^* \tag{8}$$

y la varianza es actualizada por:

$$\hat{\sigma}_{i,t+j+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\hat{\sigma}_{i,t+j} \hat{z}_{i,j}^* - \lambda^{**} \hat{\sigma}_{i,t+j} \right)^2 + \beta \hat{\sigma}_{i,t+j}^2 \tag{9}$$

En el primer periodo todas las trayectorias simuladas comienzan con la misma σ_{t+1}^2 , por lo que:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{i,t+1}^* &= r - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{i,t+1}^2 + \sigma_{i,t+1} \hat{z}_{i,1}^* \\ \hat{\sigma}_{i,t+2}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \left(\sigma_{t+1} \hat{z}_{i,1}^* - \lambda^{**} \sigma_{t+1} \right)^2 + \beta \sigma_{t+1}^2 \end{aligned} \tag{10}$$

Una vez que se han simulado, por ejemplo, 10,000 trayectorias ($M = 10,000$) cada día hasta la fecha de vencimiento T , se calculan precios hipotéticos del activo neutrales al riesgo al vencimiento como:

$$S_{i,t+T}^* = S_t \exp \left(\sum_{j=1}^T \hat{R}_{i,t+j}^* \right), i = 1, 2, \dots, M \quad (11)$$

El precio de la opción de compra se calcula como el promedio sobre los pagos futuros hipotéticos, traídos a valor presente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} c &= e^{-rT} E^* \left[\max \left(S_{t+T} - K, 0 \right) \mid \mathfrak{F}_t \right] \\ &\approx c_{GH} e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max \left(\hat{S}_{i,t+T}^* - K, 0 \right) \end{aligned} \quad (12)$$

En el caso de la opción de venta, se tiene que:

$$\begin{aligned} p &= e^{-rT} E^* \left[\max \left(K - S_{t+T}, 0 \right) \mid \mathfrak{F}_t \right] \\ &\approx p_{GH} e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max \left(K - \hat{S}_{i,t+T}^*, 0 \right) \end{aligned} \quad (13)$$

Donde:

GH denota GARCH.

De esta manera, se utiliza la simulación para calcular el pago promedio futuro, que es usado como una estimación del valor esperado en (12) y (13). A mayor número de realizaciones, el promedio converge a la esperanza. Con base en las ideas anteriores, se propone el siguiente algoritmo para determinar el precio de la opción:

- 1) Elegir y calibrar un GARCH para la volatilidad de los rendimientos del subyacente de la opción;
- 2) Generar muestras del GARCH elegido;
- 3) A partir de las muestras obtenidas, generar rendimientos del subyacente en un mundo neutral al riesgo;
- 4) Repetir (2) y (3) M veces con la función de pago de la opción;
- 5) Calcular el promedio de las M muestras de la función de pago para obtener una estimación de la esperanza del pago de la opción;
- 6) Descontar el promedio obtenido a la tasa libre de riesgo para obtener una estimación del valor de la opción.

Obsérvese que entre mayor sea el número de realizaciones, mayor será la precisión del resultado. Por supuesto, la precisión también depende del método usado para generar los números aleatorios.

4. Resultados

En esta sección se obtiene el precio de la opción de compra y de venta europea sobre el IPC siguiendo la metodología propuesta. En la estimación del modelo se utilizó el paquete econométrico *EViews*. En primer lugar, se calcularon los rendimientos logarítmicos, se hizo la prueba de Dickey-Fuller de raíz unitaria y se verificó que la serie fuera estacionaria. Las salidas de *EViews* con la estimación del modelo, la significancia estadística de los parámetros, los correlogramas de los residuales estandarizados y de los residuales estandarizados al cuadrado se muestran en el Apéndice.

