Cuadernos del CIMBAGE
ISSN: 1666-5112
cimbage@econ.uba.ar
Facultad de Ciencias Económicas
Argentina

Mouliá, Patricia; Lazzari, Luisa; Eriz, Mariano
HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS INNOVADORAS PARA LA MAXIMIZACIÓN DE LA UTILIDAD
Cuadernos del CIMBAGE, núm. 11, 2009, pp. 1-24
Facultad de Ciencias Económicas
Buenos Aires, Argentina

Cuadernos del CIMBAGE Nº 11 (2009) 1- 24

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS INNOVADORAS PARA LA MAXIMIZACIÓN DE LA UTILIDAD

Patricia Mouliá, Luisa Lazzari, Mariano Eriz
CIMBAGE - Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires
Av. Córdoba 2122 – Ciudad de Buenos Aires – C1120AAQ- Argentina
patriciamoulia@cimbage.com.ar, luisalazzari@cimbage.com.ar, marianoeriz@cimbage.com.ar

Recibido 12 de mayo 2008, aceptado 25 de agosto 2008

Resumen

La rápida evolución del entorno social, el desarrollo tecnológico y el creciente clima de incertidumbre provocan cambios continuos en los escenarios de la actividad económica actual. En estos casos, los enfoques clásicos no ponen de manifiesto la complejidad y el movimiento de la economía, y ofrecen una representación simplificada de la realidad. La teoría de los conjuntos borrosos aplicada a la toma de decisión permite trabajar en un marco flexible, donde es posible formalizar la incertidumbre y la imprecisión, y así obtener modelos más consistentes.

Un consumidor que considera la compra de una cantidad de unidades de cada uno de dos artículos se asocia con una función de utilidad $U = F(q_1, q_2)$, que mide la satisfacción total (o utilidad) que obtiene con q_1 unidades del primer bien y q_2 del segundo. Una curva de nivel $F(q_1, q_2) = C$ de la función de utilidad se denomina curva de indiferencia y proporciona todas las combinaciones de q_1 y q_2 que brindan el mismo nivel de satisfacción al consumidor.

En este trabajo se implementa un modelo flexible que emplea intervalos de confianza, números borrosos y números híbridos para maximizar la utilidad sujeta a restricción presupuestaria en un ambiente incierto. El enfoque presentado resulta una generalización del clásico y es útil para ayudar al consumidor a generar nuevos escenarios de reflexión a la hora de tomar sus decisiones.

***Palabras clave*:** utilidad, maximización, conjuntos borrosos, incertidumbre.

INNOVATING MATHEMATICAL TOOLS FOR UTILITY MAXIMIZATION

Patricia Mouliá, Luisa Lazzari, Mariano Eriz
CIMBAGE - Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires
Av. Córdoba 2122 – Ciudad de Buenos Aires – C1120AAQ- Argentina
patriciamoulia@cimbage.com.ar, luisalazzari@cimbage.com.ar, marianoeriz@cimbage.com.ar

Received 12 May 2008, accepted 25 August 2008

Abstract

The rapid evolution of the social environment, the technological development and the increasing climate of uncertainty bring about continuous changes in the current economic activity. In these cases, the classic approaches do not show the economy' s complexity and movement, and offer a simplified reality representation.

The fuzzy sets theory applied to decision making, allows us to work in a flexible frame, where it is possible to determine the uncertainty and imprecision, and thus to obtain more consistent models.

The purchase of an amount of units of each of two different goods, is associated with an utility function $U = F(q_1,q_2)$, which measures the total satisfaction (or utility) that the consumer will obtain with q_1 units of the first one and q_2 of the second. A curve of the utility function $F(q_1,q_2) = C$ is called the indifference curve and provides all the combinations of q_1 y q_2 that offer the same level of satisfaction to the consumer.

In this work, a flexible model that applies confidence intervals, fuzzy numbers and hybrid numbers is implemented to maximize the utility function subject to budgetary restrictions in an uncertain environment. This approach is a generalization of the classic one, and it helps consumers generate new scenes of reflection when making decisions.

***Keywords*:** utility, maximization, fuzzy sets, uncertainty.

1. INTRODUCCIÓN

La rápida evolución del entorno social, el desarrollo tecnológico y el creciente clima de incertidumbre provocan cambios continuos en los escenarios de la actividad económica actual. En estos casos, los enfoques clásicos no ponen de manifiesto la complejidad y el movimiento de la economía, y ofrecen una representación simplificada de la realidad.

La teoría de los conjuntos borrosos aplicada a la toma de decisión permite trabajar en un marco flexible, donde es posible formalizar la incertidumbre y la imprecisión, y así obtener modelos más consistentes.

En este trabajo se considera la aplicación de curvas de indiferencia en la *maximización de la utilidad* y se implementa un modelo flexible que emplea intervalos de confianza, números borrosos y números híbridos para maximizar la utilidad sujeta a restricción presupuestaria en un ambiente incierto. El enfoque presentado resulta una generalización del clásico y es útil para ayudar al consumidor a generar nuevos escenarios de reflexión a la hora de adoptar sus decisiones.

Está estructurado del siguiente modo: en la sección 2 se definen brevemente los conceptos de curvas de indiferencia, ecuación presupuestaria y maximización de la utilidad sujeta a restricción de ingreso y se presenta un caso de estudio de los mismos en condiciones de certeza. En el apartado 3 se efectúa un análisis de los temas del ítem 2 en condiciones de incertidumbre, se detallan tres alternativas para su tratamiento de acuerdo con la naturaleza de la información disponible, y se desarrolla un ejemplo de cada una de ellas como generalización del caso de estudio nítido. Finalmente, en la parte 4, se formulan las principales conclusiones.

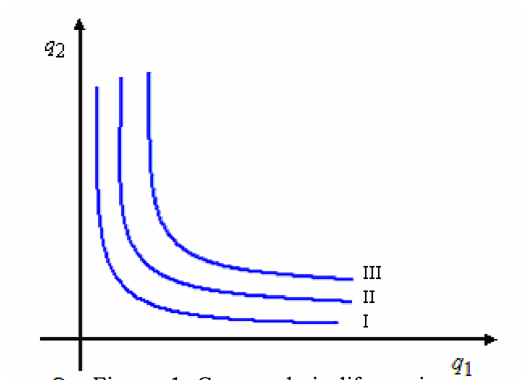
2. CONDICIONES DE CERTEZA

2.1. Curvas de indiferencia

Se considera el caso simplificado en el que las adquisiciones de un consumidor están limitadas a dos artículos.

