Cuadernos del CIMBAGE
ISSN: 1666-5112
cimbage@econ.uba.ar
Facultad de Ciencias Económicas
Argentina

Spinadel, Vera W. de
La familia de números metálicos
Cuadernos del CIMBAGE, núm. 6, 2003, pp. 17-44
Facultad de Ciencias Económicas
Buenos Aires, Argentina

Cuadernos del CIMBAGE N° 6 (2003) 17-44

LA FAMILIA DE NUMEROS METALICOS

Vera W. de Spinadel
Centro de Matemática y Diseño MAyDI
Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo
Universidad de Buenos Aires
E-mail: vspinade@fibertel.com.ar

Recibido 6 de septiembre 2002, aceptado 12 de agosto 2003

Resumen

En este trabajo vamos a introducir una nueva familia de números irracionales cuadráticos positivos. Se llama familia de *números metálicos* [1], [2], [3], [4] y su miembro más importante es el *número de oro* ϕ . Entre sus parientes, podemos mencionar el *número de plata*, el *número de bronce*, el *número de cobre*, el *número de níquel*, etc. Los miembros de dicha familia gozan de propiedades matemáticas comunes que son fundamentales en la investigación actual sobre la estabilidad de macro- y micro-sistemas físicos, desde la estructura interna del ADN hasta las galaxias astronómicas.

Los resultados más notables de esta nueva investigación son los siguientes:

- Los miembros de la familia intervienen en la determinación del comportamiento cuasi-periódico de sistemas dinámicos no lineales, constituyendo una herramienta invalorable en la búsqueda de rutas universales al caos.
- Las sucesiones numéricas basadas en los miembros de esta familia, satisfacen muchas propiedades aditivas y simultáneamente son sucesiones geométricas, por lo que han sido utilizadas con frecuencia como base de muchos sistemas de proporciones.

Palabras clave: desarrollo en fracciones continuas, sucesiones de Fibonacci, caos, atractor extraño, ecuación logística.

Abstract

In this paper we introduce a new family of positive quadratic irrational numbers. It is called the Metallic Means family [1], [2], [3], [4] and its most renowned member is the Golden Mean. Among its relatives we may mention the Silver Mean, the Bronze Mean, the Cupper Mean, the Nickel Mean, etc. The members of such a family enjoy common mathematical properties that are fundamental in the present research about the stability of macro- and micro- physical systems, going from the internal structure of DNA up to the astronomical galaxies. The most important results of this new investigation are the following:

- The members of this family intervene in the determination of the quasi-periodic behavior of non linear dynamical systems, being essential tools in the search of universal routes to chaos.
- The numerical sequences based on the members of this family, satisfy many additive properties and simultaneously, are geometric sequences. This unique property has had as a consequence the use of some Metallic Means as a base for proportion systems.

Keywords: Continued fraction expansion; Fibonacci sequences; Strange attractor; Logistic equation.

1. DESARROLLO EN FRACCIONES CONTINUAS DE LOS NÚMEROS METÁLICOS

Vamos a presentar los miembros de la familia de *números metálicos* (FNM) como las soluciones positivas de ecuaciones cuadráticas del tipo

$$x^2 - px - q = 0\,, \tag{1.1}$$

donde tanto p como q son números naturales. Comencemos nuestro análisis considerando las ecuaciones cuadráticas más simples

$$
\begin{aligned}
&x^2 - nx - 1 = 0 \\
&x^2 - x - n = 0
\end{aligned} \qquad (1.2)
$$

donde n es un número natural. Nótese que para $n = 1$, ambas ecuaciones cuadráticas coinciden con la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, cuya solución positiva es el *número de oro* ϕ. Para hallar su desarrollo en fracciones continuas, escribimos la ecuación en la forma $x^2 = x + 1$ y dividiendo por x tendremos $x = 1 + \frac{1}{x}$. Reemplazando iterativamente este valor de x, finalmente encontramos la siguiente expresión del *número de oro* ϕ

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}} = [1, 1, 1, \ldots.]$$

Obtendremos sus parientes, o sea los restantes miembros de la FNM analizando sus desarrollos en fracciones continuas. Si consideramos la ecuación cuadrática

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

se prueba fácilmente que su solución positiva es el *número de plata*

$$\sigma_{Ag} = 1 + \sqrt{2}$$

y por sustitución, se obtiene el siguiente desarrollo en fracciones continuas periódico puro

(1.3)
$$\sigma_{Ag} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}} = [\bar{2}] .$$

Procediendo de manera análoga con la ecuación cuadrática x^2 - 3 x - 1 = 0 obtenemos el *número de bronce*