Los resultados de la aplicación del modelo presentado en comparación con la fórmula de Black y Scholes se muestran en los cuadros 1 y 2. El modelo GARCH-M(1,1) especificado en (1) se ajusta a la serie en forma diaria del IPC del 2 de enero de 2003 al 29 de diciembre de 2006. Los valores estimados de los parámetros son: $\alpha_0 = 7.40 \times 10^{-6}$, $\alpha_1 = 0.097039$, $\beta_1 = 0.835823$, $\lambda = 0.181029$, con $\theta = 0$. Los valores de los parámetros implican que la desviación estándar estacionaria anualizada (basada en 365 días) es de 20.55%. La tasa de interés utilizada fue la tasa de interés interbancaria de equilibrio correspondiente al plazo. El valor del IPC para el 29 de diciembre del 2006 fue de $S_0 = 26,448.32$ puntos. Se tomaron los precios de ejercicio de 27,000, 27,500, 28,000, 28,500, 29,000, 29,500 y 30,000 puntos, para un plazo T de 20, 30 y 60 días, respectivamente. Se construye un indicador de desviación sistemática definido como:

$$D.S. = \frac{\text{Call(Put)}_{GH} - \text{Call(Put)}_{BS}}{\text{Call(Put)}_{BS}}$$

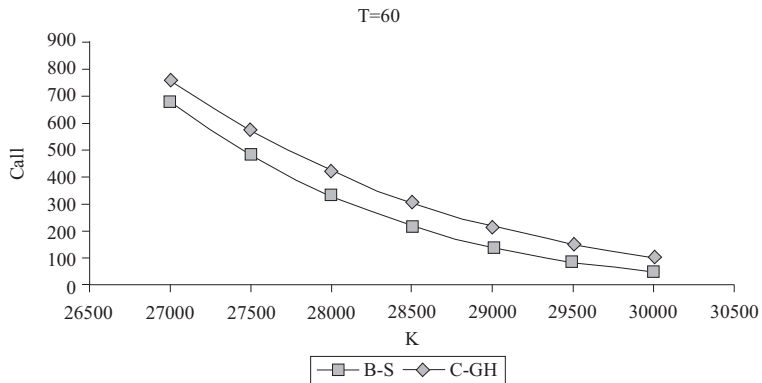
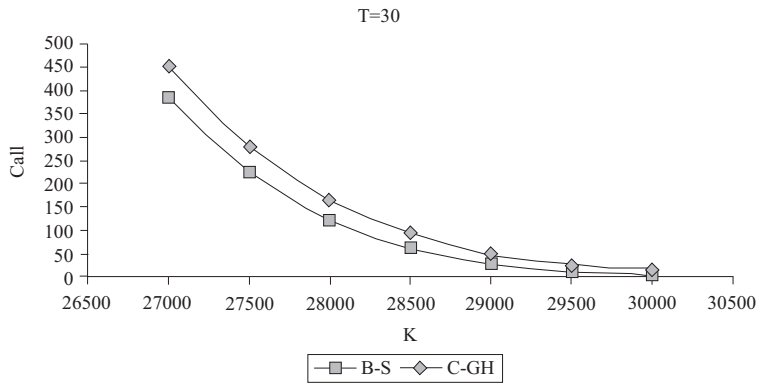
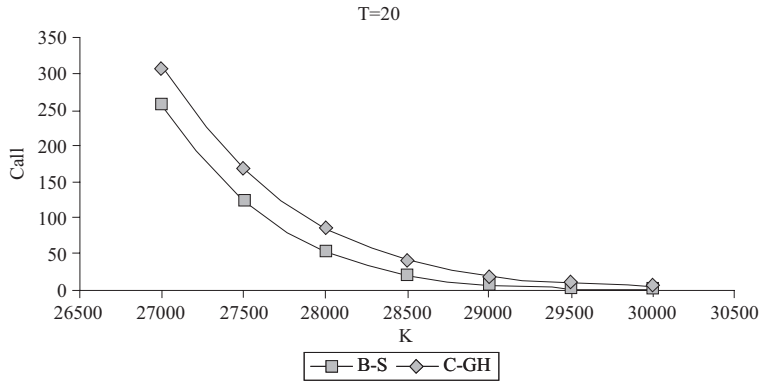
Cuadro 1
Precios de opciones de compra europeas simulados