Las preferencias del consumidor le permiten elegir diferentes cestas. Si se ofrecen al consumidor dos cestas diferentes, elige la que mejor se ajusta a sus gustos. Si las dos cestas se ajustan a sus gustos por igual, se dice que el consumidor es indiferente a ambas.

Pueden representarse gráficamente sus preferencias por medio de las curvas de indiferencia:



0 Figura 1. Curvas de indiferencia

Todos los puntos sobre la misma curva de indiferencia proporcionan idéntica satisfacción al consumidor. Los puntos sobre la curva II indican mayor satisfacción que los puntos sobre la curva I, pero menor que los puntos sobre la curva III. De esta forma, sólo se requiere el orden o el rango de preferencia de un consumidor para poder trazar sus curvas de indiferencia.

La función de utilidad ordinal es $U = F(q_1, q_2)$, donde q_1 y q_2 son las cantidades consumidas de los bienes Q_1 y Q_2, y el parámetro U representa un nivel de preferencia o satisfacción de ese consumidor al distribuir sus gastos entre los dos bienes indicados.

Una función de utilidad es un instrumento para asignar un número a cada cesta de consumo de tal forma que una de ellas se prefiere a otra si y sólo si la utilidad de la primera es mayor que la utilidad de la segunda. La magnitud de la función de utilidad solamente es relevante en la medida en que nos permite determinar el lugar relativo que ocupan las diferentes cestas de consumo (Varian, 2007).

Se suelen asumir ciertos supuestos sobre las preferencias que se denominan axiomas de la teoría del consumidor como la completitud, la reflexividad y la transitividad.

Las curvas de indiferencia presentan las siguientes características:

- **decrecientes:** si disminuye la cantidad de un bien, tendrá que compensarlo con mayor cantidad de otro para mantener el mismo nivel de satisfacción.

- **no se cortan:** si se cortaran en el punto de intersección, ambas curvas tendrían el mismo nivel de satisfacción, pero como dentro de cada curva todos sus puntos tienen el mismo nivel de satisfacción, esto implicaría que todos los puntos de las dos curvas estarían al mismo nivel. Esto sería absurdo, dado que a un lado del punto de corte una de las curvas estaría más alejada del origen (nivel de satisfacción mayor) mientras que al otro lado del punto de corte se situaría más cerca del origen (nivel de satisfacción menor).
- **el nivel de la función aumenta en dirección noreste:** las curvas de indiferencia, a medida que se alejan del origen, representan niveles superiores de satisfacción por el axioma de no saciedad (el agente siempre prefiere tener mayor cantidad de ambos bienes).
- **convexas** respecto al origen de coordenadas.

2.2. Ecuación presupuestaria. Recta balance

La ecuación presupuestaria de un consumidor que tiene un ingreso I y desea invertirlo en su totalidad en la compra de dos bienes Q_1 y Q_2, cuyos precios unitarios son p_1 y p_2 respectivamente, está dada por: $p_1q_1 + p_2q_2 = I$, donde q_1 y q_2 representan las cantidades de cada bien. Gráficamente, corresponde a una recta llamada recta balance o restricción presupuestaria (Figura 2) que, escrita en forma segmentaria resulta: $\frac{q_1}{I/p_1} + \frac{q_2}{I/p_2} = 1$, donde I / p_1 es la cantidad máxima que el consumidor de ingreso I puede adquirir de Q_1 sin comprar Q_2, y I / p_2, la cantidad máxima que puede adquirir de Q_2 sin comprar Q_1.

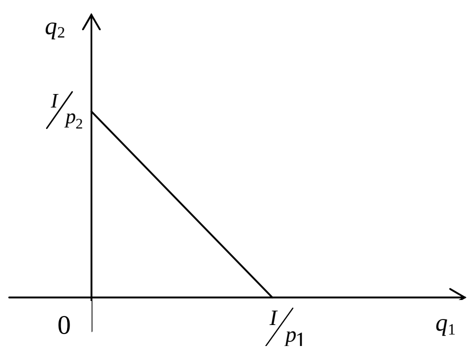


Figura 2. Recta balance o restricción presupuestaria

2.3. Maximización de la utilidad sujeta a restricción de ingreso

Un consumidor racional desea adquirir aquella combinación de bienes Q_1 y Q_2 con la que obtenga el nivel de satisfacción más alto, pero su ingreso no le permite comprar una cantidad ilimitada de productos.

La función de utilidad y la ecuación presupuestaria están dadas respectivamente por:

$$U = F(q_1, q_2) \quad ; \qquad p_1 q_1 + p_2 q_2 = I$$

El consumidor desea alcanzar la curva de indiferencia más alejada del origen que tenga, al menos, un punto en común con la recta de balance. Su equilibrio o posición de máxima satisfacción está en el punto en el cual la recta es tangente a una curva de indiferencia (Figura 3), pues todas las curvas de indiferencia de menor nivel de utilidad resultan secantes a la recta y para niveles de utilidad superior la recta no corta a la curva, es decir que ese nivel de utilidad no es alcanzable con esa renta (Henderson y Quandt, 1991).

En el punto óptimo, la pendiente de la recta balance debe ser igual a la pendiente de la recta tangente a la curva de indiferencia.

Si se considera la función de utilidad $U = kq_1 q_2$, las curvas de indiferencia son hipérbolas equiláteras. En este caso, para buscar el punto donde la recta es tangente a la curva se plantea el siguiente sistema de ecuaciones que debe tener solución única:

$$\begin{cases} \qquad k.q_1.q_2 = U^* \\ p_1 q_1 + p_2 q_2 = I \end{cases}$$

Si se resuelve el sistema, se obtiene:

$$q_2 = \frac{U^*}{k.q_1} \qquad (1)$$

$$q_2 = \frac{I - p_1 q_1}{p_2} \qquad (2)$$

$$\frac{U^*}{k.q_1} = \frac{I - p_1 q_1}{p_2} \qquad (3)$$

Luego, al operar resulta: $kp_1(q_1)^2 - kIq_1 + U^* p_2 = 0$ (4)

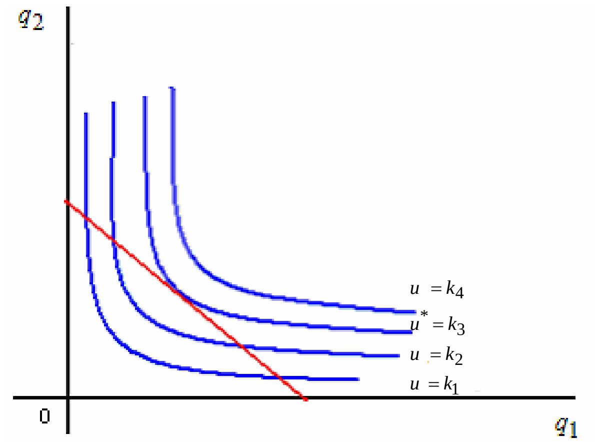


Figura 3. Curvas de indiferencia y recta balance

(4) debe tener solución única, luego:

$$k^2I^2 - 4k.\,p_1.p_2.U^* = 0 \quad \Rightarrow \quad U^* = \frac{kI^2}{4\,p_1\,p_2} \qquad (5)$$

U^* representa el nivel de máxima utilidad.