(1.4)
$$\sigma_{Br} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = [\bar{3}]$$

En resumen, resolviendo ecuaciones cuadráticas del tipo

$$x^2 - nx - 1 = 0 ,$$

con n natural, tenemos como soluciones positivas aquellos miembros de la FNM cuyos desarrollos en fracciones continuas son periódicos puros, de la forma

(1.5)
$$x = [\bar{n}] .$$

Si, en cambio, buscamos soluciones positivas de ecuaciones cuadráticas del tipo

$$x^2 - x - n = 0 ,$$

con n natural, nos encontramos con números naturales o bien con aquellos miembros de la FNM cuyos desarrollos en fracciones continuas son periódicos, de la forma

$$[m, \overline{n_1, n_2, \ldots, n_n}]. \tag{1.6}$$

Por ejemplo, si consideramos la ecuación cuadrática $x^2 - x - 2 = 0$, entonces su solución positiva es $x = 2$, que posee la siguiente expresión en fracciones continuas: $x = [2, \bar{0}]$. Dicho número entero se conoce como el *número de cobre*

$$\sigma_{Cu} = 2. \tag{1.7}$$

Partiendo de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 3 = 0$, cuya solución positiva es el valor $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$, podemos relacionar este valor con el Número de Bronce y escribir:

$$x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} - 1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2},$$

de donde obtenemos el *número de níquel*

$$\sigma_{Ni} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} = [2, 3, 3, \cdots] = [2, \bar{3}] \tag{1.8}$$

que es una fracción continua periódica.

Resultados similares se obtienen con diferentes valores de n y entonces podemos afirmar

Propiedad no. 1 de los miembros de la familia de números metálicos

Son todos números irracionales cuadráticos positivos.

Nota: en los restantes casos de ecuaciones cuadráticas con coeficientes enteros, encontramos los siguientes resultados, al buscar soluciones positivas

a) $x^2 + nx - 1 = 0$. Las mismas soluciones que para la primer ecuación (1.2), pero solamente su parte decimal.

b) $x^2 + nx + 1 = 0$. No existen soluciones positivas.

c) $x^2 - nx + 1 = 0$. Las soluciones positivas poseen desarrollos en fracciones continuas periódicos.

d) $x^2 + x - n = 0$.Las soluciones positivas poseen desarrollos en fracciones continuas periódicos.

e) $x^2 + x + n = 0$. No existen soluciones positivas.

f) $x^2 - x + n = 0$. No existen soluciones positivas.

2. SUCESIONES DE FIBONACCI

Una sucesión de Fibonacci es una sucesión de números naturales formada tomando cada número igual a la suma de los dos que le preceden. Por este motivo, este tipo de sucesiones se llaman *"sucesiones de Fibonacci secundarias",* para distinguirlas de las sucesiones de Fibonacci ternarias, en las cuales cada término es una combinación lineal de los últimos tres.

Comenzando con $F(0)=1\,;F(1)=1,$ tenemos

(2.1) $$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,...$$

donde

(2.2) $$F(n+2)=F(n+1)+F(n).$$

Como es fácil demostrar, se cumple que

(2.3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{F(n+2)}{F(n+1)}=\phi\ .$$

La sucesión de Fibonacci para la cual vale la condición (2.2) puede ser generalizada, originando las *"sucesiones de Fibonacci secundarias generalizadas"* (SFSG),

$$a, b, pb+qa, p(pb+qa)+qb,...$$

que satisfacen relaciones del tipo

(2.4) $$G(n+1)=p\,G(n)+q\,G(n-1)$$

con p y q números naturales.

A partir de la ecuación (2.4), obtenemos

$$\frac{G(n+1)}{G(n)}=p+q\,\frac{G(n-1)}{G(n)}=p+\frac{q}{\dfrac{G(n)}{G(n-1)}}\ .$$

Tomando límites en ambos miembros de esta ecuación y suponiendo que el $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{G(n+1)}{G(n)}$ existe y es igual a un número real x (lo que probaremos en el teorema próximo), tendremos $x = p + \frac{q}{x}$ o bien $x^2 - px - q = 0$, cuya solución positiva es

$$x = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

Esto significa que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \tag{2.5}$$

Probemos ahora la existencia de dicho límite.

Teorema: Dada una sucesión de Fibonacci secundaria generalizada (SFSG),

$$a, b, pb+q, p(pb+qa)+qb, \ldots$$

tal que

$$G(n+1) = p\,G(n) + q\,G(n-1)$$

con $p > 0, p^2 + 4q > 0$, existe el $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{G(n+1)}{G(n)}$ y es un número real positivo σ.

