



Tecnología Química

ISSN: 0041-8420

revista.tec.quimica@fiq.uo.edu.cu

Universidad de Oriente

Cuba

Díaz García, Armando A.; Rodríguez Tarragó, Héctor  
ESTUDIO COMPARATIVO DE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES  
PARCIALES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS APLICADAS A LA TRANSFERENCIA  
DE CALOR UTILIZANDO BALANCES DE CALOR NO ESTACIONARIOS Y  
SEUDOESTACIONARIOS

Tecnología Química, vol. XXV, núm. 3, septiembre-diciembre, 2005, pp. 41-51

Universidad de Oriente

Santiago de Cuba, Cuba

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=445543748005>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

---

# ESTUDIO COMPARATIVO DE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS APLICADAS A LA TRANSFERENCIA DE CALOR UTILIZANDO BALANCES DE CALOR NO ESTACIONARIOS Y SEUDOESTACIONARIOS

Armando A. Díaz García, Héctor Rodríguez Tarragó  
Universidad de Oriente

*En el presente trabajo se hace un estudio de los resultados numéricos obtenidos utilizando modelos estacionarios y seudoestacionarios para determinar perfiles de temperatura en coordenadas cilíndricas.*

*Se utiliza como modelo un cilindro sólido homogéneo de longitud infinita con propiedades físicas constantes sometido a calentamiento por convección. El cuerpo se encuentra a una temperatura inicial constante, y se sumerge abruptamente en una corriente de un fluido de temperatura mayor. Se obtienen los modelos en ecuaciones en diferencias finitas para describir el comportamiento del perfil de temperatura en el tiempo y se lleva a cabo un estudio de los resultados numéricos obtenidos con dos cuerpos de propiedades físicas diferentes, concluyendo que en el intervalo del número de Fourier estudiado ( $Fo < 0,05$ ) los modelos presentan resultados muy similares para la temperatura de la pared y con diferencias cerca del 5 % para los puntos vecinos a la pared.*

*In the present work is made a study of the obtained numeric results using stationary and pseudostationary models to determine profiles of temperature in cylindrical coordinates.*

*It is used as model a homogeneous solid cylinder of infinite length with constant physical properties subjected to heating by natural convection. The body is at a constant initial temperature, and dives abruptly in a current of a fluid of more temperature.*

*The models are obtained in equations in finite differences to describe the behaviour of the profile of temperature in the time and it is carried out a study of the numeric results obtained with two bodies of different physical properties, concluding that in the interval of number of Fourier studied ( $Fo < 0,05$ ) the models present very similar results for the wall temperature and with near differences to 5 % for the neighbouring points to the wall.*

## Introducción

En un artículo anterior de título semejante, pero aplicado a coordenadas rectangulares, se presentó un estudio de las diferencias observadas en los resultados de los balances de energía calorífica cuando se empleaban condiciones límites, aplicando balances no estacionarios y seudoestacionarios en un volumen de control, observándose discrepancias de un 5 % y más en los casos estudiados.

Podríamos esperar resultados similares en las coordenadas cilíndricas, sin embargo, existen condiciones geométricas en éstas que podrían hacer variar los resultados, ya que el área de transferencia de calor en la dirección radial es variable.

En este trabajo, pretendemos evaluar las diferencias existentes aplicando ambas soluciones a

una misma situación: un cilindro de longitud infinita que se calienta por convección en una corriente de fluido.

Se ha utilizado el modelo correspondiente a un cilindro infinito con vistas a simplificar el número de ecuaciones y balance por desarrollar. Considerar un cilindro de longitud  $L$  implicaría balances en la superficie del tope del cilindro, en su centro y su borde, lo que incrementaría notablemente los cálculos y la dimensión de este artículo sin necesidad.

## Fundamentos teóricos

### Generalidades

El método numérico más difundido para la solución de ecuaciones diferenciales parciales es

el de sustituir las derivadas por sus equivalentes en diferencias finitas, de acuerdo con esto, para la transferencia de calor en un cuerpo en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_n^{p+1} - T_n^p}{\Delta t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{n+1}^p - T_n^p}{\Delta r} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{T_{n+1}^p - 2T_n^p + T_{n-1}^p}{\Delta r^2} \quad (3)$$

donde:

$$r = n \cdot \Delta r \quad y \quad t = p \cdot \Delta t \quad (4)$$

De este modo, una ecuación en derivadas parciales se convierte en algebraica cuyas variables es común representarlas en una red de puntos distribuidos igualmente en el espacio a intervalos  $\Delta t$  y  $\Delta r$ .