Al reemplazar (5) en (3) y resolver la ecuación se obtiene $q_1 = \dfrac{I}{2p_1}$ (6)

q_2 puede calcularse sustituyendo q_1 en cualquiera de las ecuaciones (1) ó (2).

Este tipo de problemas también puede resolverse igualando las pendientes de la recta balance y de la recta tangente a la curva de indiferencia. Las mismas se calculan empleando derivadas.

2.3.1 Caso de estudio 1

Un agente cuyo ingreso mensual es de 1000 *pesos desea gastarlo en dos tipos distintos de bienes, A y B, siendo los precios de los mismos estables durante cierto período en* 50 *y* 60 *pesos respectivamente. Si su función de utilidad está dada por* $U = 3q_1q_2$. *¿Cuál es el nivel de satisfacción más alto que puede obtener con dicho ingreso*?

En este caso el sistema que debe tener solución única es:

$$\begin{cases} 3q_1.q_2 = U^* \\ 50q_1 + 60q_2 = 1000 \end{cases}$$

Al reemplazar en (5): $U^* = \dfrac{3(1000)^2}{4.50.60} \Rightarrow U^* = 250$

Al aplicar la fórmula (6) y luego la (1) ó (2), se obtienen los siguientes valores $q^*{}_1 = 10$ y $q^*{}_2 = 8.\hat{3}$.

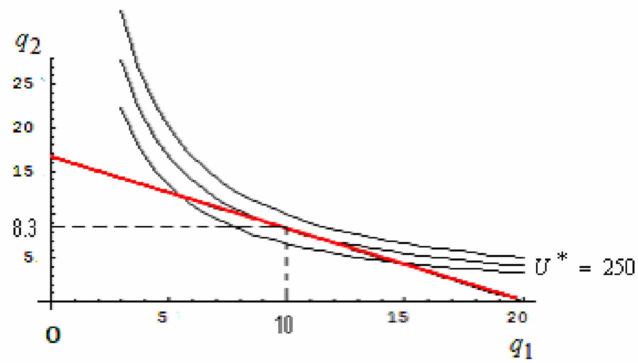


Figura 4. Punto de máxima utilidad

3. CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE

En este apartado, se considera el caso de un consumidor cuyo ingreso no puede determinarse con exactitud en un mercado que presenta fluctuaciones en los precios de sus artículos. El problema de optimizar la utilidad sujeta a la restricción de la renta debe tratarse como un problema en ambiente incierto que puede resolverse mediante el empleo de:

a) intervalos de confianza.
b) números borrosos triangulares (NBT).
c) números híbridos.

El tipo de información disponible indicará la herramienta a emplear.

3.1. Intervalos de confianza

Si se conocen los valores mínimos y máximos que pueden tener los precios de los artículos a comprar y del ingreso, se expresan los mismos como intervalos de confianza:

$$p_1 = [a,b] \;\; ; \;\; p_2 = [c,d] \;\; ; \;\; I = [i_1, i_2]$$

Al reemplazar estos valores en la fórmula (5), se obtiene la utilidad máxima:

$$U^* = \frac{k\,[i_1, i_2]\,[i_1, i_2]}{4\,[a,b]\,[c,d]}$$

Si se tiene en cuenta que se trabaja en $\Re^+$, al resolver las operaciones con los intervalos (Lazzari, 2001), se obtiene:

$$U^* = \left[\frac{k.i_1 i_1}{4bd}, \frac{k.i_2 i_2}{4ac} \right]$$

Luego, la utilidad máxima está dada por el intervalo de confianza:

$$U^* = \left[U_1^*, U_2^* \right]$$

Donde U_1^* representa el máximo nivel de satisfacción en la situación más desfavorable para el consumidor (precios más altos e ingreso más bajo) y U_2^* lo propio en la situación más favorable para el consumidor (precios más bajos e ingreso más alto).

3.1.1 Caso de estudio 2

Un consumidor cuyo ingreso mensual oscila entre 880 *y* 1100 *pesos desea gastarlo en dos tipos distintos de bienes, A y B, cuyos precios son fluctuantes dadas las condiciones del mercado. Para el bien A, el precio oscila entre* 48 *y* 55 *pesos, y para el bien B, entre* 55 *y* 66 *pesos. Si su función de utilidad está dada por* $U = 3q_1q_2$. *¿Cuál es el nivel de satisfacción más alto que puede obtener con dicho ingreso*?

En este caso, los precios y el ingreso pueden expresarse mediante los siguientes intervalos:

$$p_1 = [48{,}55] \quad ; \quad p_2 = [55{,}66] \quad ; \quad I = [880{,}1100]$$

Al reemplazar estos valores en (5) y realizar las operaciones, se obtiene:

$$U^* = \frac{3[880\ ,1100\ ][880\ ,1100\ ]}{4[48\ ,55\ ][55\ ,66\ ]}$$

$$U^* = \left[\frac{2323200}{14520}, \frac{3630000}{10560}\right]$$

$$U^* = [160,\quad 343.75\ ]$$

Esto significa que el nivel de máxima satisfacción del consumidor en su situación más favorable es 343.75 útiles (precios más bajos e ingreso máximo) y en la más desfavorable es 160 útiles (precios más altos e ingreso mínimo). Los sistemas que tienen solución única para estas dos situaciones son respectivamente a) y b).

$$\text{a)} \begin{cases} 3q_1.q_2 = 343.75 \\ 48q_1 + 55q_2 = 1100 \end{cases}$$

Al aplicar las fórmulas (6) y (2), se obtienen respectivamente $q_1^* \cong 11.46\ ;\ q_2^* \cong 10$

$$\text{b)} \begin{cases} 3q_1.q_2 = 160 \\ 55q_1 + 66q_2 = 880 \end{cases}$$

Al reemplazar en (6) y (2), la única solución resulta $q_1^* = 8\ ;\ q_2^* \cong 6.67$

En la Figura 5 se observa la representación gráfica de las situaciones extremas.