Demostración: Para hallar el término n-ésimo de la SFSG, pongamos

$$G(n+1) = p\, G(n) + q\, H(n)$$

$$H(n+1) = G(n)$$

y

$$\overline{G(n)} = \begin{pmatrix} G(n) \\ H(n) \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, es fácil probar que

$$\overline{G(n+1)} = A.\overline{G(n)}.$$

Supongamos, por simplicidad, que $G(0) = G(1) = 1$. Si $\overline{G(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ entonces $\overline{G(n+1)} = A^n.\overline{G(1)}$ y el problema se reduce a hallar la potencia n-ésima de la matriz A. Sabemos que los autovalores de A son

$$\sigma = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}; \sigma' = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

Para diagonalizar A de manera de transformarla en $A_d = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma' \end{pmatrix}$,

usaremos la matriz de cambio de base $P = \begin{pmatrix} \sigma & \sigma' \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La n-ésima potencia de A se calcula aplicando la tranformación de semejanza

$$A^n = P.A_d{}^n.P^{-1} = \frac{1}{\sigma - \sigma'} \begin{pmatrix} \sigma^{n+1} - \sigma'^{(n+1)} & \sigma\sigma'\left(\sigma'^n - \sigma^n\right) \\ \sigma^n - \sigma'^n & \sigma\sigma'\left(\sigma'^{(n-1)} - \sigma^{(n-1)}\right) \end{pmatrix}.$$

Y el n-ésimo término de la SFSG $1, 1, p + q, p(p + q) + q, \ldots$ está dado por la siguiente expresión

$$G(n+1) = \frac{\sigma^{n+2} - \sigma'^{(n+2)}}{\sigma - \sigma'}.$$

Reemplazando $\sigma - \sigma' = \sqrt{p^2 + 4q}; \sigma' = -\frac{q}{\sigma}$ tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sigma^{n+1} + \left(-\frac{q}{\sigma}\right)^{n+1}}{\sigma^n + \left(-\frac{q}{\sigma}\right)^n} = \sigma$$

y con esto completamos la demostración.

<u>Nota 1</u>: si en lugar de elegir $G(0) = G(1) = 1$ comenzamos la SFSG con dos valores arbitrarios a y b, es fácil probar que el resultado es el mismo. En efecto, dada la SFSG

$$a,\ b,\ pb + qa,\ p(pb + qa) + qb,\ \ldots$$

tenemos que evaluar el cociente

$$\frac{G(n+1)}{G(n)} = \frac{pnG(n) + qaG(n-1)}{pbG(n-1) + qaG(n-2)} = \frac{pb\,\dfrac{G(n)}{G(n-1)} + qa}{pb + \dfrac{qa}{\dfrac{G(n-1)}{G(n-2)}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma$$

y el resultado subsiste para cualquier SFSG, independientemente de los valores elegidos para los primeros dos términos de la misma.

Nota 2: el teorema sigue siendo válido en el caso en que a, b, p, q sean números reales, pero en este contexto nos interesa únicamente el caso particular en que son números naturales.

Pongamos $G(0) = G(1) = 1$ y consideremos diferentes posibilidades para los parámetros de (2.5). Entonces, si $p = q = 1$, tenemos el *número de oro*

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi = [\overline{1}].$$

Si $p = 2$ y $q = 1$, la sucesión tiene la forma

(2.6) $$1,\ 1,\ 3,\ 7,\ 17,\ 41,\ 99,\ 140,\ \ldots$$

donde

(2.7) $$G(n+1) = 2\,G(n) + G(n-1),$$

y de (2.7) obtenemos el *número de plata*

$$\sigma_{Ag} = \lim_{n\to\infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} = [\,\overline{2}\,].$$

Análogamente, si $p=3$ y $q=1$, la sucesión resulta

(2.8) $$1,1,4,13,43,142,469,\ldots$$

donde

(2.9) $$G(n+1) = 3\,G(n) + G(n-1),$$

y tenemos el *número de bronce*

$$\sigma_{Br} = \lim_{n\to\infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = [\,\overline{3}\,],$$

otra fracción continua periódica pura.

