



Cuadernos del CIMBAGE

ISSN: 1666-5112

cimbage@econ.uba.ar

Facultad de Ciencias Económicas
Argentina

Lazzari, Luisa L.; Moriño, María S.
El enfoque de Buckley del modelo de insumo-producto en condiciones de incertidumbre
Cuadernos del CIMBAGE, núm. 6, 2003, pp. 93-109
Facultad de Ciencias Económicas
Buenos Aires, Argentina

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=46200605>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

EL ENFOQUE DE BUCKLEY DEL MODELO DE INSUMO-PRODUCTO EN CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE¹

Luisa L. Lazzari – María S. Moriño
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires
cimbage@econ.uba.ar

Recibido el 5 de Marzo 2003; aceptado 15 de Diciembre 2003

Resumen

En este trabajo se presenta el enfoque de Buckley [1] del modelo abierto de insumo-producto en el cual los coeficientes técnicos están expresados mediante números borrosos. El modelo propuesto permite un mejor aprovechamiento de la información disponible.

Palabras clave: insumo-producto, números borrosos

Abstract

In this paper we make an input-output analysis when the technological coefficients are not precisely known and may be modeled by appropriate fuzzy numbers. The proposed model let us make a better use of the available information.

Key-words: Input-output analysis; Fuzzy numbers.

¹ Realizado en el marco del proyecto UBACyT E009: "El tratamiento de la incertidumbre en las pequeñas y medianas empresas mediante el empleo de herramientas matemáticas innovadoras".

1. INTRODUCCIÓN

El modelo de insumo producto fue desarrollado por Wassily Leontief en la década del 30 culminando con la publicación, en 1941, de los resultados de EEUU correspondientes a los años 1919 y 1929. A partir de entonces diversos países hicieron desarrollos semejantes.

Los primeros antecedentes en Argentina datan del año 1950, con intervención de la CEPAL y de 1953, 1963 y 1973, con la colaboración del Banco Central de la República Argentina. La última matriz de insumo - producto fue confeccionada en 1998 por el Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INDEC) [5].

La matriz insumo – producto (MIP) es un registro ordenado de las transacciones entre los sectores productivos, orientado a la satisfacción de la demanda final: consumo de las familias o del gobierno, inversiones físicas o exportaciones. En el proceso de generación de dichos bienes, los sectores productivos generan bienes intermedios que se compran y venden entre sí. De esta manera se puede ilustrar la interrelación entre los diversos sectores productivos y los impactos directos e indirectos que tiene sobre éstos una variación en la demanda final. La MIP permite cuantificar el incremento de la producción de todos los sectores, derivado de la variación de uno de ellos en particular.

Es un instrumento analítico que describe en forma cuantitativa las relaciones entre sectores, productos e insumos de una economía. Permite apreciar en conjunto y en forma cuantitativa la diversidad productiva de un país y su estructura. Constituye una herramienta central en el análisis económico ya que permite indagar las

repercusiones sectoriales frente a variaciones que son consecuencia de las decisiones de los responsables de la definición de la política económica.

Para el empresario, que conoce bien el sector de actividad en donde están ubicados los bienes y servicios que produce, pero que conoce menos sobre la rama de la actividad de los clientes de sus compradores, la MIP ofrece una descripción detallada de la ruta que siguen los bienes y servicios hasta llegar a la demanda final; y le brinda la participación relativa de su empresa en el total de una determinada rama de actividad con sus consecuentes posibilidades de expansión en el mercado.

La MIP permite cuantificar el efecto completo de los cambios en la demanda final en los requerimientos directos e indirectos de empleo.

En la actualidad es factible que los datos requeridos para realizar el análisis de insumo-producto no puedan precisarse con exactitud debido a la incertidumbre imperante en los mercados y a la velocidad con que se producen los cambios en los mismos. El valor en unidades monetarias del producto final de una industria que debe adquirir otra para producir una unidad monetaria de sus propios productos se aproxima para poder aplicar el modelo clásico. Es decir, una vez más la realidad se ajusta al modelo disponible, perdiendo información.

En este trabajo se presenta el enfoque de Buckley [1] de insumo-producto para una economía abierta en el cual los coeficientes técnicos pueden expresarse por medio de números borrosos.