<i>Días por vencer</i>	<i>K</i>	<i>B&S</i>	<i>c_{gh}</i>	<i>D.S.*</i>
<i>T=20</i>	27,000	256.73	308.04	19.99
	27,500	124.48	168.66	35.50
	28,000	53.32	85.28	59.95
	28,500	20.11	40.23	100.08
	29,000	6.67	18.73	180.74
	29,500	1.95	8.88	355.61
	30,000	0.50	4.12	720.87
<i>T=30</i>	27,000	385.49	450.66	16.91
	27,500	225.22	279.71	24.20
	28,000	122.11	164.76	34.92
	28,500	61.34	93.94	53.14
	29,000	28.54	50.22	75.98
	29,500	12.29	25.67	108.77
	30,000	4.91	12.89	162.37
<i>T=60</i>	27,000	682.02	762.22	11.76
	27,500	483.65	574.63	18.81
	28,000	331.57	424.13	27.92
	28,500	219.65	306.50	39.54
	29,000	140.58	217.13	54.46
	29,500	86.93	150.95	73.64
	30,000	51.97	102.10	96.47

*Desviación sistemática.

En el cuadro anterior se obtuvieron los precios de opciones de compra y venta europeas con el método de simulación Monte Carlo con $M = 5,000$. Se sabe que el modelo de Black y Scholes subvalúa opciones fuera del dinero, (véanse Black 1975; Gultekin *et al.*, 1982). Comparado con los precios obtenidos con el GARCH, el Cuadro 1 muestra que el modelo de Black y Scholes subvalúa opciones fuera del dinero, para $T=20$, 30 y 60 días. La desviación sistemática encontrada fluctúa entre los rangos desde 11.76% para $T=60$ hasta 720.87% para $T=20$. En promedio dicha desviación sistemática fue 108.17% para los plazos considerados, lo cual se puede observar a partir de la Gráfica 1. Se concluye que efectivamente, comparado con el modelo GARCH, el modelo Black y Scholes subvalúa opciones fuera del dinero.