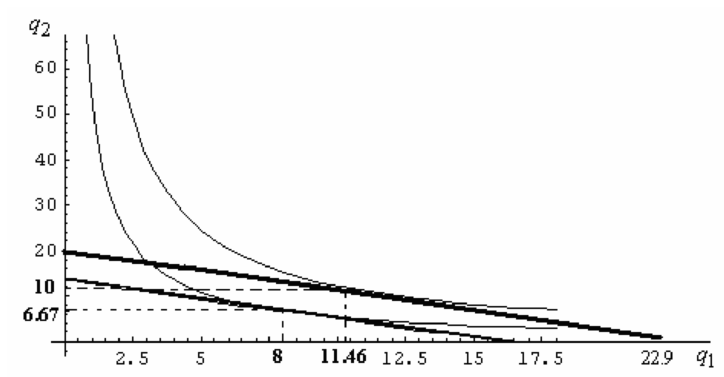


Figura 5. Puntos de máxima utilidad

Se destaca que el intervalo de confianza obtenido $U^* = [160, 343.75]$ como utilidad máxima contiene la solución del problema nítido $U^* = 250$. También puede considerarse cualquier situación intermedia entre estos dos valores.

3.2. Números borrosos triangulares

Si la información disponible permite conocer para los precios de los artículos y el ingreso, además de los valores extremos el más posible, los mismos se expresan como NBT, cuya función de pertenencia es:

$$\forall x \in \Re,\ \mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \le a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & si \quad a_1 \le x \le a_2 \\ \dfrac{-x + a_3}{a_3 - a_2} & si \quad a_2 \le x \le a_3 \\ 0 & si \quad a_3 \le x \end{cases}$$

Su $\alpha - cortes$ son $A_\alpha = [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha; a_3 + (a_2 - a_3)\alpha]$ y para representarlo en forma paramétrica se utilizará la siguiente expresión:

$$\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$$

Luego,

$$\tilde{P}_1 = (a, b, c) \qquad ; \qquad \tilde{P}_2 = (d, e, f) \qquad ; \qquad \tilde{I} = (i_1, i_2, i_3)$$

La utilidad máxima es el número borroso que se obtiene al sustituir estos valores en la fórmula (5) $\tilde{U}^* = \dfrac{k\tilde{I}.\tilde{I}}{4\tilde{P}_1.\tilde{P}_2}$

$\tilde{U}^*$ no es un NBT, sus α - cortes son $U^*_\alpha = [U^*_1(\alpha), U^*_2(\alpha)]$ (Kaufmann y Gupta, 1985).

Para $\alpha = 0$:

- $U^*_1(0)$ representa la utilidad máxima en el escenario más pesimista para el consumidor: los precios más altos y el menor nivel de ingreso. El sistema de ecuaciones que resulta es:

$$\begin{cases} & kq_1.q_2 & = & U^*_1(0) \\ cq_1 & + \quad fq_2 & = & i_1 \end{cases}$$

- $U_2^*(0)$ representa la utilidad máxima en la situación más favorable para el consumidor: los precios más bajos y el mayor nivel de ingreso. El sistema correspondiente es: $\begin{cases} & kq_1.q_2 = U_2^*(0) \\ aq_1 + & dq_2 = i_3 \end{cases}$

Para $\alpha = 1$

- $U_1^*(1) = U_2^*(1) = U^*$ representa la utilidad máxima para la situación de máxima presunción. El sistema que se obtiene es:

$$\begin{cases} & k.q_1 q_2 = U^* \\ bq_1 + & eq_1 = i_2 \end{cases}$$

3.2.1 Caso de estudio 3

Un agente cuyo ingreso mensual oscila entre 880 *y* 1100 *pesos, siendo* 1.000 *el más posible, desea gastarlo en dos tipos distintos de bienes, A y B, cuyos precios son fluctuantes durante ese período de acuerdo con las condiciones del mercado. Para el bien A, el precio oscila entre* 48 *y* 55 *pesos y el más posible es* 50, *mientras que el precio más posible del bien B es 60 pesos y puede variar entre* 55 *y* 66 *pesos. Si su función de utilidad está dada por* $U = 3q_1 q_2$. *¿Cuál es el nivel de satisfacción más alto que puede obtener con dicho ingreso*?

Dadas las condiciones del problema, los precios y el ingreso pueden expresarse mediante los NBT cuyos $\alpha -$cortes se detallan en la Tabla 1.

	NBT	$\alpha -$ cortes
Precio del bien *A*	$\tilde{P}_1 = (48,50,55)$	$P_{1_\alpha} = [48 + 2\alpha \,;\, 55 - 5\alpha]$
Precio del bien *B*	$\tilde{P}_2 = (55,60,66)$	$P_{2_\alpha} = [55 + 5\alpha \,;\, 66 - 6\alpha]$
Ingreso	$\tilde{I} = (880,1000,1100)$	$I_\alpha = [880 + 120\alpha \,;\, 1100 - 100\alpha]$

Tabla 1. NBT y α -cortes

Al sustituir los valores de los NBT en (5), se obtiene:

$$U_{\alpha}^{*} = \frac{3[880+120\alpha,1100-100\alpha][880+120\alpha,1100-100\alpha]}{4.[48+2\alpha,55-5\alpha][55+5\alpha,66-6\alpha]}$$

Al operar con los intervalos (Lazzari, 2001) resulta:

$$U_{\alpha}^{*} = \left[\frac{2323200+633600\alpha+43200\alpha^{2}}{14520-2640\alpha+120\alpha^{2}}, \frac{3630000-660000\alpha+30000\alpha^{2}}{10560+1400\alpha+40\alpha^{2}}\right]$$

En la Tabla 2 se presentan los α -cortes para distintos valores de α.

α	U_{α}^{*}
0	$[160,343.75]$
0.1	$[167.42,333.10]$
0.2	$[175.16,322.76]$
0.3	$[183.22,312.71]$
0.4	$[191.61,302.96]$
0.5	$[200.36,293.48]$
0.6	$[209.48,284.27]$
0.7	$[218.99,275.33]$
0.8	$[228.90,266.64]$
0.9	$[239.23,258.20]$
1	$[250,250]$

Tabla 2. α -cortes

En la Figura 6 se observa que $\tilde{U}^{*}$ no es un NBT, pero puede aproximarse al NBT $\tilde{U}^{*'} = (160, 250, 343.75)$.