2. MODELO DE INSUMO-PRODUCTO PARA UNA ECONOMÍA ABIERTA

Sea una economía compuesta por n industrias, cada una de las cuales produce sólo un tipo de producto final. Las industrias están ligadas ya que cada una de ellas debe usar algunos de los productos de las otras para poder funcionar. Además deben producir cierta cantidad de productos terminados para la demanda final.

El análisis de insumo – producto determina la producción de cada una de las industrias si la demanda final cambia, asumiendo que la estructura de la economía no cambia.

Sean:

b_{ij} : valor en unidades monetarias de los productos de la industria i usados por la industria j .

$B = (b_{ij})$: matriz de insumo producto.

F_i : demanda final para los productos de la industria i .

$$T_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} + F_i \text{ es el producto final de la industria } i \quad (1)$$

La estructura de la economía se puede describir por la matriz de coeficientes técnicos $A = (a_{ij})$, cuyos elementos son adimensionales y se obtienen dividiendo cada b_{ij} por la producción total del sector j , es

$$\text{decir, } a_{ij} = \frac{b_{ij}}{T_j} \quad (2)$$

La siguiente tabla muestra el modelo de insumo – producto para una economía de n industrias.

| | Industria 1 | Industria 2 | ... | Industria n | Demanda final | Producto total |
|-------------|-------------|-------------|-----|-------------|---------------|----------------|
| Industria 1 | a_{11} | a_{12} | ... | a_{1n} | F_1 | T_1 |
| Industria 2 | a_{21} | a_{22} | ... | a_{2n} | F_2 | T_2 |
| | ... | ... | ... | ... | ... | |
| Industria n | a_{n1} | a_{n2} | ... | a_{nn} | F_n | T_n |

T_i $1 \leq i \leq n$: producto total anual de la industria i expresado en unidades monetarias.

F_i : cantidad de producto total de la industria i consumido en la economía, excluyendo lo consumido por las industrias i , $1 \leq i \leq n$, o lo que se dispone para la demanda final.

a_{ij} : porcentaje de los insumos totales de la industria j que provienen de la industria i

Las restricciones sobre los números de la tabla son:

$$a_{ij} \in [0;1) \quad 1 \leq i, j \leq n \quad F_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq n \quad T_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq n$$

Reemplazando (2) en (1), resulta el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} T_j + F_i = T_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (3)$$

La ecuación (3) muestra cómo el producto total de la industria i se distribuye entre las restantes industrias, otros consumidores y la exportación.

Si se escribe el sistema (3) en forma matricial, considerando

$$A = (a_{ij}) \quad 1 \leq i, j \leq n \quad F = (F_i) \quad 1 \leq i \leq n \quad T = (T_i) \quad 1 \leq i \leq n, \text{ resulta:}$$

$AT + F = T$, donde A es la *matriz de coeficientes técnicos* de la economía.

Para un nuevo vector B de demanda final, se asume que la matriz A se conoce y se mantiene constante. Para obtener el correspondiente vector de producción total X , se debe resolver el sistema:

$$AX + B = X \quad (4)$$

Suponiendo que $I - A$ es no singular y $X \geq 0$, se obtiene :

$$X = (I - A)^{-1} \cdot B \quad (5)$$

3. MODELO ABIERTO DE INSUMO-PRODUCTO CON DATOS INCIERTOS

Si los elementos de A y B están expresados por números borrosos, el problema consiste en resolver (4) como un sistema de ecuaciones con coeficientes borrosos. Cuando la ecuación (4) tiene una solución borrosa X , se dice que existe un modelo de insumo - producto borroso para la economía.

Se considerarán números borrosos \tilde{Y} con función de pertenencia $\mu_{\tilde{Y}}(y)$, descriptos por (y_1, y_2, y_3, y_4) y que verifican: (i) $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq y_4$,

$$(ii) \mu_{\tilde{Y}}(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (y_1, y_4) \\ 1 & y \in [y_2, y_3] \end{cases}, \quad (iii) \text{ la función } \mu_{\tilde{Y}}(y) \text{ es continua y}$$

monótona creciente de 0 a 1 en $[y_1, y_2]$, (iv) la función $\mu_{\tilde{Y}}(y)$ es continua y monótona decreciente de 1 a 0 en $[y_3, y_4]$

Si la función $\mu_{\tilde{Y}}(y)$ es lineal, el número borroso es trapezoidal cuando $y_2 < y_3$ y triangular si $y_2 = y_3$. Si $y_1 = y_2 = y_3 = y_4$, entonces \tilde{Y} es nítido.