Para $p=4$ y $q=1$, el *número metálico* $\sigma_p{}^q$ es

$$\sigma_4{}^1 = 2+\sqrt{5} = [\overline{4}] = \phi^3,$$

un asombroso resultado ligado al desarrollo en fracciones continuas de las potencias impares del *número de oro*. Como se puede comprobar fácilmente, los siguientes *números metálicos* tienen la forma

$$\sigma_5{}^1 = \frac{5+\sqrt{29}}{2} = [\overline{5}];\ \sigma_6{}^1 = 3+\sqrt{10} = [\overline{6}];\ \sigma_7{}^1 = \frac{7+\sqrt{53}}{2} = [\overline{7}];$$
$$\sigma_8{}^1 = 4+\sqrt{17} = [\overline{8}];\ \sigma_9{}^1 = \frac{9+\sqrt{85}}{2} = [\overline{9}];\ \sigma_{10}{}^1 = 5+\sqrt{26} = [\overline{10}]$$

y así siguiendo. Esto es

$$\sigma_p{}^1 = [\overline{p}] = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}.$$

Todos los miembros de la FNM que satisfacen la primera ecuación (1.2) son de la forma $[\overline{n}]$, un desarrollo en fracciones continuas periódico puro.

Si $p=1$ y $q=2$, la sucesión es

(2.10) $$1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, ...$$

donde

$$G(n+1) = G(n) + 2\,G(n-1)$$

y obtenemos el *número de cobre*

$$\sigma_{Cu} = 2 = [2, \bar{0}]$$

Si $p = 1$ y $q = 3$, la sucesión es

(2.11) $$1,\ 1,\ 4,\ 7,\ 19,\ 40,\ 97,\ \ldots$$

donde

$$G(n+1) = G(n) + 3\ G(n-1)$$

y obtenemos el *número de níquel*

$$\sigma_{Ni} = \lim_{n\to\infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} = \frac{1+\sqrt{13}}{2} = [2, \bar{3}]$$

otra fracción continua periódica. De manera similar, obtenemos

$$\sigma_1{}^4 = [2, \overline{1,1,3}];\ \sigma_1{}^5 = [2, \overline{1,3}];\ \sigma_1{}^6 = 3 = [3, \bar{0}];\ \sigma_1{}^7 = [3, \bar{5}];\ \sigma_1{}^8 = [3, \overline{2,1,2,5}];$$
$$\sigma^9 = [3, \overline{1,1,5}];\ \sigma_1{}^{10} = [3, \overline{1,2,2,1,5}];\ \sigma_1{}^{11} = [3, \overline{1,5}];\ \sigma_1{}^{12} = 4 = [4, \bar{0}]$$

y así siguiendo. Evidentemente, todos los miembros de la FNM que satisfacen la segunda ecuación cuadrática (1.2), son de la forma $[m, \overline{n_1, n_2, \cdots}]$, esto es, una fracción continua periódica. Además, es fácil verificar que en este conjunto, los *números metálicos* aparecen de manera muy regular. En particular, se puede probar que

$$si\ n^2\text{-}n \leq q < n^2 + n,\ entonces\ \sigma_1{}^q = [n, \overline{n_1, n_2, \ldots}]$$

$$si\ q = n^2\text{-}n+1,\ entonces\ \sigma_1{}^q = \left[n, \overline{0}\right]$$

$$si\ q = n^2\text{-}\ n + 1,\ entonces\ \sigma_1{}^q = \left[n, \overline{2n-1}\right]$$

$$si\ q = n^2 + n,\ entonces\ \sigma_1{}^q = \left[n, \overline{1, 2n-1}\right].$$

También cabe observar que las expansiones en fracción continua de los *números metálicos* no enteros son "palindrómicas", vale decir, los períodos son simétricos respecto a sus centros, excepto el último número del período, que es igual a $2n-1$. No se conoce ninguna regla simple que prediga las longitudes de los períodos en forma general, pero podemos afirmar que algunos períodos son muy cortos, por ejemplo, el primero después de una solución entera tiene un período de longitud 1 y los últimos antes de una solución entera son de la forma: $q = 5\left[2, \overline{1,3}\right];\quad q = 11\left[3, \overline{1,5}\right];\ q = 19\left[4, \overline{1,7}\right];\ldots$ Otros períodos son muy largos y exceptuando los casos de $q = 3, 7, 13, 21, 31, \ldots$, las restantes fracciones continuas presentan "ciclos estables" de diferentes longitudes.

En el caso general de la ecuación cuadrática (1.1), se puede verificar que sus soluciones positivas poseen desarrollos en fracciones continuas periódicos. En conclusión, podemos afirmar

Propiedad no. 2 de la familia de números metálicos

Todos ellos se obtienen como límites de cocientes de términos consecutivos de SFSG.