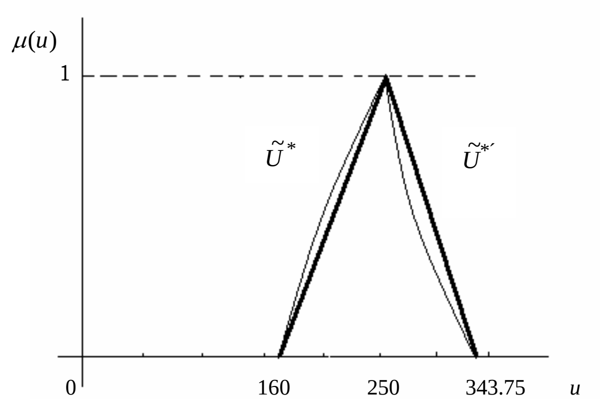


Figura 6. Aproximación por un NBT

De acuerdo con el resultado obtenido, se puede efectuar el siguiente análisis:

Para $\alpha = 0$:

a) $U_1^*(0) =$ 160 representa la utilidad máxima en la situación más desfavorable para el consumidor: los precios más altos y el menor nivel de ingreso. El sistema de ecuaciones, cuya solución debe ser única, es:

$$\begin{cases} 3q_1.q_2 = 160 \\ 55q_1 + 66q_2 = 880 \end{cases}$$

Al aplicar las fórmulas (6) y (2), se obtienen respectivamente $q_1^* = 8$ y $q_2^* \cong 6.67$.

b) $U_2^*(0) =$ 343.75 representa la utilidad máxima en la situación más optimista para el consumidor: los precios más bajos y el mayor nivel de ingreso. El sistema correspondiente resulta:

$$\begin{cases} 3q_1.q_2 = 343.75 \\ 48q_1 + 55q_2 = 1100 \end{cases}$$

Al reemplazar en (6) y (2), la única solución es $q_1^* \cong 11.46$ y $q_2^* \cong 10$.

Para $\alpha = 1$:

c) $U_1^*(1) = U_2^*(1) = 250$ representa la utilidad máxima para la situación de máxima presunción. Es decir:

$$\begin{cases} & 3q_1.q_2 & = & 250 \\ 50q_1 & + \quad 60q_2 & = & 1000 \end{cases}$$

Se aplican las fórmulas (6) y (2) respectivamente para obtener $q_1^* = 10$ y $q_2^* = 8.\widehat{3}$. En la Figura 7 se observan gráficamente las situaciones analizadas.

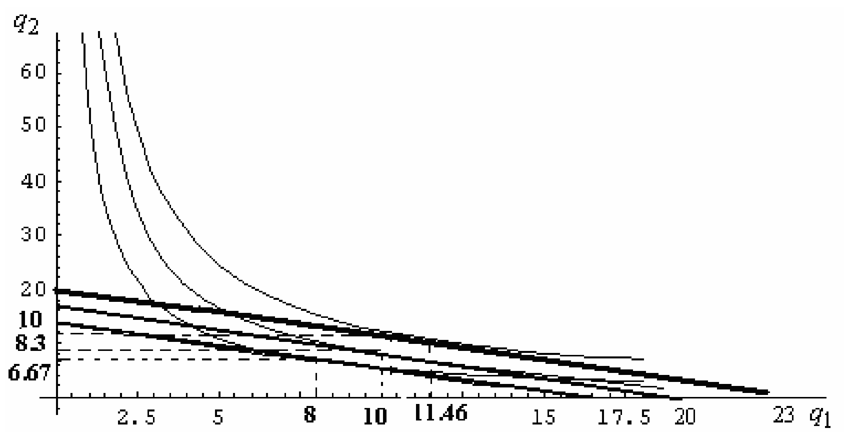


Figura 7. Puntos de máxima utilidad

3.3. Números híbridos

Si se considera un tipo de mercado donde los precios de los bienes no sólo están influenciados por la interacción de la oferta y la demanda, sino además por factores aleatorios como por ejemplo el clima (lluvia, granizo, temperaturas medias, plagas, entre otros), resulta adecuado representarlos mediante números híbridos que combinan la componente incierta y la componente aleatoria.

En cuanto al ingreso del agente, también podría expresarse mediante un número híbrido si, por ejemplo, se parte del supuesto de que la remuneración depende de comisiones (componente borrosa) y que tiene participación accionaria (componente aleatoria).

Luego, de acuerdo con las características del problema, alguno o todos los datos pueden ser expresados como números híbridos. En este trabajo, se desarrolla el caso en el cual los precios están expresados como NBT y el ingreso, como un número híbrido.

Sean los precios de dos bienes expresados por los NBT $\tilde{P}_1 = (a, b, c)$ y $\tilde{P}_2 = (d, e, f)$; y el ingreso por el número híbrido $(\tilde{I}, L)$ cuya componente borrosa es el NBT $\tilde{I} = (i_1, i_2, i_3)$ y la variable aleatoria L cuya función de densidad de probabilidad es $f(l)$.

Si la variable aleatoria toma sus valores en el intervalo $l = [l_1, l_2]$, tal que l_1 y $l_2 \in \Re^+$ y se expresa al NBT correspondiente al ingreso mediante sus $\alpha -$cortes, se tiene:

$$\begin{aligned} I_\alpha[+]l &= [i_1 + (i_2 - i_1)\alpha ; i_3 + (i_2 - i_3)\alpha](+)(l, l) \\ &= [i_1 + (i_2 - i_1)\alpha + l ; i_3 + (i_2 - i_3)\alpha + l] \end{aligned}$$

Luego, $$\tilde{I}[+]l = (i_1 + l, i_2 + l, i_3 + l) \qquad (7)$$

Se realiza una traslación l del número borroso $\tilde{I}$ a la derecha.

Su función de densidad de probabilidad es: $f(\tilde{I}[+]l) = f(l)$ (Kaufmann y Gupta, 1985).

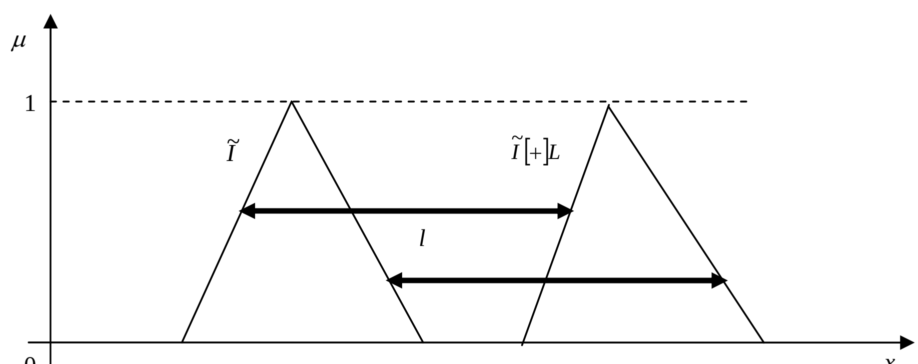


Figura 8. Traslación aleatoria de $\tilde{I}$

Si se consideran los valores extremos l_1 y l_2 se tiene:

$$(i_1 + l_1, i_2 + l_1, i_3 + l_1) \leq (i_1 + l, i_2 + l, i_3 + l) \leq (i_1 + l_2, i_2 + l_2, i_3 + l_2)$$

Esta expresión representa el haz de números borrosos formado por los NBT que se obtienen para cada valor de $l \in [l_1, l_2]$. La envolvente del haz que se observa en la Figura 9 puede representarse mediante el número borroso trapecial:

$$\tilde{E} = (i_1 + l_1, i_2 + l_1, i_2 + l_2, i_3 + l_2)$$

Los valores mínimo y máximo para el ingreso son respectivamente $i_1 + l_1$ y $i_3 + l_2$.