El sistema borroso expresado en forma matricial para el modelo abierto, es

$$A.X + B = X \quad (6)$$

$A = (\tilde{A}_{ij}) \quad 1 \leq i, j \leq n$: matriz cuyos coeficientes son números borrosos en $[0,1]$

B : vector de $n \times 1$ de números borrosos no negativos

X : vector incógnita.

Se usan α -cortes para $0 \leq \alpha \leq 1$ con la siguiente notación:

$$A_{ij}^{\alpha} = [a_{ij}^{\alpha}, \bar{a}_{ij}^{\alpha}] \quad B_i^{\alpha} = [b_i^{\alpha}, \bar{b}_i^{\alpha}]$$

Como a_{ij}^{α} y \bar{a}_{ij}^{α} denotan los límites inferior y superior de cada α -corte respectivamente, se obtienen las matrices $\underline{A}^{\alpha} = (a_{ij}^{\alpha})$ y $\bar{A}^{\alpha} = (\bar{a}_{ij}^{\alpha})$

La ecuación (6) se transforma en :

$$\begin{aligned} \underline{A}^{\alpha} . \underline{X}^{\alpha} + \underline{B}^{\alpha} &= \underline{X}^{\alpha} \\ \bar{A}^{\alpha} . \bar{X}^{\alpha} + \bar{B}^{\alpha} &= \bar{X}^{\alpha} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

Resolviendo, para cada α , se obtiene:

$$\begin{aligned} \underline{X}^{\alpha} &= (I - \underline{A}^{\alpha})^{-1} . \underline{B}^{\alpha} \\ \bar{X}^{\alpha} &= (I - \bar{A}^{\alpha})^{-1} . \bar{B}^{\alpha} \end{aligned}$$

Aunque el sistema anterior tenga solución \underline{X}^{α} , \bar{X}^{α} esto no garantiza que se obtengan números borrosos \tilde{X}_i . Se dice que existe una solución \tilde{X}_i cuando:

- i. Existen $(I - A^\alpha)^{-1}$ y $(I - \bar{A}^\alpha)^{-1}$
- ii. $\underline{X}_i^\alpha \geq 0$ es una función creciente para todo i
- iii. $\bar{X}_i^\alpha \geq 0$ es una función decreciente para todo i
- iv. $\underline{X}_i^1 \leq \bar{X}_i^1$ para todo i

A^α (\bar{A}^α) es *semipositiva* si todos sus elementos son no negativos y cada fila (columna) tiene al menos un elemento positivo.

Se supone que A^α y \bar{A}^α son semipositivas para todo $0 \leq \alpha \leq 1$.

Si una fila de A es nula, se puede no tomar esta industria en consideración. Se sacan sus insumos (si los hubiera) y se agregan a la columna de demanda final. Si una columna en \tilde{A} es nula, se puede eliminar esta industria y ubicar sus insumos (si los hubiera) en la fila de los insumos externos.

Buckley [1] demuestra la siguiente condición necesaria, acerca de la existencia del modelo abierto de insumo - producto con coeficientes borrosos:

Teorema. Si $\sum_{i=1}^n a_{ij} < 1$ para todo j , el modelo de insumo producto

borroso existe para la economía.

Demostración

Sea $W = A^\alpha$ o $W = \bar{A}^\alpha$ para todo $0 \leq \alpha \leq 1$.

La suma de los elementos de las columnas de W es menor a 1. Si $v = (1, \dots, 1)$ es un vector de $1 \times m$, entonces $v.W = s = (s_1, \dots, s_m)$ con $0 < s_i < 1$ para todo i .