Para el caso de la transferencia de calor por conducción en un cuerpo cilíndrico de longitud infinita la ecuación diferencial que describe la distribución de temperatura en todos los puntos interiores del cuerpo sólido puede ser obtenida por un balance microscópico de energía calorífica y viene dada por:

$$\rho \cdot Cp \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right] \quad (5)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) en (5), y arreglando se obtiene la ecuación discreta expresada en diferencias finitas:

$$T_n^{p+1} = \left[ 1 - Fo \left( 2 + \frac{1}{n} \right) \right] \cdot T_n^p + Fo \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right) T_{n+1}^p + T_{n-1}^p \right] \quad (6)$$

donde  $Fo$  es el número de Fourier expresión adimensional que viene, en este caso, definido por:

$$Fo = \frac{k \cdot \Delta t}{\rho \cdot Cp \cdot \Delta r^2} \quad (7)$$

La ecuación diferencial (5) no es aplicable para los puntos del eje central, ya que presenta un punto de discontinuidad en el punto  $P(0)$ . Observe que en el punto  $r = 0$  se cumple que  $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ . Para eliminar la discontinuidad se aplica el teorema de L'Hospital, y de acuerdo con éste:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial T}{\partial r}}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\frac{\partial}{\partial r}(r)} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \quad (8)$$

Sustituyendo en (5) el resultado obtenido en (8), para los puntos del eje central la ecuación diferencial viene dada por:

$$\rho \cdot Cp \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = 2 \cdot k \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \quad (9)$$

Sustituyendo (1) y (3) aplicadas para  $n=0$  en (9) se obtiene:

$$\rho \cdot Cp \cdot \left( \frac{T_0^{p+1} - T_0^p}{\Delta t} \right) = 2 \cdot k \cdot (T_1^p - 2T_0^p - T_{-1}^p) \quad (10)$$

Como  $T_1$  y  $T_{-1}$  son los puntos vecinos situados a ambos lados del eje central, ambos son iguales por simetría, y finalmente para los puntos del centro la ecuación (10) queda finalmente:

$$\rho \cdot Cp \cdot \left( \frac{T_0^{p+1} - T_0^p}{\Delta t} \right) = 4 \cdot k \cdot (T_1^p - T_0^p)$$

$$T_0^{p+1} = (1 - 4 \cdot Fo) T_0^p + 4 \cdot Fo \cdot T_1^p \quad (11)$$

Las ecuaciones discretas (6) y (11) describen la variación del perfil de temperatura con el tiempo en los puntos interiores, y se dice que son explícitas; en ellas está restringida su convergencia y estabilidad para valores de  $Fo$  y  $n$  que garanticen que  $1 \geq \left[ 1 - Fo \left( 2 + \frac{1}{n} \right) \right] \geq 0$  y  $1 \geq 1 - 4 Fo \geq 0$ .

Como el número de Fourier depende de los incrementos de espacio y tiempo, éstos deben tomar valores que satisfagan esta condición:

## Condiciones límites

Cuando las temperaturas en la superficie son conocidas, la ecuación (5) puede ser evaluada fácilmente, pues son conocidos los valores extremos de los intervalos de temperatura en todos los casos; sin embargo, cuando la temperatura en la superficie no es conocida, no es posible evaluar dicha ecuación y es necesario obtener nuevas ecuaciones discretas que describan la temperatura en esos puntos cuya temperatura se desconoce, basándose en balances de energía en la superficie de la red de puntos.

En el caso que nos ocupa, la transferencia de calor se efectúa en la pared lateral del cilindro, por lo que es necesario llevar a cabo el balance de calor en un volumen de control que contenga los puntos de la pared y los nodos vecinos al punto base, en la dirección  $r$ . El punto base en la superficie lateral viene dado por todos los puntos o nodos contenidos en el plano  $P(N, Z)$ , teniendo en cuenta que se considerará un cilindro de longitud infinita, no habrá gradientes en la dirección  $Z$  y no existe transferencia de calor en esa dirección, como tampoco la hay en la dirección  $\theta$ , por lo que los puntos en la pared tienen todos la misma temperatura y pueden expresarse sólo en función de  $N$ .

Un punto base de la superficie a temperatura  $T(N)$  tendrá a  $T(N-1)$  como punto vecino en la dirección  $r$ . Observe que en el otro lado del punto base no hay transferencia de calor por conducción, sino por convección con el aire ambiente.

Para el flujo por conducción que se establece en el volumen de control de la pared lateral cuyo punto base es  $T(N)$ :

$$Q_{\text{conducción}} = \frac{k}{\Delta r} A_{\text{Int}} (T_{N-1}^p - T_N^p) \quad (12)$$

Para el flujo por convección:

$$Q_{\text{convección}} = h_{\text{lat}} \cdot A_{\text{lat}} \cdot (T_{\infty} - T_N^p) \quad (13)$$

Si el régimen es estacionario:

$$Q_{\text{convección}} + Q_{\text{conducción}} = 0 \quad (14)$$

Si el régimen es no estacionario, entonces tiene lugar la acumulación del calor en el volumen de control, y es aceptado que la mejor aproximación en los cálculos se logra suponiendo que la acumulación tiene lugar en la mitad del volumen de control, según esto:

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{Vi}{2} \cdot \frac{(T_N^{p+1} - T_N^p)}{\Delta t} = Q_{\text{convección}} + Q_{\text{conducción}} \quad (15)$$

De este modo, sustituyendo las ecuaciones (12) y (13) en (14) o (15), es posible obtener una

ecuación discreta particular para describir la temperatura en la pared del cilindro, para todos los puntos, en régimen estacionario y no estacionario respectivamente.