Gráfica 1
Opción de compra B-S vs. c_{gh} para $T=20, 30, 60$



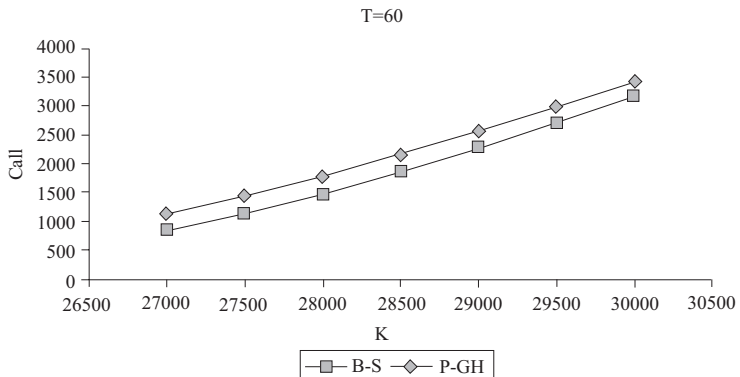
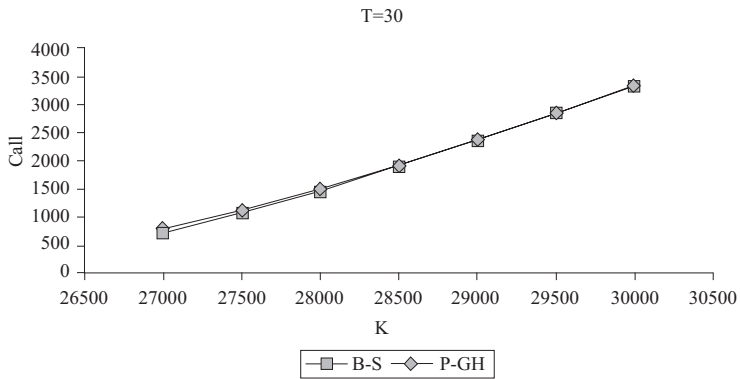
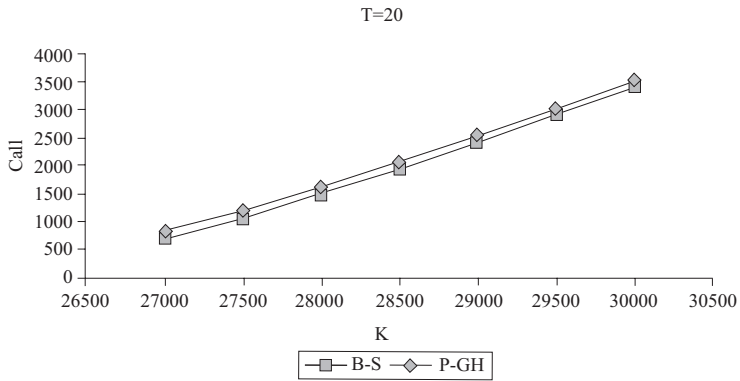
El Cuadro 2 muestra los precios obtenidos con el GARCH, para el caso de las opciones de venta europeas para $T=20$, 30 y 60 días. Se observa que el modelo Black y Scholes comparado con el GARCH subvalúa opciones dentro del dinero. La desviación sistemática encontrada fluctúa entre los rangos desde 0.14% para $T=30$ hasta 34.83% para $T=60$. En promedio, la desviación sistemática fue de 10.08% para los plazos considerados, lo cual se puede observar a partir de la Gráfica 2.

Cuadro 2
Precios de opciones de venta europeas simulados

<i>Días por vencer</i>	<i>K</i>	<i>B&S</i>	<i>p_{gh}</i>	<i>D.S.*</i>
<i>T=20</i>	27,000	676.77	829.87	22.62
	27,500	1,042.09	1,188.05	14.01
	28,000	1,468.49	1,602.23	9.11
	28,500	1,932.84	2,054.74	6.31
	29,000	2,416.97	2,530.80	4.71
	29,500	2,909.81	3,018.51	3.74
	30,000	3,405.92	3,511.32	3.09
<i>T=30</i>	27,000	732.89	794.05	8.34
	27,500	1,068.84	1,119.44	4.73
	28,000	1,461.96	1,500.83	2.66
	28,500	1,897.40	1,926.35	1.53
	29,000	2,360.81	2,378.96	0.77
	29,500	2,840.79	2,850.75	0.35
	30,000	3,329.62	3,334.31	0.14
<i>T=60</i>	27,000	839.91	1,132.47	34.83
	27,500	1,134.25	1,437.59	26.74
	28,000	1,474.87	1,779.80	20.67
	28,500	1,855.66	2,154.88	16.12
	29,000	2,269.29	2,558.21	12.73
	29,500	2,708.36	2,984.74	10.20
	30,000	3,166.10	3,428.59	8.29

* Desviación sistemática.

Gráfica 2
Opción de venta B-S vs. p_{gh} para $T=20, 30, 60$



Conclusiones

Se ha presentado en este trabajo un modelo GARCH para valuar opciones bajo valuación neutral al riesgo, el cual combina las características de los modelos estructurales y estadísticos; es decir, la volatilidad se supone es conducida por un GARCH-M(1,1) calibrado con datos históricos, pero el precio de equilibrio de la opción se basa en argumentos de no arbitraje condicional a la volatilidad del proceso GARCH. El modelo posee características deseables y presenta una posibilidad real de corregir los sesgos asociados al modelo de Black y Scholes.