3. PROPIEDADES ADITIVAS DE LOS NÚMEROS METÁLICOS

Si formamos la sucesión de cocientes de términos consecutivos de la sucesión (2.1), obtenemos

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \ldots$$

que converge al *número de oro* ϕ, como se prueba muy fácilmente. Construyamos ahora una progresión geométrica de razón ϕ

$$\ldots, \frac{1}{\phi^2}, \frac{1}{\phi}, 1, \phi, \phi^2, \phi^3, \ldots$$

Esta progresión geométrica es también una sucesión de Fibonacci que satisface la condición (2.2). En efecto

$$\frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi} = \frac{1+\phi}{\phi^2} = 1 .$$

Lo mismo sucede para el *número de plata* σ_{Ag}, partiendo de la sucesión

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{1}, \frac{7}{3}, \frac{17}{7}, \frac{41}{17}, \frac{99}{41}, \frac{140}{99}, \ldots ,$$

que converge a σ_{Ag}. La sucesión

$$\ldots \frac{1}{\sigma_{Ag}{}^2}, \frac{1}{\sigma_{Ag}}, 1, \sigma_{Ag}, \sigma_{Ag}{}^2, \sigma_{Ag}{}^3, \ldots$$

es una progresión geométrica de razón σ_{Ag}, que satisface la condición (2.7), como se comprueba fácilmente

$$\frac{1}{\sigma_{Ag}} + 2 = \sigma_{Ag}; 1 + 2\sigma_{Ag} = \sigma_{Ag}{}^2; \sigma_{Ag} + 2\sigma_{Ag}{}^2 = \sigma_{Ag}{}^3; \ldots$$

De manera similar, es simple probar que la sucesión

$$\frac{1}{1},\frac{4}{1},\frac{13}{4},\frac{43}{13},\frac{142}{43},\frac{469}{142},\ldots,$$

converge al *número de bronce* $\sigma_{Bc} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = \boxed{3}$ y la sucesión

$$\cdots\frac{1}{\sigma_{Br}{}^{2}},\frac{1}{\sigma_{Br}},1,\sigma_{Br},\sigma_{Br}{}^{2},\cdots$$

es también una sucesión geométrica que satisface la relación (2.9). En efecto

$$\frac{1}{\sigma_{Br}}+3=\sigma_{Br}\ ;1+3\sigma_{Br}=\sigma_{Br}{}^{2}\ ;\sigma_{Br}+3\sigma_{Br}{}^{2}=\sigma_{Br}{}^{3}\ ;\cdots$$

Lo mismo sucede para todas las SFSG que satisfacen relaciones del tipo (2.4). Por ello podemos afirmar:

Propiedad no. 3 de los miembros de la familia de números metálicos

Son los únicos números irracionales cuadráticos positivos que generan una SFSG (con propiedades aditivas) que, simultáneamente, es una progresión geométrica.

Esta última propiedad de los miembros de la familia de gozar tanto de propiedades aditivas como geométricas, les confiere a los *números metálicos* características sumamente interesantes para convertirse en bases de diferentes sistemas de proporciones en Diseño. En efecto, el *número de oro* $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dominó el arte griego y el romano, persistió en los monumentos de la Edad Media Gótica y posteriormente, en el Renacimiento, llegando a nuestro siglo con El Modulor de Le Corbussier.

Siguiendo la aparición de esta proporción ϕ : 1, encontramos otra proporción, basada en el *número de plata* $\sigma_{Ag} = 1 + \sqrt{2}$. Esta proporción σ_{Ag} : 1 estuvo presente en el diseño a todas las escalas, desde las dimensiones globales de los patios hasta los edificios individuales de las casas romanas y las habitaciones dentro de cada edificio y los tapices colgados en las paredes (ver [5], [6]). También se la encontró en las proporciones musicales.

Inmediatamente surge la pregunta: **¿Por qué ϕ y σ_{Ag} son tan importantes al considerar diferentes sistemas de proporciones?**

Respuesta: Es bien sabido que las progresiones geométricas no poseen propiedades aditivas, esto es, la suma de dos elementos en una progresión geométrica *no* es igual a otro elemento de la progresión. De este modo, falla una regla esencial de las proporciones y el sistema queda limitado en su aplicación a proporcionar tan solo parte del sistema total. Pero, **en el caso de las sucesiones de Fibonacci secundarias generalizadas, construídas de la manera indicada en el §2, tenemos un conjunto infinito de progresiones geométricas que gozan de propiedades aditivas.**

4. ESQUEMA INFLACIONARIO

Podemos considerar que los términos de las distintas sucesiones de Fibonacci que definen los miembros de la FNM, pueden ser ordenados como generaciones tales que cada generación *"hereda"* una propiedad original. Este tipo de herencia es una consecuencia importante de los procesos iterativos y con frecuencia, origina estructuras auto-semejantes que son la base de configuraciones fractales. Llamemos *"inflacionarios"* a dichos procesos, utilizando un término común en Economía.