Sustituyendo (12) y (13) en (14) para régimen estacionario se obtiene:

$$\frac{k}{\Delta r} A_{\text{Int}} (T_{N-1}^p - T_N^p) + h_{\text{lat}} \cdot A_{\text{Ext}} \cdot (T_{\infty} - T_N^p) = 0 \quad (16)$$

Sustituyendo (12) y (13) en (15) para régimen no estacionario se obtiene:

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{Vi}{2} \cdot \frac{(T_N^{p+1} - T_N^p)}{\Delta t} = h_{\text{lat}} \cdot A_{\text{lat}} \cdot (T_{\infty} - T_N^p) + \frac{k}{\Delta r} A_{\text{Int}} (T_{N-1}^p - T_N^p) \quad (17)$$

donde el volumen y las áreas del volumen de control vienen dadas por:

$$\begin{aligned} A_{\text{Int}} &= 2\pi \left( R - \frac{\Delta r}{2} \right) \cdot L = 2\pi N \left( 1 - \frac{1}{2N} \right) \Delta r \cdot L \\ A_{\text{Ext}} &= 2\pi R L = 2\pi N \Delta r L \\ V_c &= \pi [R^2 - (R - \Delta r)^2] L = 2\pi N \left( 1 - \frac{1}{2N} \right) (\Delta r)^2 L \end{aligned} \quad (18)$$

Sustituyendo las expresiones de (18) en (16) se obtiene para régimen estacionario, teniendo en cuenta que:

$$Bio = \frac{h \cdot \Delta r}{k}$$

$$T_N^{p+1} = \frac{T_{N-1}^p + \frac{Bio}{1 - \frac{1}{2N}} T_{\infty}}{1 + \frac{Bio}{1 - \frac{1}{2N}}} \quad (19)$$

Observe que para hacer posible la utilización del balance estacionario en la evaluación de las condiciones límites, se ha supuesto que  $T_N^p = T_N^{p+1}$ , lo cual es posible de admitir cuando los intervalos de tiempo utilizados son pequeños.

Para régimen no estacionario sustituyendo (18) en la ecuación (17) se obtiene haciendo:

$$Fo = \frac{k \Delta t}{\rho \cdot C_p \cdot \Delta r^2}$$

$$T_N^{p+1} = \left[ 1 - 2 \cdot Fo \left( 1 + \frac{Bio}{1 - \frac{1}{2N}} \right) \right] T_N^p + 2 \cdot Fo \left[ T_{N-1}^p + \frac{Bio}{1 - \frac{1}{2N}} T_{\infty} \right] \quad (20)$$

## Objetivos

En muchos cálculos de ingeniería, es frecuente utilizar balances estacionarios en la solución de problemas no estacionarios sobre la base de suponer que en un intervalo de tiempo pequeño la acumulación de calor es despreciable. Los modelos estacionarios son más sencillos de elaborar y procesar, y tienen la ventaja, en la solución de las ecuaciones diferenciales que lo describen, de ser totalmente explícitos, por lo que no introducen ningún tipo de restricciones para los valores de los incrementos.

En este trabajo se pretende estimar la diferencia que se obtiene en los resultados de los cálculos en fenómenos de transferencia de calor por convección cuando se utilizan modelos estacionarios para la evaluación de las condiciones límites en comparación con los obtenidos cuando se emplean modelos no estacionarios.

### Modelo físico

El modelo seleccionado para el cálculo es un cuerpo homogéneo en forma de cilindro de radio  $R$  y longitud infinita, que se encuentra inicialmente a una temperatura  $T_{\text{inicial}}$ , y en un momento  $t = 0$  se

sumerge en un fluido a temperatura  $T_{\text{exterior}}$  diferente de la temperatura del cuerpo, por lo que tiene lugar un proceso de intercambio de calor por convección que trae por consecuencias un cambio de la temperatura en el tiempo.

Para simplificar el análisis, se supone que las propiedades físicas y térmicas son constantes.

### Modelos matemáticos

Los modelos matemáticos han sido deducidos según los pasos mostrados en el acápite 2, y con vistas a disminuir al máximo las diferencias entre los modelos por comparar se calcularán, en el caso del modelo seudoestacionario, los puntos interiores mediante la discretización de la ecuación diferencial (4) que viene dada por la ecuación (5), o sea, que para todos los puntos interiores, en todos los casos, se utilizará el modelo no estacionario.

### Modelos no estacionarios

#### Puntos interiores

A partir de la ecuación diferencial (5) se obtiene la ecuación (6) para los puntos tales que  $0 < n < N$  y (11) para los puntos en  $n=0$

$$T_n^{p+1} = \left[ 1 - Fo \left( 2 + \frac{1}{n} \right) \cdot \right] \cdot T_n^p + Fo \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right) T_{n+1}^p + T_{n-1}^p \right] \text{ para } 0 < n < N \quad (21)$$

$$T_0^{p+1} = (1 - 4 \cdot Fo) T_0^p + 4 \cdot Fo \cdot T_1^p \quad \text{para } n = 0 \quad (22)$$

#### Puntos correspondientes a la pared

Teniendo en cuenta la simetría del sistema, sólo es necesario considerar la superficie lateral.