Se pudo comprobar que efectivamente el modelo de Black y Scholes, comparado con el GARCH, subvalúa precios de opciones de compra (*call*) fuera del dinero. De manera análoga se comprobó que el modelo Black y Scholes, comparado con el GARCH, subvalúa opciones de venta (*put*) dentro del dinero.

Por último, cabe señalar que esta investigación no pretende ser exhaustiva, pues existen en la literatura un buen número de trabajos sobre la dinámica de la volatilidad, cuya estimación es la parte más importante en la valuación de opciones. Dichos trabajos desarrollan modelos en tiempo continuo para valuar opciones con volatilidad estocástica; por ejemplo, Hull-White (1987), Heston (1993), Heston-Nandi (2000) y Venegas-Martínez (2006), entre otros.

Referencias bibliográficas

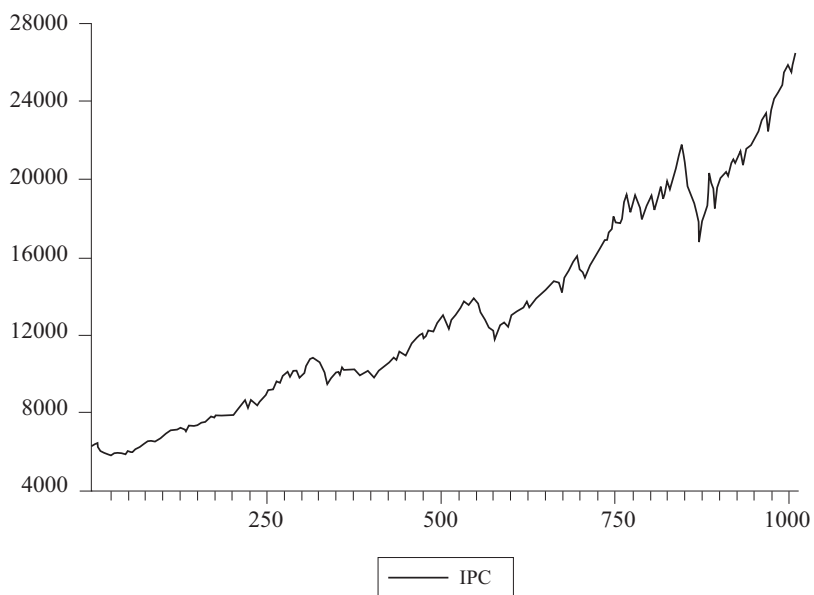
- Black, F. (1975). "Fact and Fantasy in the Use of Options", *Financial Analyst, Journal*, Vol. 31, No. 3, pp. 36-41 and 61-72.
- and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Bollerslev, T. (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, Vol. 31, No. 3, pp. 307-327.
- Brooks, C. (2002). *Introductory Econometrics for Finance*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Christoffersen, Peter F. (2003). *Elements of Financial Risk Management*, Academic Press.
- Duan, J. (1995). "The GARCH Option Pricing Model", *Mathematical Finance*, Vol. 5, No. 1, pp. 13-32.
- Engle, R. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, Vol. 50, No. 4, pp. 987-1008.

- Fama, E. F. (1965). "The Behavior of Stock Market Prices", *Journal of Business*, Vol. 38, No. 1, pp. 34-105.
- Glosten, L., R. Jagannathan and D. Runkle (1993). "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks", *Journal of Finance*, Vol. 48, No. 5, pp. 1779-1801.
- Gultekin, B., R. Rogalski and S. Tinic (1982). "Option Pricing Model Estimates: Some Empirical Results", *Financial Management*, Vol. 11, pp. 58-69.
- Hentschel, L. (1995). "All in the Family: Nesting Symmetric and Asymmetric GARCH Models", *Journal of Financial Economics*, Vol. 39, No. 1, pp. 71-104.
- Heston, S. I. (1993). "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options", *Review of Financial Studies*, Vol. 6, No. 2, pp. 327-343.
- and S. Nandi (2000). "A Closed-Form GARCH Option Pricing Model", *Review of Financial Studies*, Vol. 13, pp. 585-626.
- Hull, C. J. (2005). *Options Futures and Other Derivatives*, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.
- Mandelbrot, B. (1963). "The Valuation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, Vol. 36, No. 4, pp. 394-419.
- Nelson, D. (1991). "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach", *Econometrica*, Vol. 59, No. 2, pp. 347-370.
- Venegas-Martínez, F. (2006). *Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, México: International Thomson Editors.