Como W es una matriz cuadrada semipositiva, tiene un autovalor λ^* asociado al autovector x^* tal que :

- i. λ^* es real y no negativo
- ii. $|\lambda| < \lambda^*$ para λ cualquier otra raíz del polinomio característico.
- iii. x^* es no negativo
- iv. Para cualquier $\mu > \lambda^*$, $\mu I - W$ es no singular y $(\mu I - W)^{-1}$ es semipositiva.

• Se probará que $\lambda^* < 1$. En tal caso, $I - A^\alpha$ e $I - \bar{A}^\alpha$ son no singulares y sus inversas son semipositivas.

Como $Wx^* = \lambda^* x^*$, entonces $vWx^* = \lambda^* (vx^*)$.

Por lo tanto, $sx^* = \lambda^* \sum_{i=1}^m x_i^*$

Pero $sx^* < \sum_{i=1}^m x_i^*$ porque $0 < s_i < 1$ para todo i .

Entonces $\lambda^* \sum_{i=1}^m x_i^* < \sum_{i=1}^m x_i^*$ y $\lambda^* < 1$ porque la suma es positiva.

Además X_i^α y \bar{X}_i^α son no negativas porque B_i^α lo es y las inversas son semipositivas.

- X_i^α es una función creciente para todo i .

Con este fin se introduce la siguiente notación.

Si $\tilde{R} = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ y $\mu_{\tilde{R}}(x) = \alpha$ $0 \leq \alpha \leq 1$, sea $\mu^{-1}_{\tilde{R}}(x) = \begin{cases} f(\alpha) & x \in [r_1, r_2] \\ g(\alpha) & x \in [r_3, r_4] \end{cases}$.

Por lo tanto,

1. Si $\mu_{\tilde{A}_{ij}}(x) = \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces $\mu^{-1}_{\tilde{A}_{ij}}(x) = \begin{cases} a_{ij} = f_{ij}(\alpha) & x \in [a_{ij1}, a_{ij2}] \\ a_{ij} = g_{ij}(\alpha) & x \in [a_{ij3}, a_{ij4}] \end{cases}$

2. Si $\mu_{\bar{b}_i}(x) = \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces $\mu^{-1}_{\bar{b}_i}(x) = \begin{cases} \underline{b}_i = f_i(\alpha) & x \in [b_{i1}, b_{i2}] \\ \bar{b}_i = g_i(\alpha) & x \in [b_{i3}, b_{i4}] \end{cases}$
3. Si $\mu_{\bar{x}_i}(x) = \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces $\mu^{-1}_{\bar{x}_i}(x) = \begin{cases} \underline{x}_i = F_i(\alpha) & x \in [x_{i1}, x_{i2}] \\ \bar{x}_i = G_i(\alpha) & x \in [x_{i3}, x_{i4}] \end{cases}$

Supongamos también que todas las funciones inversas son diferenciables. Para esto basta con saber que son diferenciables a cada lado.

La ecuación $A^\alpha \underline{X}^\alpha + B^\alpha = \underline{X}^\alpha$ puede escribirse:

$$(I - [f_{ij}(\alpha)])[F_i(\alpha)] = [f_i(\alpha)] \quad (7)$$

$[f_{ij}(\alpha)]$ es una matriz de $m \times m$ y $[F_i(\alpha)]$, $[f_i(\alpha)]$ son vectores de $m \times 1$

La ecuación (7) define $F_i(\alpha)$ en forma implícita. Si derivamos ambos miembros respecto de α , se obtiene:

$$[-f'_{ij}(\alpha)][F_i(\alpha)] + (I - [f_{ij}(\alpha)])[F'_i(\alpha)] = [f'_i(\alpha)] \quad (8)$$

De (8) se deduce que

$$[F'_i(\alpha)] = (I - [f_{ij}(\alpha)])^{-1} \cdot E(\alpha), \text{ con } E(\alpha) = [f'_i(\alpha)] + [f'_i(\alpha)] \quad (9)$$

Se ve que $F'_i(\alpha) > 0$ para todo i porque $E(\alpha)$ es un vector positivo de $m \times 1$ y la inversa es una matriz semipositiva. Por lo tanto \underline{X}_i^α es una función creciente.

- Análogamente se prueba que \bar{X}_i^α es una función decreciente.
- $\underline{X}_i^\alpha \leq \bar{X}_i^\alpha$ cuando $\alpha = 1$.