Partamos de dos bloques constructivos A y B que estén distribuidos según el siguiente esquema inflacionario

(4.1) $$S_{L+1} = S_L{}^m S_{L-1}{}^n$$

donde $S_1 = B; S_2 = A$; m y n son enteros; $L \geq 2$ y S_{L^m} representa m repeticiones adyacentes de S_L .

Se prueba fácilmente que el *número de oro* ϕ es generado por la relación de recurrencia

$$S_{L+1} = S_L S_{L-1} \quad ,$$

esto es,

$$S_1 = \{B\}; S_2 = \{A\}; S_3 = \{AB\}; S_4 = \{ABA\}; S_5 = \{ABAAB\}..$$

en la cual cada término es la "suma" de sus dos antecesores inmediatos.

El *número de plata*, en cambio, es generado por la relación de recurrencia

$$S_{l+1} = S_l{}^2 S_{l-1} \quad ,$$

$$S_1 = \{B\}; S_2 = \{A\}; S_3 = \{AAB\}; S_4 = \{AABAABA\};$$
$$S_5 = \{AABAABAAABAABAAAB\};.....$$

tal que cada término de la cadena se forma escribiendo en forma contigua dos réplicas del término precedente y agregando su antecesor a la izquierda de las réplicas.
En el caso del *número de bronce*, la relación es

$$S_{l+1} = S_l^{\ 3} S_{l-1} \ ,$$

$$S_1 = \{B\}; S_2 = \{A\}; S_3 = \{AAAB\}; S_4 = \{AAABAAABAAABA\};\ldots$$

Para el *número de cobre*, tenemos la relación

$$S_{l+1} = S_L \ \ S_{l-1}^{\ 2}$$

$$S_1 = \{B\}; S_2 = \{A\}; S_3 = \{ABB\}; S_4 = \{ABBAA\};\ldots$$

Y para el *número de níquel*

$$S_{L+1} = S_L S_{L-1}^{\ 3}$$

$$S_1 = \{B\}; S_2 = \{A\}; S_3 = \{ABBB\}; S_4 = \{ABBBAAA\};\ldots$$

En conclusión, podemos asegurar:

Propiedad nro. 4 de la familia de números metálicos

Todos los miembros de esta familia se obtienen a partir de un “esquema inflacionario” que produce una cadena binaria originada por dos bloques primitivos A y B distribuídos según la relación de recurrencia

$$S_{L+1} = {S_L}^m {S_{L-1}}^n$$

donde m y n son enteros y $L \geq 2$.

NOTA: Por supuesto, la FNM goza de otras propiedades matemáticas interesantes en otros contextos, como se puede ver en [3]. Además, el número de miembros de la familia de *números metálicos* que satisfacen las Propiedades 1, 2, 3 y 4 es infinito, ya que podríamos agregar a los números arriba mencionados todos aquellos números irracionales cuyo desarrollo en fracciones continuas es periódico puro, de período 1, tales como

$$[\overline{4}] = 1 + 2\phi; [\overline{5}] = \frac{5+\sqrt{29}}{2}; [\overline{6}] = 3 + \sqrt{10}; [\overline{7}] = \frac{7+\sqrt{53}}{2}; \ldots$$

así como todas las combinaciones posibles de desarrollos en fracciones continuas de la forma $[n, \overline{p}]$, donde n es un número natural y p un número impar:

$$[2, \overline{3}] = \frac{1+\sqrt{13}}{2}; [3, \overline{5}] = \frac{1+\sqrt{29}}{2}; [4, \overline{7}] = \frac{1+\sqrt{53}}{2}.$$

El resto de los miembros de la familia son números enteros o bien poseen desarrollos en fracciones continuas que presentan ciclos estables que obedecen ciertas reglas de regularidad, que merecen un estudio más profundo. Mencionemos algunos de ellos a título de ejemplo

$$\frac{1+\sqrt{21}}{2}=\left[2,\overline{1,3}\right];\ \frac{1+\sqrt{33}}{2}=\left[3,\overline{2,1,2,5}\right];\ \frac{1+\sqrt{73}}{2}=\left[4,\overline{1,3,2,1,1,2,3,1,7}\right].$$