Los valores pertenecientes al intervalo $[i_2 + l_1, i_2 + l_2]$ corresponden a los valores de máxima presunción para los distintos valores de $l \in [l_1, l_2]$.

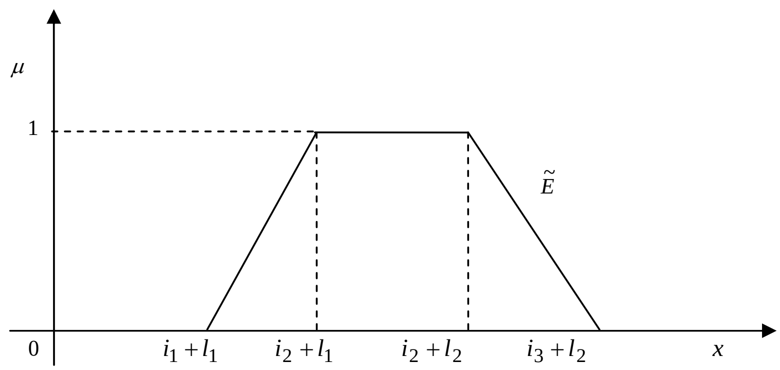


Figura 9. Envolvente del haz

En consecuencia, el ingreso del agente puede tomar valores del intervalo $[i_1 + l_1, i_3 + l_2]$.

Si se procede como en 3.2, para cada NBT del haz la utilidad máxima es el número borroso que se obtiene al sustituir estos valores en la fórmula (5):

$$\tilde{U}_l^{\,*} = \frac{k.(\tilde{I}[+]L).(\tilde{I}[+]L\ )}{4(\tilde{P}_1[+]L\ )(\tilde{P}_2[+]L\ )} \tag{8}$$

$\tilde{U}_l^{\,*}$ no es un NBT, y sus α - cortes son $U^*_{l\,\alpha} = [(U_l^*)_1(\alpha), (U_l^*)_2(\alpha)]$.

Con el fin de determinar las situaciones más favorable y más desfavorable para el consumidor, se considera:

- $(U_{l_1}^{*})_1(0)$ representa la utilidad máxima en el escenario más pesimista para el consumidor: los precios más altos y el menor nivel de ingreso.

El sistema de ecuaciones es: $\begin{cases} kq_1.q_2 = (U_{l_1}^{*})_1(0) \\ cq_1 + f.q_2 = i_1 + l_1 \end{cases}$ (9)

- $(U_{l_2}^{*})_2(0)$ representa la utilidad máxima en la situación más favorable para el consumidor: los precios más bajos y el mayor nivel de ingreso.

El sistema correspondiente resulta: $\begin{cases} kq_1.q_2 = \left(U_{l_2}^{*}\right)_2(0) \\ a.q_1 + d.q_2 = i_3 + l_2 \end{cases}$ (10)

Estas dos situaciones corresponden a los valores con nivel de presunción $\alpha = 0$.

En consecuencia, la utilidad máxima toma valores en el intervalo $\left[(U_{l_1}^{*})_1(0), (U_{l_2}^{*})_2(0)\right]$.

Si se tiene en cuenta la función de densidad de probabilidad, puede efectuarse un análisis de la situación a partir de:

i) La media y la varianza

El ingreso del agente puede determinarse a partir de la media $(\bar{l})$ y la varianza $(\sigma^2(L))$ de la variable aleatoria del siguiente modo:

$$\tilde{I}\,[+]\,L = (i_1, i_2, i_3)\,[+]\,(\bar{l}, \sigma^2[L])$$
$$\tilde{I}\,[+]\,L = (i_1 + \bar{l}, i_2 + \bar{l}, i_3 + \bar{l})\,[+]\,(0, \sigma^2[L])$$

Si se calcula el desvío estándar $\sigma[L] = \sqrt{\sigma^2[L]}$ y se opera, se obtiene el siguiente haz de NBT:

$$(i_1 + \bar{l} - \sigma[L], i_2 + \bar{l} - \sigma[L], i_3 + \bar{l} - \sigma[L]) \le (a_1, a_2, a_3) \le (i_1 + \bar{l} + \sigma[L], i_2 + \bar{l} + \sigma[L], i_3 + \bar{l} + \sigma[L])$$

Luego, la variable aleatoria $l \in [a,b]$, donde $a = \bar{l} - \sigma[L]$ y $b = \bar{l} + \sigma[L]$ y el ingreso del agente pertenece al intervalo $[i_1 + a, i_3 + b]$.

Al reemplazar en (8) para cada NBT del haz se obtiene un número borroso que no es triangular, que representa la utilidad máxima, cuyos α - cortes son $U_{l\,\alpha}^{*} = \left[(U_l^{*})_1(\alpha), (U_l^{*})_2(\alpha)\right]$.

En este caso, en la situación más desfavorable para el consumidor, la utilidad máxima es $\left(U_a^*\right)_1(0)$ y en la más favorable $\left(U_b^*\right)_2(0)$. El intervalo en el cual varía la utilidad máxima es $\left[(U_a^*)_1(0),(U_b^*)_2(0)\right]$ y está incluido en $\left[(U_{l_1}^*)_1(0),(U_{l_2}^*)_2(0)\right]$.

ii) La esperanza matemática del número híbrido

Se considera la esperanza matemática del número híbrido (Kaufmann y Gupta, 1985).

$$\xi_\alpha\left(\tilde{I}[+]L\right) = \left[i_1 + (i_2 - i_1)\alpha + \xi(L); i_3 + (i_2 - i_1)\alpha + \xi(L)\right]$$

$$\xi\left(\tilde{I}[+]L\right) = \left[i_1 + \xi(L), i_2 + \xi(L), i_3 + \xi(L)\right]$$

Este NBT pertenece al haz cuya envolvente es $\tilde{E}$.