Si $a_{ij2} = a_{ij3}$ para todos los i, j y $b_{i2} = b_{i3}$ para todo i , entonces

$$\underline{X}_i^\alpha = \bar{X}_i^\alpha \text{ cuando } \alpha = 1.$$

Si $a_{ij2} < a_{ij3}$ para algún i, j y/o algunos $b_{i2} < b_{i3}$, entonces $\underline{X}_i^\alpha \leq \bar{X}_i^\alpha$ cuando $\alpha = 1$.

4. EJEMPLOS

4. 1. Sea la siguiente tabla correspondiente a una economía de dos industrias, donde, para simplificar la operatoria, hemos considerado para los coeficientes tecnológicos una aproximación triangular

| | Industria I | Industria II | Demanda final | Producto total |
|------------------|-----------------|----------------|---------------|----------------|
| Industria I | (0.25,0.3,0.35) | (0.3,0.4,0.5) | (60,65,80) | \tilde{X}_1 |
| Industria II | (0.4,0.5,0.6) | (0.2,0.35,0.4) | (50,55,70) | \tilde{X}_2 |
| Insumos externos | (0.1,0.2,0.3) | (0.2,0.3,0.4) | | |
| Total | (0.75,1,1.25) | (0.7,1.05,1.3) | | |

$$a_{114} + a_{214} = 0.35 + 0.6 = 0.95 < 1$$

$$a_{124} + a_{224} = 0.5 + 0.4 = 0.9 < 1$$

El teorema garantiza que hay un modelo de insumo – producto borroso para esta economía.

En este caso resulta para $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$A^\alpha = \begin{pmatrix} [0.05\alpha + 0.25; -0.05\alpha + 0.35] & [0.1\alpha + 0.3; -0.1\alpha + 0.5] \\ [0.1\alpha + 0.4; -0.1\alpha + 0.5] & [0.15\alpha + 0.2; -0.05\alpha + 0.4] \end{pmatrix}$$

$$B^\alpha = \begin{pmatrix} [5\alpha + 60; -15\alpha + 80] \\ [5\alpha + 50; -15\alpha + 70] \end{pmatrix}$$

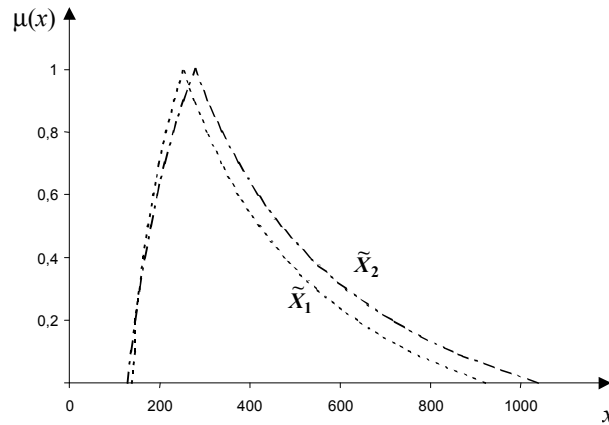
Resolviendo el sistema $A^\alpha \cdot X^\alpha + B^\alpha = X^\alpha$ para $0 \leq \alpha \leq 1$ se obtienen los valores de los α -cortes del vector de producción total borroso, que figuran en la siguiente tabla:

| α | $[x_1^\alpha; \bar{x}_1^\alpha]$ | $[x_2^\alpha; \bar{x}_2^\alpha]$ |
|----------|----------------------------------|----------------------------------|
|----------|----------------------------------|----------------------------------|

| | | |
|-----|-----------------|------------------|
| 0.0 | [131.25;922.22] | [128.13;1038.89] |
| 0.1 | [144.73;756.31] | [136.39;850.78] |
| 0.2 | [145.36;637.12] | [145.52;715.62] |
| 0.3 | [153.57;547.35] | [155.67;613.80] |
| 0.4 | [162.72;477.31] | [167.03;534.35] |
| 0.5 | [173.01;421.15] | [179.80;470.61] |
| 0.6 | [184.64;375.10] | [194.27;418.34] |
| 0.7 | [197.90;336.68] | [210.81;374.70] |
| 0.8 | [213.18;304.12] | [229.89;337.72] |
| 0.9 | [230.97;276.19] | [252.15;305.98] |
| 1.0 | [251.96;251.96] | [278.43;278.43] |

Se observa que cada componente del vector de producción final es un número borroso que no resulta triangular.