5. CUASIPERIODICIDAD Y LAS RUTAS AL CAOS

Usando técnicas de sistemas dinámicos introducidas inicialmente por Kohmoto et al [11], y adoptadas por muchos otros, Gumbs y Ali analizaron cuasicristales no-ϕ [12] [13]. Esto es, estudiaron la ecuación uni-dimensional discreta de Schrödinger cuando se permite que el potencial tome dos valores, V_A y V_B , dispuestos según una SFSG. Esta metodología se aplicó a la investigación de la **"concentración"** de la luz dentro de un sistema multicapas. Y encontraron que la concentración de la luz en estructuras por capas, sería más fácilmente observable cuando la cuasiperiodicidad se simula mediante una ecuación del tipo

(5.1) $$S_{l+1}=S_l\,.S_{l-1}{}^n$$

donde $n=2,3,\ldots$

En el caso general, cuando

(5.2) $$S_{L+1}=S_L{}^m.S_{L-1}{}^n$$

donde $L\geq 2$ y m y n son enteros positivos, se analizan las trazas de las matrices de transferencia correspondientes a diversas redes que son generalizaciones de la red de Fibonacci.

En razón que la red basada en el *número de oro*, ha sido estudiada con gran detalle, Gumbs y Ali consideraron únicamente aquellos casos en que m y n en la ecuación (5.2) no eran ambos iguales a la unidad, obteniendo los siguientes resultados:

* El *número de plata*: $m = 2; n = 1$

En este caso, al igual que en el map basado en el *número de oro*, cada familia de puntos fijos posee un autovalor $\lambda = 1$. Además para ambas sucesiones de Fibonacci, la matriz Jacobiana posee un determinante igual a la unidad en todo punto del map, implicando que estos maps son localmente **"conservadores del volumen"** en cada punto de la iteración. La función de onda no es ni localizada ni extendida, a semejanza de la red de Fibonacci basada en el *número de oro*.

* El *número de bronce*: $m = 1; n = 3$

La matriz Jacobiana tiene determinante igual a la unidad en todo punto de la iteración, a semajanza de los maps correspondientes a las sucesiones de Fibonacci basadas en el *número de oro* y el *número de plata*.

* El *número de cobre*: $m = 1; n = 2$

El valor del determinante de la mariz Jacobiana depende del punto del map donde se lo evalúa. De manera que este map no preserva localmente el elemento de volumen y es **"no conservador del volumen"**. La función de onda es, en este caso, localizada.

* El *número de níquel*: $m = 1; n = 3$

Los mismos resultados que en el caso previo.

* Un caso mixto: $m = 2; n = 2$

Este map posee un comportamiento similar al del map basado en el *número de cobre*.

Considerando estos casos previos a la luz de las propiedades de los miembros de la FNM, podemos resumir los resultados experimentales en la siguiente forma

- *Los maps de trazas para los números de oro, plata y bronce, que poseen desarrollos en fracciones continuas periódicas puras, conservan localmente el volumen.*
- *En los restantes casos, en que los miembros de la FNM poseen desarrollos en fracciones continuas simplemente periódicas, tales como los números de cobre y de níquel, los maps de trazas no preservan el volumen. Además, la clase que no preserva el volumen, a diferencia de la clase que sí lo conserva, posee un número sorprendentemente grande de órbitas acotadas en los maps de trazas, lo que implica consiguientemente la probable existencia de* ***"atractores"****. Dichas redes poseen espectros de funciones de onda que son localizadas.*

6. CAOS Y ECONOMIA

El modelo clásico determinista del crecimiento económico, como es bien sabido, se basa en tres elementos:

1) una ecuación que relaciona la tasa neta de nacimientos de la población con el ingreso;

2) una función de producción que describe el **"producto laboral inmediato"**;
3) una función de distribución que define los salarios laborales.

El asombroso rango de comportamientos cualitativos inherentes al modelo clásico y la evolución hacia el caos, pueden analizarse cuando se especifica la función de producción. Una función de producción razonable es la dada por la siguiente expresión no lineal

(6.1) $$f(P) = AP^b (1-P)^d ,$$

en la cual el término AP^b representa la función de producción potencial habitual y el término $(1-P)^d$ es un factor de reducción de la productividad producido por un exceso concentrado de población. Supongamos, por simplicidad, que $b = d = 1$. Entonces la función de producción viene dada por la función cuadrática