Al reemplazar en (5) se obtiene: $$\tilde{U}_\xi^{\,*} = \frac{k\xi_\alpha\left(\tilde{I}[+]L\right)\xi_\alpha\left(\tilde{I}[+]L\right)}{4\tilde{P}_1.\tilde{P}_2} \qquad (11)$$

Como la esperanza matemática de cada número híbrido es un número borroso, que en este caso es triangular (Kaufmann y Gupta, 1985), para obtener la utilidad máxima se procede como en 3.2.

3.3.1 Caso de estudio 4

Se consideran los precios y la función de utilidad del ***Caso de estudio 3*** *y si se adiciona al ingreso mensual del agente una componente aleatoria, el mismo puede expresarse mediante un número híbrido cuya componente borrosa es el NBT* $(8.80,10,11)$, *y su componente aleatoria toma sus valores en el intervalo* $[2,11]$ y *tiene distribución triangular con media* $\bar{l} = 6$ *y varianza* $\sigma^2(L) = 3.5$.

¿Cuál es el nivel de satisfacción más alto que el agente puede obtener con dicho ingreso? (*Los datos se expresan en cientos de pesos*).

Dadas las condiciones del problema, pueden expresarse los precios mediante los NBT $\tilde{P}_1 = (0.48,0.50,0.55)$ y $\tilde{P}_2 = (0.55,0.60,0.66)$, y el ingreso al reemplazar en (7) como $\tilde{I}[+]L = (8.80 + l,10 + l,11 + l) \quad \forall\, l \in [2,11]$.

En la Tabla 3 se expresan los datos mediante sus $\alpha -$cortes:

	$\alpha -$ cortes
Precio del bien A	$P_{1_\alpha} = [0.48 + 0.02\alpha ; 0.55 - 0.05\alpha]$
Precio del bien B	$P_{2_\alpha} = [0.55 + 0.05\alpha ; 0.66 - 0.06\alpha]$
Ingreso	$(I[+]L)_\alpha = [8.80 + l + 1.20\alpha ; 11 + l - \alpha]$

Tabla 3. α -cortes

Si se consideran los valores extremos $l_1 = 2$ y $l_2 = 11$, se obtiene el haz de NBT:

$$(10.80,12,13) \leq (i_1 + l, i_2 + l, i_3 + l) \leq (19.80,21,22)$$

La envolvente del haz puede representarse mediante el número borroso trapecial:

$$\tilde{E} = (10.80,12,21,22)$$

Al reemplazar en (8), se obtiene la expresión de la utilidad máxima para cada NBT del haz:

$$U^*_{l_\alpha} = \frac{3[8.80 + l + 1.20\alpha, 11 + l - \alpha][8.80 + l + 1.20\alpha, 11 + l - \alpha]}{4.[0.48 + 0.02\alpha, 0.55 - 0.05\alpha][0.55 + 0.05\alpha, 0.66 - 0.06\alpha]}$$

Al operar con los intervalos, se obtiene para cada valor de la variable aleatoria un número borroso que no es triangular y sus α-cortes son:

$$U^*_{l_\alpha} = \left[\frac{232.32 + 52.8l + 3l^2 + 63.36\alpha + 7.2\alpha l + 4.32\alpha^2}{1.452 - 0.264\alpha + 0.012\alpha^2}, \frac{363 + 66l + 3l^2 - 66\alpha - 6\alpha l + 3\alpha^2}{1.056 + 0.14\alpha + 0.04\alpha^2} \right]$$

La utilidad máxima en el escenario más pesimista para el consumidor, que corresponde a los precios más altos y el menor nivel de ingreso, se obtiene al reemplazar en (9): $(U^*_{l_1})_1(0) \cong 240.99$ ($l_1 = 2$).

Al sustituir en (10), resulta $(U^*_{l_2})_2(0) = 1375$ ($l_2 = 11$), que representa la utilidad máxima en la situación más favorable para el consumidor: los precios más bajos y el mayor nivel de ingreso.

Luego, $U^*_l \in [240.99, 1375]$.

i) Si se trabaja con la media y la varianza de la variable aleatoria, se tiene:

$$\tilde{I}[+]L = (8.80,10,11)\ [+]\ (6,3.5)$$

$$\tilde{I}[+]L = (14.80,16,17)\ [+]\ (0,3.5)$$

El resultado se puede escribir determinando el desvío estándar:

$$\sqrt{3.5} \cong 1.87$$

Luego, el ingreso es un número borroso perteneciente al siguiente haz:

$$(12.93\ ,14.13,15.13) \le (i_1, i_2, i_3) \le (16.67,17.87,18.87)$$

La envolvente del haz es el número borroso trapecial $\tilde{M} = (12.93,14.13,17.87,18.87)$, representado en la Figura 10.

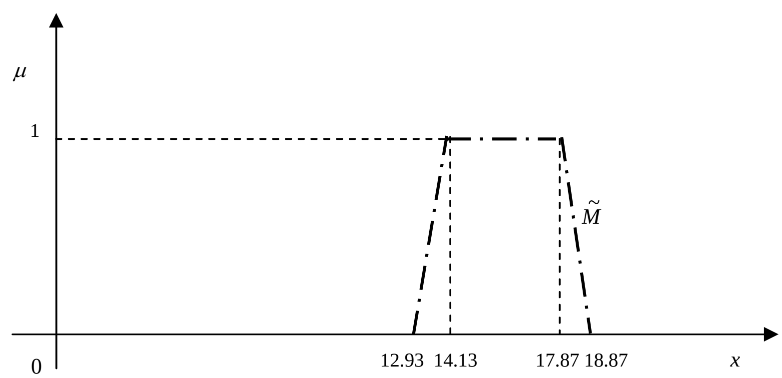


Figura 10. Distribución *fuzzy* del ingreso

Al reemplazar en (8), se obtiene la expresión de la utilidad máxima para cada NBT del haz:

$$U^*_{l_\alpha} = \frac{3[8.80 + l + 1.20\alpha, 11 + l - \alpha][8.80 + l + 1.20\alpha, 11 + l - \alpha]}{4.[0.48 + 0.02\alpha, 0.55 - 0.05\alpha][0.55 + 0.05\alpha, 0.66 - 0.06\alpha]},\ \ l \in \left[6 - \sqrt{3.5}, 6 + \sqrt{3.5}\right]$$