La representación gráfica es:



4. 2. Se considera la siguiente tabla correspondiente a una economía de dos industrias:

| | Industria I | Industria II | Demanda final | Producto total |
|------------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| Industria I | (0.2,0.3,0.4) | (0.3,0.4,0.5) | (60,65,80) | \tilde{X}_1 |
| Industria II | (0.4,0.5,0.6) | (0.3,0.4,0.5) | (50,55,70) | \tilde{X}_2 |
| Insumos externos | (0.1,0.2,0.3) | (0.1,0.2,0.3) | | |
| Total | (0.7,1.0,1.3) | (0.7,1.0,1.3) | | |

$$a_{114} + a_{214} = 0.4 + 0.6 = 1$$

$$a_{124} + a_{224} = 0.5 + 0.5 = 1$$

El teorema no garantiza la existencia de un modelo de insumo – producto borroso para esta economía.

En este caso resulta para $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$A^\alpha = \begin{pmatrix} [0.1\alpha + 0.2; -0.1\alpha + 0.4] & [0.1\alpha + 0.3; -0.1\alpha + 0.5] \\ [0.1\alpha + 0.4; -0.1\alpha + 0.6] & [0.1\alpha + 0.3; -0.1\alpha + 0.5] \end{pmatrix}$$

$$B^\alpha = \begin{pmatrix} [5\alpha + 60; -15\alpha + 80] \\ [5\alpha + 50; -15\alpha + 70] \end{pmatrix}$$

Si se considera el sistema $\bar{A}^\alpha \bar{X}^\alpha + \bar{B}^\alpha = \bar{X}^\alpha$ para nivel de presunción $\alpha=0$, como $\det(I - \bar{A}^0) = \det \begin{pmatrix} 0.6 & -0.5 \\ -0.6 & 0.5 \end{pmatrix} = 0$, resulta que $I - \bar{A}^0$ es singular y se prueba que el sistema es incompatible.

Además $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \bar{X}_i^\alpha = \infty \quad i=1,2$

Por lo tanto $\bar{X}_i \quad i=1,2$ no son números borrosos porque tienen soporte infinito.

4. 3. Se considera la siguiente tabla correspondiente a una economía de dos industrias:

| | Industria I | Industria II | Demanda final | Producto total |
|------------------|---------------|---------------|------------------|----------------|
| Industria I | (0.3,0.4,0.5) | (0.5,0.6,0.7) | (60,65,80) | \bar{X}_1 |
| Industria II | (0.4,0.5,0.6) | (0.2,0.3,0.4) | (50,55,70) | \bar{X}_2 |
| Insumos externos | (0.0,0.1,0.2) | (0.0,0.1,0.2) | | |
| Total | (0.7,1.0,1.3) | (0.7,1.0,1.3) | | |

$$a_{114} + a_{214} = 0.5 + 0.6 = 1.1$$

$$a_{124} + a_{224} = 0.7 + 0.4 = 1.1$$

El teorema no garantiza la existencia de un modelo de insumo – producto borroso para esta economía.

En este caso resulta para $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$A^\alpha = \begin{pmatrix} [0.1\alpha + 0.3; -0.1\alpha + 0.5] & [0.1\alpha + 0.5; -0.1\alpha + 0.7] \\ [0.1\alpha + 0.4; -0.1\alpha + 0.6] & [0.1\alpha + 0.2; -0.1\alpha + 0.4] \end{pmatrix}$$

$$B^\alpha = \begin{pmatrix} [5\alpha + 60; -15\alpha + 80] \\ [5\alpha + 50; -15\alpha + 70] \end{pmatrix}$$

Si se considera el sistema $A^\alpha X^\alpha + B^\alpha = X^\alpha$ para $\alpha = 0.5$,

i. $\det(I - \bar{A}^{0.5}) = \det \begin{pmatrix} 0.55 & -0.65 \\ -0.55 & 0.65 \end{pmatrix} = 0$. Entonces $I - \bar{A}^{0.5}$ es singular.