(6.2) $$f(P) = AP\,(1-P)$$

que es la llamada **"ecuación logística"**, descubierta por Pierre F. Verhulst (1804-1849) en su estudio de dinámica de poblaciones [14]. Esta ecuación cuadrática que describe un sistema dinámico no lineal de crecimiento económico se resuelve en forma iterativa, tomando como unidad temporal una generación de 25 años. Los resultados que se obtienen son los siguientes: para $A < A_\infty = 3{,}5699456\ldots$, las iteradas $f^{(n)}(P)$ con $0 \le P \le 1$ son periódicas con un período de longitud 2^m. Para $A = A_\infty$ las iteradas son aperiódicas y convergen a un **"atractor**

extraño" que es un conjunto de Cantor. Un atractor extraño es un atractor para el cual las iteradas dependen sensiblemente del valor inicial, esto es, valores inicialmente muy próximos se separan macroscópicamente para un número suficientemente grande de iteradas. Este conjunto se modela asintóticamente mediante un generador con dos intervalos de longitudes $A_1 = 0{,}408;\ A_2 = {A_1}^2$ con probabilidades iguales $p_1 = p_2 = 0{,}5$. La dimensión fractal D de este modelo de atractor está dada por la ecuación (ver [10]):

(6.3) $$ {A_1}^D + {A_2}^D = 1 $$

que se transforma en ${A_1}^D + ({A_1}^D)^2 - 1 = 0$ cuya solución positiva es

$$ {A_1}^D = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0{,}618\ldots $$

número que es llamado por los físicos el *número de oro*, ya que acostumbran a trabajar en el intervalo unitario, reduciendo todos los valores mod 1. Nótese que $0{,}618\ldots = 1/\phi$.

Entonces $D = \dfrac{\log 0{,}618}{\log 0{,}408} \cong 0{,}537$ que representa el punto de máximo valor de la parábola logística. Finalmente, cabe mencionar que el mismo tipo de fenómeno de transición al caos en Economía aparece en modelos temporales continuos no lineales, vale decir, ecuaciones diferenciales. Dichas ecuaciones, para que exhiban caos, deben ser de tercer orden, lo que implica consideraciones más sofisticadas así como una mayor dependencia del cálculo numérico. En conclusión, lo que hemos visto es simplemente una introducción a la aplicación del concepto de caos en Economía y está estrechamente ligado al valor del más importante de los miembros de la FNM, el *número de oro*.

REFERENCIAS

[1] Fujita M., Machida K. (1987). "Spectral properties of one-dimensional quasi-crystalline and incommensurate systems", *J. of the Phys. Soc. of Japan*, vol. 56, N° 4.

[2] Gumbs G., Ali M. K. (1988). "Dynamical maps, Cantor spectra and localization for Fibonacci and related quasiperiodic lattices", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 60, N° 11.

[3] Gumbs G., Ali M. K. (1989). "Electronic properties of the tight-binding Fibonacci Hamiltonian", *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 22.

[4] Kappraff J. (1996). "Musical proportions at the basis of systems of architectural proportions", NEXUS: Architecture and Mathematics, editor Kim Williams. Edizioni dell'Erba.

[5] Kolár, M. K. Ali (1989). "Generalized Fibonacci superlattices, dynamical trace maps and magnetic excitations", *Phys. Rev.* B39, N° 1.

[6] Kohmoto M., Kadanoff L. P., Tang C. (1983). "Localization problem in one dimension: mapping and escape", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 50, N° 23.

[7] P.-F. Verhulst (1845). «Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population» , *Nouv. Mém. De l'Acad. Roy. Des Sciences et Belles-lettres de Bruxelles* XVIII 8, pp. 1-38.

[8] Schroeder M. R. (1991). *Fractals, Chaos, Power Laws – Minutes from an infinite Paradise,* W. H. Freeman & Co., New York, USA.

[9] Spinadel Vera W. de (1997). "On characterization of the onset to chaos", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 8, N° 10, pp. 1631-1643.

[10] Spinadel Vera W. de (1997). “Una nueva familia de números”, *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, vol. 227, N° 1.

[11] Spinadel Vera W. de (1998). *From the Golden Mean to Chaos*, libro editado por Nueva Librería, Buenos Aires, Argentina.

[12] Spinadel Vera W. de (1998). “The Metallic Means and design”, NEXUS II: Architecture and Mathematics, editor Kim Williams. Edizioni dell’Erba.

[13] Watts Donald, Carol (1986). “A Roman apartment complex”, *Sc. Amer.*, vol. 255, N° 6.

[14] Williams K. (1997). “Michelangelo’s Medici Chapel: the cube, the square and the √2 rectangle”, *Leonardo*, vol. 30, N° 2.