Para la pared lateral:

$$T_N^{p+1} = \left[ 1 - 2 \cdot Fo \left( 1 + \frac{Bio}{1 - \frac{1}{2N}} \right) \right] T_N^p + 2 \cdot Fo \left[ T_{N-1}^p + \frac{Bio}{1 - \frac{1}{2N}} T^\infty \right] \text{ para } n = N \quad (23)$$

Por un balance de calor desarrollado en el volumen de control, tal como se mostró en el acápite Condiciones límites, se obtiene el siguiente modelo matemático:

## Modelos seudoestacionarios

### Puntos interiores

Son los mismos modelos obtenidos de la discretización de la ecuación diferencial (5) dados por las ecuaciones (21) y (22)

### Puntos correspondientes a la pared

El balance se efectúa de la manera descrita en el acápite *Condiciones límites y las áreas de transferencia en el volumen de control* son las mismas que las calculadas para el modelo no estacionario.

$$T_N^{p+1} = \frac{T_{N-1}^p + \frac{Bio}{1 - \frac{1}{2N}} T_\infty}{1 + \frac{Bio}{1 - \frac{1}{2N}}} \quad (24)$$

Observe, que en la ecuación la temperatura calculada en un tiempo  $t$  se supone que es la correspondiente al tiempo  $(t+\Delta t)$ , en esto consiste la denominación de seudoestacionario.

### Cálculo de los perfiles de temperatura

Para el cálculo de los perfiles de temperatura en régimen no estacionario utilizando ambos modelos propuestos se utilizaron dos materiales con las características que se dan en la siguiente tabla:

Material	.k (Kcal/h.m.°C)	Cp (Kcal/Kg.°C)	ρ (Kg/m <sup>3</sup> )
I	0,165	0,22	875
II	0,50	0,25	1 200

La temperatura inicial del sólido se tomó igual a 300 °C, la temperatura exterior del ambiente igual a 30 °C y el tiempo total de exposición o enfriamiento de 5 h.

Se trabajó a dos regímenes de enfriamiento, uno lento con coeficiente de transferencia de calor por convección (h) en la película igual a 4 kcal/h.m<sup>2</sup>.°C constante con los cambios de temperatura, y uno más rápido con coeficiente de 25 kcal/h.m<sup>2</sup>.°C. Programando las ecuaciones en Visual Basic según el siguiente algoritmo se obtuvieron los resultados mostrados en las tablas.

## Análisis de los resultados

En las tablas de la 1 a la 6 se presentan los perfiles de temperaturas para ambos materiales, observándose que la desviación máxima para la temperatura en la pared y demás puntos es prácticamente despreciable. Cuando se utilizan incrementos de temperatura y espacios lo suficientemente pequeños para espacios de tiempo y espacio groseros ( $\Delta t = 0,11 h$  y  $\Delta r = 0,05 m$ ) se obtienen diferencias ligeramente superiores al 5 % como puede observarse en la tabla 3. En todos los casos, se tomaron las siguientes condiciones para el enfriamiento del cilindro inmerso en la corriente de fluido:

Temperatura inicial = 300 °C

Temperatura del fluido = 30 °C

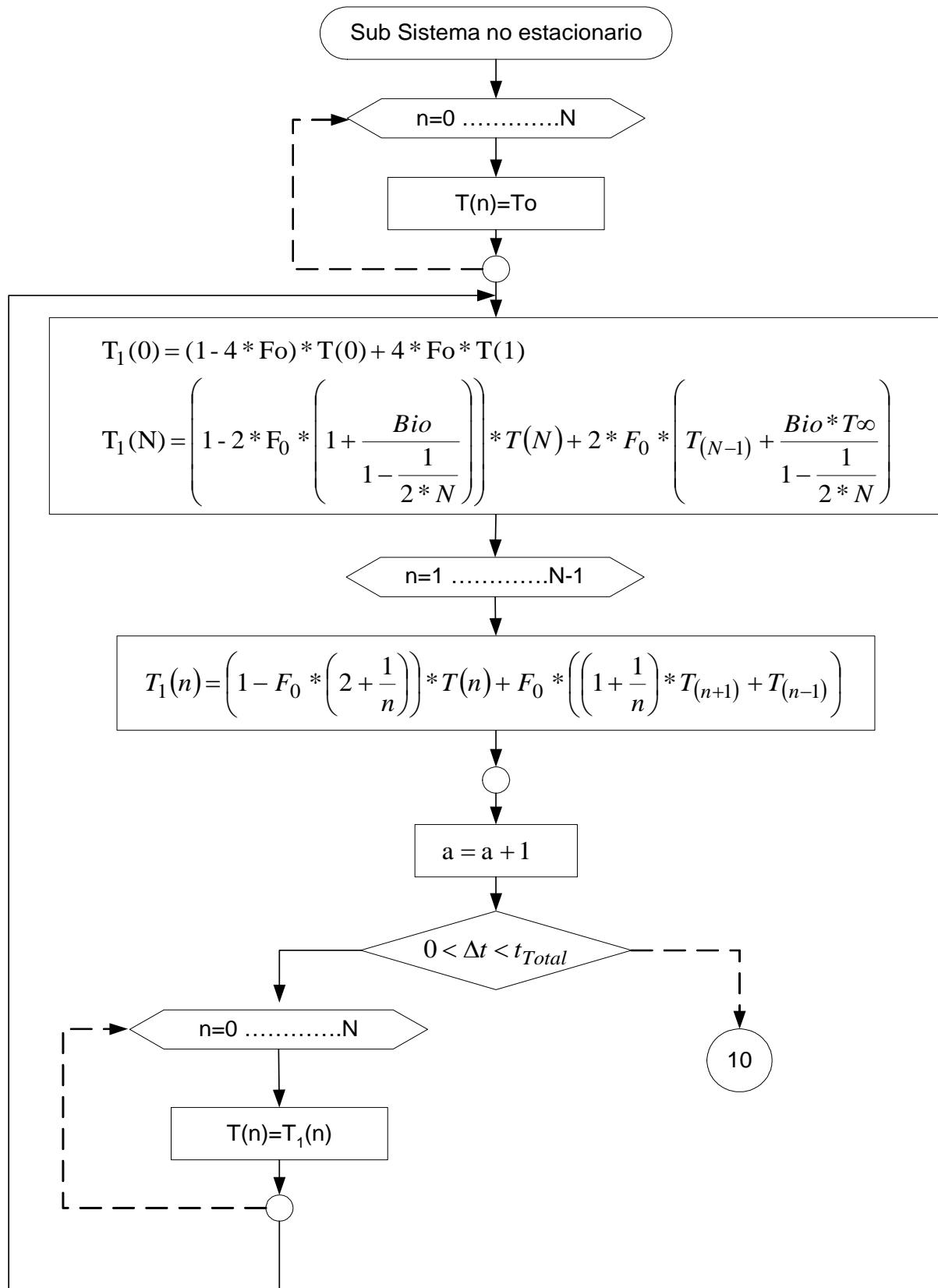
Tiempo total de enfriamiento = 5 h.