ii. $\bar{X}_i^\alpha < 0$ sii $0 \leq \alpha < 0.5$ $i = 1, 2$

$\bar{X}_i^\alpha > 0$ sii $0.5 < \alpha \leq 1$ $i = 1, 2$

iii. $\lim_{\alpha \rightarrow 0.5} \bar{X}_i^\alpha = \infty$ $i = 1, 2$

iv. \bar{X}_i^α $i = 1, 2$ no puede ser una función decreciente

Por lo tanto \tilde{X}_i $i = 1, 2$ no puede ser un número borroso.

Los ejemplo 4.2 y 4.3 muestran que si no se cumplen las condiciones del teorema, puede no haber un modelo de insumo – producto borroso para la economía.

5. MODELO DE INSUMO-PRODUCTO PARA UNA ECONOMÍA CERRADA EN CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE

El modelo de Leontief para una economía cerrada se caracteriza porque no hay saldos ni déficit de producción, y por lo tanto, no hay lugar para ahorros ni inversiones nuevas.

Cuando se plantea dicho modelo se obtiene un sistema de la forma $AX = X$, donde A es la matriz de coeficientes técnicos y $X^t = (x_1, \dots, x_n)$ es el vector de producción. Para que este modelo sea consistente, A debe tener a 1 por autovalor y el autovector correspondiente debe ser $X > 0$.

Si los coeficientes técnicos se expresan mediante números borrosos positivos (algunos podrían ser nítidos), se observa la necesidad de emplear autovalores borrosos para hallar la solución. Buckley [2] generaliza los resultados de Perron-Frobenius referidos a autovalores de matrices no negativas irreducibles al caso de matrices borrosas no negativas. Dichas generalizaciones se utilizan para resolver el modelo cerrado de insumo-producto.

6. COMENTARIOS FINALES

Se han presentado condiciones necesarias para extender el modelo abierto clásico de insumo-producto al caso de una economía borrosa. Ciertos valores, como el porcentaje de los insumos totales de una determinada industria provenientes de otra y la demanda final de cada industria, a menudo no son conocidos y se pueden aproximar por números borrosos.

Expresar los coeficientes técnicos mediante números borrosos permite representar en forma más adecuada la estimación proporcionada por los expertos y las posibles fluctuaciones de los datos.

En síntesis, el modelo propuesto proporciona un mejor aprovechamiento de la información disponible.

REFERENCIAS

- [1] Buckley J.J. (1989). Fuzzy input – output analysis. *European Journal of Operational Research* 39. North-Holland, pp. 54-60
- [2] Buckley J.J. (1990). Fuzzy eigenvalues and input – output analysis. *Fuzzy Sets and Systems* 34. North-Holland, pp. 187-195
- [3] Buckley J.J. (1992). Solving fuzzy equations in economics and finance *Fuzzy Sets and Systems* 48. North-Holland , pp. 289-296
- [4] Ferrucci R. (1989). *Instrumental para el estudio de la economía argentina*. EUDEBA, Buenos Aires, pp. 46-61.
- [5] INDEC. (1998). *Comprendiendo la matriz insumo producto*. Buenos Aires.
- [6] Kaufmann A., Gupta M.M. (1985) *Introduction to Fuzzy Arithmetic*. Van Nostrand Reinhold. New York
- [7] Lazzari L.L., Machado E. – Pérez R. (1994). *Técnicas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*. Facultad de Ciencias Económicas. Buenos Aires.
- [8] Lazzari L.L., Machado E. – Pérez R. (1999). Los conjuntos borrosos: una introducción. *Cuadernos del CIMBAGE no. 2*, pp. 1-25. Facultad de Ciencias Económicas. Buenos Aires.
- [9] Monteverde H. (1994). *Conceptos e interpretación de las cuentas nacionales*. Ediciones Macchi, Buenos Aires, capítulo 7.
- [10] Noble B. , Daniel J. (1989) *Álgebra lineal aplicada*. Prentice – Hall Hispanoamérica S.A. México.
- [11] Toranzos F.I. (1964). *Formación matemática del economista*. Fondo de Cultura Económica. Buenos Aires.