Al operar con los intervalos, se obtiene para cada valor de la variable aleatoria un número borroso que no es triangular:

$$U^*_{l_\alpha} = \left[\frac{232.32 + 52.8l + 3l^2 + 63.36\alpha + 7.2\alpha l + 4.32\alpha^2}{1.452 - 0.264\alpha + 0.012\alpha^2}, \frac{363 + 66l + 3l^2 - 66\alpha - 6\alpha l + 3\alpha^2}{1.056 + 0.14\alpha + 0.04\alpha^2}\right]$$

En consecuencia, la utilidad máxima en el escenario más pesimista para el consumidor es: $(U_a^*)_1(0) \cong 345.42$ $(a = 6 - \sqrt{3.5})$ y en el más optimista, $(U_b^*)_2(0) = 1011.58$ $(b = 6 + \sqrt{3.5})$, para la distribución de ingreso considerada. Luego, el intervalo de utilidad máxima es $[345.42, 1011.58]$.

ii) Para analizar este caso de estudio mediante el valor esperado del número híbrido se considera:

- La esperanza matemática de la variable aleatoria: $\xi(L) = 6$
- Luego, la esperanza matemática del número híbrido:

$$\xi(\tilde{I}[+]L) = (8.80 + \xi(L), 10 + \xi(L), 11 + \xi(L))$$

$$\tilde{H} = (14.80, 16, 17)$$

Expresado por sus α-cortes: $H_\alpha = [14.80 + 1.20\alpha\,; 17 - \alpha]$

En la Figura 11 se observa que $\tilde{H}$ pertenece al haz de NBT cuya envolvente es $\tilde{M}$, el que a su vez está incluido en $\tilde{E}$.

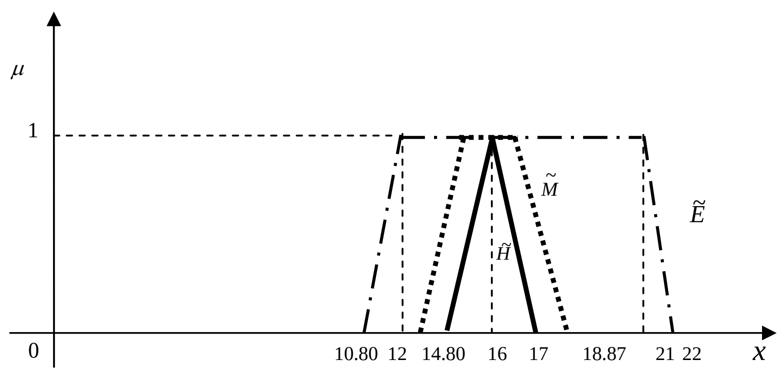


Figura 11. Esperanza matemática de $(\tilde{I}[+]L)$ y envolventes $\tilde{M}$ y $\tilde{E}$

Al reemplazar en (11), se obtiene el siguiente número borroso que no es triangular, cuyos α-cortes son:

$$\left(U_\xi^*\right)_\alpha = \left[\frac{657.12 + 106.56\alpha + 4.32\alpha^2}{1.452 - 0.264\alpha + 0.012\alpha^2}, \frac{867 - 102\alpha + 3\alpha^2}{1.056 + 0.14\alpha + 0.004\alpha^2}\right]$$

Por lo tanto, en el valor esperado de la variable aleatoria, si $\alpha = 0$ resultan $\left(U_\xi^*\right)_1(0) \cong 452.56$ y $\left(U_\xi^*\right)_2(0) \cong 821.02$ que corresponden respectivamente, a la situación más desfavorable y más favorable del agente. Para $\alpha = 1$ se presenta la situación de máxima presunción donde $\left(U_\xi^*\right)_1(1) = \left(U_\xi^*\right)_2(1) = 640$.

Es importante destacar que, al trabajar con la esperanza matemática, la utilidad máxima toma valores del intervalo $[452.56, 821.02]$ que está incluido en el intervalo $[345.42, 1011.58]$, que se obtuvo al trabajar con la media y la varianza, y éste a su vez en el intervalo $[240.99, 1375]$ que corresponde al análisis en los valores extremos de la variable aleatoria.

4. CONCLUSIONES

En un escenario en el cual tanto los precios como el ingreso del consumidor varían dentro de ciertos rangos cuyas componentes son borrosas y/o aleatorias, es más adecuado expresarlos mediante intervalos, números borrosos o números híbridos, y lograr de este modo una generalización *fuzzy* del modelo nítido que lo incluye como caso particular.

En la Tabla 2 (**Caso de estudio 3**) se observa que para $\alpha = 0$ el intervalo obtenido es el mismo del **Caso de estudio 2,** y los extremos del intervalo corresponden a la situación más favorable y más desfavorable respectivamente. Para el nivel de máxima presunción ($\alpha = 1$), se obtiene la solución del **Caso de estudio 1** (versión determinística). En consecuencia, se observa que el resultado nítido es un caso particular del problema *fuzzy*.

Al incorporar aleatoriedad en el ingreso del agente (**Caso de estudio 4**), se observa que al utilizar la esperanza matemática del número híbrido, hay mayor pérdida de información que al trabajar con la media y la varianza de la variable aleatoria.

El empleo de metodología *fuzzy* en este tipo de problemas proporciona mayor información al decisor que cuando se aplican técnicas matemáticas rígidas.

El enfoque a utilizar dependerá de la información disponible y de los objetivos del decisor.

BIBLIOGRAFÍA

Chiang, A.C. (1994). *Métodos fundamentales de economía matemática*. McGraw-Hill, Madrid.

Henderson, J.M.; Quandt, R.E. (1991). *Teoría Microeconómica. Una aproximación matemática*. Editorial Ariel S.A., Barcelona.

Hoffmann, L.; Bradley, G.; Rosen, K. (2004). *Cálculo Aplicado Para Administración, Economía y Ciencias Sociales.* McGraw-Hill, México.

Kaufmann, A.; Gupta, M. (1985). *Introduction to Fuzzy Arithmetic*. Van Nostrand Reinhold Company, Nueva York.

Lazzari, L. (Comp.) (2001). *Los conjuntos borrosos y su aplicación a la programación lin*eal. Facultad de Ciencias Económicas, UBA, Buenos Aires.

Lazzari, L.L.; Machado, E.A. M.; Pérez, R.H. (1998). *Teoría de la decisión fuzzy*. Ediciones Macchi, Buenos Aires.

Varian, H.R. (2007) *Microeconomía Intermedia.* Antoni Bosch Editor, Barcelona.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado en el marco del Proyecto E018 "Desarrollo e implementación de modelos fuzzy para la toma de decisión en al ámbito de las Ciencias Económicas" de la Programación Científica 2008-2010 de la Universidad de Buenos Aires.