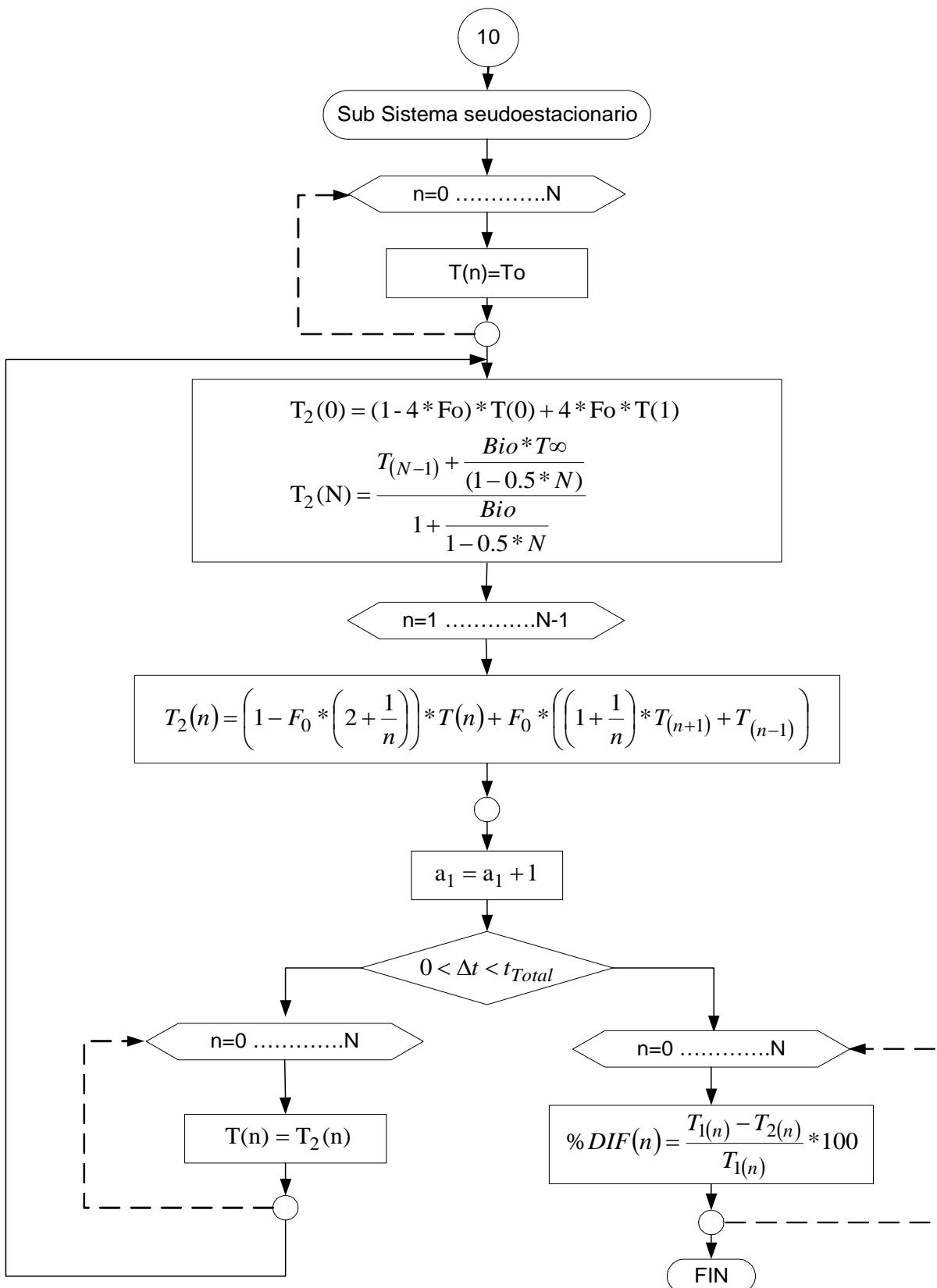
En las tablas de la 1 a la 6 se dan los resultados alcanzados en la evaluación de los modelos, mostrándose en ellas los perfiles de temperatura a diferentes valores de intervalos de tiempo y espacio, observándose en todos los casos que existe poca diferencia entre los resultados obtenidos con ambos modelos.