Anexo

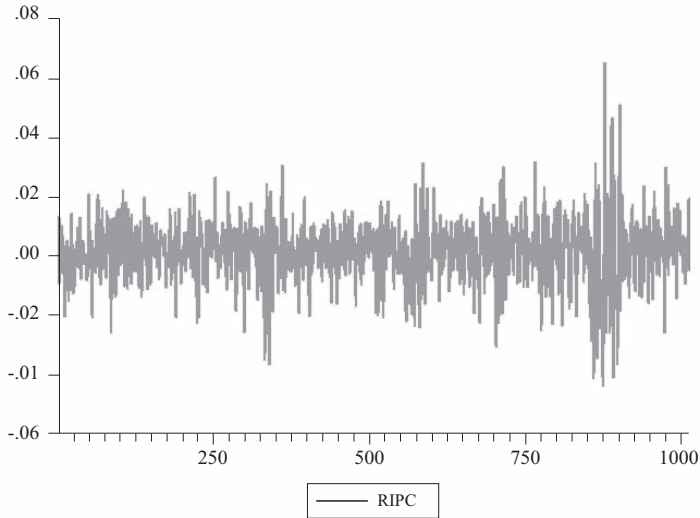
En la Gráfica A.1 se muestra la serie del IPC en forma diaria del 02/01/2003 al 29/12/2006, la muestra esta compuesta por 1,013 observaciones.

Gráfica A.1
Comportamiento del IPC, 02/01/2003-29/12/2006



En la Gráfica A.2 se muestran los rendimientos logarítmicos de la serie del IPC, los cuales se obtuvieron con $\ln S_t / \ln S_{t+1}$. Se puede observar que la serie presenta heterocedasticidad.

Gráfica A.2
Rendimiento del IPC con $\ln S_t / \ln S_{t+1}$



En el Cuadro A.1 se muestra la salida de la prueba de Dickey-Fuller, se observa que la serie es estacionaria.

Cuadro A.1
Prueba de Dickey-Fuller

Null Hypothesis: <i>RIPC</i> has a unit root		
Exogenous: Constant		
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=21)		
	<i>t</i> -Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-28.26461	0.0000
Test critical values:	1% level	-3.436599
	5% level	-2.864188
	10% level	-2.568232

*MacKinnon (1996) one-sided *p*-values.

La Gráfica A.3 muestra el correlograma de la serie *RIPC*. En la Gráfica A.4 se muestra el correlograma de los residuales estandarizados con la estadística *Q*. Por último, la Gráfica A.5 se muestra el correlograma de los residuales estandarizados al cuadrado.