Es de destacar que el sistema explícito de ecuaciones, utilizado para la discretización no permite estudiar adecuadamente los resultados que se obtendrían en materiales altamente conductores del calor, pues engendran números de Fourier muy elevados y las ecuaciones explícitas obtenidas sólo son convergentes para valores de Fourier menores de 0,25 (1/4). De todas formas, los resultados obtenidos por ambos modelos son muy semejantes para la temperatura de la pared, y es de esperar que no cambien para materiales en situaciones de transferencia que generen números de Fourier elevados.

En la medida que los coeficientes de transferencia son menores, la diferencia entre ambas soluciones se hace más marcada a iguales tiempos totales de exposición.

En la tabla 7 se dan los valores de las constantes de discretización utilizadas en los cálculos.





## Conclusiones

De los resultados analizados podemos concluir que en el intervalo de número de Fourier estudiado ( $Fo < 0,35$ ):

1. La temperatura en la pared obtenida con ambos modelos es muy similar, alcanzándose variaciones mucho menores del 2 % cuando se utilizan incrementos en las variables discretas lo suficientemente pequeños.
2. Las diferencias en las temperaturas de los

puntos cercanos a la pared se incrementan alcanzando valores que casi llegan al 5 % en los casos de máxima discrepancia observada.

3. Cualquiera de los modelos puede ser utilizado satisfactoriamente para el cálculo de temperaturas de pared.
4. El modelo seudoestacionario debe ser utilizado con precaución cuando se desea una adecuada aproximación en los valores de la temperatura, si no es posible utilizar incrementos pequeños de las variables discretas.

Tabla 1  
Valores de temperatura en el interior del cilindro  
Para el material correspondiente al Caso I

.h=25 Kcal/h.m <sup>2</sup> °C				.h=4 Kcal/h.m <sup>2</sup> °C		
N	No est.	Seudo-Est.	Dif. (%)	No est.	Seudo-Est.	Dif. (%)
T <sub>0</sub>	285,38	285,37	-0,003 66	292,14	292,13	-0,003 33
T <sub>1</sub>	284,57	284,55	-0,003 77	291,63	291,62	-0,003 53
T <sub>2</sub>	282,49	282,48	-0,004 03	290,34	290,33	-0,003 86
T <sub>3</sub>	278,77	278,76	-0,004 44	287,98	287,97	-0,004 51
T <sub>4</sub>	273,13	278,11	-0,005 05	284,36	284,34	-0,005 11
T <sub>5</sub>	265,26	265,24	-0,005 82	279,22	279,20	-0,006 63
T <sub>6</sub>	254,86	254,84	-0,006 70	272,26	272,24	-0,008 15
T <sub>7</sub>	241,62	211,60	-0,007 69	263,19	263,16	-0,009 94
T <sub>8</sub>	225,32	225,30	-0,008 72	251,70	251,66	-0,012 1
T <sub>9</sub>	205,85	205,83	-0,009 73	232,56	237,52	-0,014 2
T <sub>10</sub>	183,28	183,26	-0,010 70	220,61	220,58	-0,017 1
T <sub>11</sub>	157,90	157,88	-0,011 50	200,85	200,81	-0,020 0
T <sub>12</sub>	130,21	130,19	-0,012 00	178,42	178,38	-0,023 2
T <sub>13</sub>	100,94	100,93	-0,012 10	153,65	153,61	-0,026 6
T <sub>14</sub>	71,01	71,00	-0,011 40	127,04	127,00	-0,030 4
T <sub>15</sub>	41,42	41,42	-0,008 63	99,24	93,21	-0,035 0

Tabla 2  
Valores de temperatura en el interior del cilindro  
Para el material correspondiente al Caso I

.h=25 Kcal/h.m <sup>2</sup> °C				.h=4 Kcal/h.m <sup>2</sup> °C		
N	No est.	Seudo-Est.	Dif. (%)	No est.	Seudo-Est.	Dif. (%)
T <sub>0</sub>	283,51	283,51	-0,000	291,65	291,64	-0,000 751
T <sub>1</sub>	281,55	281,55	-0,000	290,40	290,39	-0,000 810
T <sub>2</sub>	276,49	276,49	-0,000	287,12	287,12	-0,000 989
T <sub>3</sub>	267,12	267,11	-0,000	280,92	280,92	-0,001 29
T <sub>4</sub>	252,13	252,13	-0,000	270,91	270,91	-0,001 73
T <sub>5</sub>	231,47	231,47	-0,000	256,12	256,12	-0,002 31
T <sub>6</sub>	203,64	203,63	-0,001	235,67	235,67	-0,003 00
T <sub>7</sub>	169,04	169,04	-0,001	209,07	209,07	-0,003 81
T <sub>8</sub>	128,82	128,82	-0,001	176,47	176,47	-0,004 72
T <sub>9</sub>	95,17	85,17	-0,001	138,84	138,83	-0,005 74
T <sub>10</sub>	41,17	41,17	-0,001	97,97	97,96	-0,006 99

**Tabla 3**  
**Valores de temperatura en el interior del cilindro**  
**Para el material correspondiente al Caso I**

$.h=25 \text{ kcal/h.m}^2\text{C}$				$.h=4 \text{ kcal/h.m}^2\text{C}$		
N	No est.	Seudo-Est.	Dif. (%)	No est.	Seudo-Est.	Dif. (%)
$T_0$	277,49	277,48	-0,003 73	289,74	287,53	-0,763 8
$T_1$	268,67	268,66	-0,004 39	284,14	281,30	-1,001 8
$T_2$	244,50	244,48	-0,005 91	267,88	263,62	-1,590 7
$T_3$	197,14	197,12	-0,007 97	233,08	227,11	-2,562 7
$T_4$	125,10	125,08	-0,009 45	174,28	167,64	-3,809 2
$T_5$	40,30	40,29	-0,006 03	95,60	90,57	-5,263 0

**Tabla 4**  
**Valores de temperatura en el interior del cilindro**  
**Para el material correspondiente al Caso II**

$.h=25 \text{ Kcal/h.m}^2\text{C}$				$.h=4 \text{ Kcal/h.m}^2\text{C}$		
N	No est.	Seudo-Est.	Dif. (%)	No est.	Seudo-Est.	Dif. (%)
$T_0$	235,04	235,02	-0,008 21	272,09	270,67	-0,52
$T_1$	234,02	234,00	-0,008 25	271,54	270,11	-0,528
$T_2$	231,46	231,44	-0,008 36	270,19	268,72	-0,543
$T_3$	227,04	227,02	-0,008 55	267,81	266,29	-0,570
$T_4$	220,69	220,67	-0,008 81	261,37	262,76	-0,608
$T_5$	212,41	212,39	-0,009 14	257,79	258,08	-0,658
$T_6$	202,24	202,22	-0,009 52	251,05	252,23	-0,720
$T_7$	190,27	190,25	-0,009 94	245,11	245,16	-0,793
$T_8$	176,60	176,58	-0,010 4	238,95	236,85	0,877
$T_9$	161,39	161,37	-0,010 8	229,55	227,32	-0,972
$T_{10}$	144,84	144,83	-0,011 3	218,93	216,56	-1,079
$T_{11}$	127,21	127,20	-0,011 7	207,11	204,63	-1,197
$T_{12}$	108,78	108,77	-0,012 0	194,16	191,59	-1,327
$T_{13}$	89,89	89,88	-0,012 2	180,18	177,53	-1,469
$T_{14}$	70,87	70,87	-0,012 3	165,29	162,60	-1,627
$T_{15}$	52,11	52,10	-0,011 9	149,62	146,93	-1,802

**Tabla 5**  
**Valores de temperatura en el interior del cilindro**  
**Para el material correspondiente al Caso II**

$.h=25 \text{ Kcal/h.m}^2\text{C}$				$.h=4 \text{ Kcal/h.m}^2\text{C}$		
N	No est.	Seudo-Est.	Dif. (%)	No est.	Seudo-Est.	Dif. (%)
$T_0$	230,83	230,81	-0,010 5	270,60	268,57	-0,747
$T_1$	228,50	228,47	-0,010 6	269,33	267,27	-0,766
$T_2$	222,68	222,65	-0,010 9	266,16	263,99	-0,814
$T_3$	212,67	212,65	-0,011 4	260,59	258,26	-0,895
$T_4$	188,45	198,43	-0,012 0	252,45	249,89	-1,011
$T_5$	180,24	180,22	-0,012 7	241,61	238,80	-1,161
$T_6$	158,45	158,43	-0,013 5	228,01	224,94	-1,345
$T_7$	133,74	133,73	-0,014 2	211,68	208,38	-1,563
$T_8$	106,96	106,95	-0,014 7	192,77	189,28	-1,815
$T_9$	79,17	79,15	-0,014 9	171,57	167,96	-2,106
$T_{10}$	51,51	51,50	-0,014 4	148,50	144,86	-2,446

Tabla 6  
Valores de temperatura en el interior del cilindro  
Para el material correspondiente al Caso II