Gráfica A.3
Correlograma de la serie RIPC

<i>Autocorrelation</i>	<i>Partial Correlation</i>	<i>AC</i>	<i>PAC</i>	<i>Q-S</i>	<i>Prob</i>	
1	1	1	0.116	0.116	13.696	0000
0.1	0.1	2	-0.052	-0.066	16.442	0000
0.1	0.1	3	-0.049	-0.035	18.856	0000
0.1	0.1	4	-0.066	-0.061	23.324	0000
0.1	0.1	5	0.023	0.034	23.856	0000
0.1	0.1	6	0.039	0.024	25.378	0000
0.1	0.1	7	-0.022	-0.032	25.879	0001
0.1	0.1	8	-0.061	-0.054	29.678	0000
0.1	0.1	9	0.008	0.025	29.742	0000
0.1	0.1	10	-0.014	-0.024	29.956	0001
0.1	0.1	11	0.013	0.011	30.134	0002
0.1	0.1	12	0.042	0.032	31.953	0001
0.1	0.1	13	-0.002	-0.004	31.956	0002
0.1	0.1	14	-0.004	0.001	31.971	0004
0.1	0.1	15	0.007	0.008	32.016	0006
0.1	0.1	16	0.028	0.029	32.799	0008
0.1	0.1	17	0.009	0.001	32.875	0012
0.1	0.1	18	-0.010	-0.013	32.984	0017
0.1	0.1	19	0.015	0.026	33.215	0023
0.1	0.1	20	0.030	0.032	34.157	0025
0.1	0.1	21	-0.062	-0.074	38.173	0012
0.1	0.1	22	0.004	0.024	38.189	0017
0.1	0.1	23	-0.007	-0.011	38.243	0024
0.1	0.1	24	-0.021	-0.017	38.720	0029
0.1	0.1	25	-0.037	-0.046	40.132	0028
0.1	0.1	26	-0.012	-0.001	40.274	0037
0.1	0.1	27	-0.051	-0.051	42.944	0027
0.1	0.1	28	-0.025	-0.023	43.576	0031
0.1	0.1	29	-0.083	-0.100	50.786	0007
0.1	0.1	30	-0.013	0.012	50.965	0010
0.1	0.1	31	0.002	-0.023	50.970	0013
0.1	0.1	32	0.058	0.050	54.523	0008
0.1	0.1	33	0.014	-0.009	54.726	0010
0.1	0.1	34	0.025	0.036	55.379	0012
0.1	0.1	35	-0.008	-0.018	55.455	0015
0.1	0.1	36	-0.014	-0.002	55.657	0019

Gráfica A.4
Correlograma de los residuales estandarizados

<i>Autocorrelation</i>	<i>Partial Correlation</i>	<i>AC</i>	<i>PAC</i>	<i>Q-S</i>	<i>Prob</i>	
1 █	1 █	1	0.068	0.068	4.7027	0.030
1 █ 1	1 █ 1	2	0.021	0.017	5.1627	0.076
1 █ 1	1 █ 1	3	-0.044	-0.047	7.1141	0.068
1 █ 1	1 █ 1	4	-0.008	-0.003	7.1864	0.126
1 █ 1	1 █ 1	5	-0.034	-0.031	8.3458	0.138
1 █ 1	1 █ 1	6	0.018	0.021	8.6813	0.192
1 █ 1	1 █ 1	7	0.060	0.059	12.342	0.090
1 █ 1	1 █ 1	8	0.034	0.022	13.511	0.095
1 █ 1	1 █ 1	9	-0.003	-0.008	13.522	0.140
1 █ 1	1 █ 1	10	0.010	0.014	13.619	0.191
1 █ 1	1 █ 1	11	-0.017	-0.015	13.920	0.237
1 █ 1	1 █ 1	12	0.010	0.015	14.020	0.299
1 █ 1	1 █ 1	13	-0.003	-0.003	14.027	0.372
1 █ 1	1 █ 1	14	0.065	0.060	18.374	0.190
1 █ 1	1 █ 1	15	-0.013	-0.023	18.550	0.235
1 █ 1	1 █ 1	16	0.089	0.088	26.620	0.046
1 █ 1	1 █ 1	17	-0.011	-0.017	26.752	0.062
1 █ 1	1 █ 1	18	-0.006	-0.008	26.787	0.083
1 █ 1	1 █ 1	19	-0.013	-0.001	26.970	0.105
1 █ 1	1 █ 1	20	-0.002	-0.005	26.975	0.136
1 █ 1	1 █ 1	21	-0.071	-0.072	32.126	0.057
1 █ 1	1 █ 1	22	-0.009	-0.005	32.210	0.074
1 █ 1	1 █ 1	23	0.014	0.009	32.412	0.092
1 █ 1	1 █ 1	24	0.031	0.019	33.422	0.095
1 █ 1	1 █ 1	25	-0.029	-0.030	34.281	0.102
1 █ 1	1 █ 1	26	0.014	0.012	34.484	0.123
1 █ 1	1 █ 1	27	-0.013	-0.006	34.654	0.148
1 █ 1	1 █ 1	28	0.017	0.019	34.947	0.171
1 █ 1	1 █ 1	29	-0.025	-0.018	35.579	0.186
1 █ 1	1 █ 1	30	0.074	0.062	41.299	0.082
1 █ 1	1 █ 1	31	-0.014	-0.017	41.497	0.099
1 █ 1	1 █ 1	32	0.084	0.078	48.887	0.028
1 █ 1	1 █ 1	33	0.015	0.015	49.123	0.035
1 █ 1	1 █ 1	34	0.022	0.018	49.624	0.041
1 █ 1	1 █ 1	35	-0.014	0.001	49.841	0.050
1 █ 1	1 █ 1	36	-0.006	-0.008	49.885	0.062