.h=25 Kcal/h.m <sup>2</sup> °C				.h=4 Kcal/h.m <sup>2</sup> °C		
N	No est.	Seudo-Est.	Dif. (%)	No est.	Seudo-Est.	Dif. (%)
T <sub>0</sub>	221,27	221,26	-0,002 74	265,04	261,83	-1,210
T <sub>1</sub>	211,80	211,79	-0,002 83	259,43	256,02	-1,312
T <sub>2</sub>	188,68	188,675	-0,003 03	245,33	241,49	-1,565
T <sub>3</sub>	150,88	150,88	-0,003 29	220,82	216,43	-1,988
T <sub>4</sub>	102,23	102,23	-0,003 50	186,06	181,25	-2,585
T <sub>5</sub>	49,74	49,74	-0,003 26	142,96	138,11	-3,393

Tabla 7  
Valores de las constantes en las ecuaciones discretas  
Para cuando se utiliza un coeficiente de transferencia  $h = 25$  kcal/h.m<sup>2</sup>.°C

Caso	N	Fo	Δt	Δr
I	15	0,135 8	0,044 0	0,016 7
	10	0,100 1	0,073 0	0,025
	5	0,052 8	0,154 0	0,05
II	15	0,266	0,044 3	0,016 7
	10	0,214 2	0,080 3	0,025
	5	0,132	0,198	0,05

Para cuando se utiliza un coeficiente de transferencia  $h = 4$  kcal/h.m<sup>2</sup>.°C

Caso	N	Fo	Δt	Δr
I	15	0,349 7	0,113 3	0,016 7
	10	0,130 2	0,222 3	0,025
	5	0,114 2	0,333 3	0,05
II	15	0,246 0	0,041 0	0,016 7
	10	0,248 0	0,093 0	0,025
	5	0,249 3	0,374	0,05

## Nomenclatura y unidades

- A<sub>Int</sub>** área interior (m<sup>2</sup>)
- A<sub>Ex</sub>** área exterior (m<sup>2</sup>)
- Bio** número de Biot (adimensional)
- Cp** calor específico (kcal/kg. °C)
- Fo** número de Fourier (adimensional)
- h** coeficiente de transferencia por convección libre en la película en (kcal/h.m<sup>2</sup>.°C)
- k** conductividad térmica (kcal/h.m. °C)
- n** variable para contar los intervalos de espacio en dirección r
- N** valor máximo de intervalos de espacio en dirección r
- p** variable para contar los intervalos de tiempo
- r** coordenada direccional (m)
- T** temperatura (°C)
- t** tiempo (h)

**Vc** volumen para el balance de calor en el punto base (m<sup>3</sup>)

## Bibliografía

- ,D., *Calcolo Elettronico Nell Ingegneria Chimica*, Roma, Edición Siderea, 1971.
- Bird, R.B.; Steward W.E.; Lightfoot, E.N., *Fenómenos de transporte*, Ciudad de La Habana, Editorial Pueblo y Educación, 1979.
- Carnahan, B.; Luther, H. A.; Wilker, James O., *Applied Numerical Methods*, New York, Editorial John Wiley & Sons, 1969.
- Díaz G., A. A., “Solución de problemas de transferencia de calor por conducción en más de una dimensión, en régimen no estacionario por métodos de discretización”, Revista Tecnología Química, vol. XVII, No, 2, 1997, págs. 1-5.
- \_\_\_\_\_, “Aplicación de métodos de discretización para la solución de problemas de

- 
- conducción de calor en coordenadas esféricas”, Revista Tecnología Química, vol XVIII, Nos. 1 y 2, 1998, págs. 75-77.
- \_\_\_\_\_, “Aplicación de métodos discretos para la solución de problemas de conducción de calor en coordenadas cilíndricas”, Revista Tecnología Química, vol. XVIII, No. 3, 1998, págs. 45-48.
- \_\_\_\_\_, Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería Química, Ediciones Internas, Facultad de Ingeniería Química, Universidad de Oriente, 1998.
- Díaz, H.; Mejía, E.; Díaz A., Estudio de la solución de las ecuaciones diferenciales parciales aplicadas a Ingeniería Química, Trabajo de Diploma, Facultad de Ingeniería Química, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, 2003.
- Incropera, B., *Fundamentals of Heat and Transfer*, La Habana, Editorial Pueblo y Educación, 1973.
- Isachenko, V.; Osipova V.; Sukomel A., *Transmisión del calor*, La Habana, Editorial Pueblo y Educación, 1973.
- V. G.; Jeffreys, G. V., *Mathematical Methods in Chemical Engineering*, La Habana, Instituto del Libro, 1967.
- Lapidus, L., *Digital Computation for Chemical Engineers*, New York, Editorial McGraw Hill, 1962.
- Mickley, H.S.; Sherwood, T. K.; Reed Ch., *Applied Mathematics in Chemical Engineering*, New York, Edición Mc Graw Hill, 1957.
- Perry, J.H., *Chemical Engineers' Handbook*, 5ta edición, New York, Mc Graw Hill, 1973.
- Robsenow, W.H.; Choi, H., *Heat Mass and momentum transfer*, New Jersey, Prentice Hall, 1961.
- Viera B, R., *Modelación matemática para ingenieros químicos*, Ciudad de La Habana, Editorial Pueblo y Educación, 1988.