Gráfica A.5
Correlograma de los residuales estandarizados al cuadrado

<i>Autocorrelation</i>	<i>Partial Correlation</i>	<i>AC</i>	<i>PAC</i>	<i>Q-Sist</i>	<i>Prob</i>	
1 1	1 1	1	-0.031	-0.031	1.0060	0.316
1 1	1 1	2	0.017	0.016	1.3020	0.522
1 1	1 1	3	0.005	0.006	1.3259	0.723
1 1	1 1	4	0.016	0.016	1.5813	0.812
1 1	1 1	5	-0.001	0.000	1.5822	0.903
1 1	1 1	6	0.023	0.023	2.1274	0.908
1 1	1 1	7	0.007	0.008	2.1787	0.949
1 1	1 1	8	0.039	0.038	3.7154	0.882
1 1	1 1	9	-0.030	-0.028	4.6110	0.867
1 1	1 1	10	0.049	0.046	7.1098	0.715
1 1	1 1	11	-0.041	-0.038	8.8150	0.639
1 1	1 1	12	0.017	0.012	9.1175	0.693
1 1	1 1	13	-0.001	0.001	9.1191	0.764
1 1	1 1	14	0.033	0.030	10.257	0.743
1 1	1 1	15	0.043	0.047	12.148	0.668
1 1	1 1	16	-0.039	-0.041	13.677	0.623
1 1	1 1	17	-0.006	-0.007	13.714	0.687
1 1	1 1	18	-0.003	-0.008	13.720	0.747
1 1	1 1	19	-0.020	-0.016	14.153	0.775
1 1	1 1	20	0.000	-0.007	14.153	0.823
1 1	1 1	21	-0.013	-0.010	14.321	0.855
1 1	1 1	22	0.026	0.022	15.013	0.862
1 1	1 1	23	-0.007	-0.005	15.071	0.892
1 1	1 1	24	0.002	0.004	15.074	0.919
1 1	1 1	25	-0.005	-0.007	15.099	0.939
1 1	1 1	26	0.001	0.007	15.100	0.955
1 1	1 1	27	0.022	0.021	15.611	0.960
1 1	1 1	28	0.055	0.055	18.769	0.905
1 1	1 1	29	-0.021	-0.019	19.212	0.916
1 1	1 1	30	0.016	0.011	19.481	0.929
1 1	1 1	31	-0.057	-0.051	22.825	0.855
1 1	1 1	32	0.055	0.047	25.952	0.766
1 1	1 1	33	0.034	0.043	27.169	0.752
1 1	1 1	34	-0.009	-0.011	27.252	0.787
1 1	1 1	35	0.010	0.008	27.352	0.818
1 1	1 1	36	0.021	0.014	27.815	0.834