Cuadernos del CIMBAGE Nº13 (2011) 79-105

COEFICIENTE BETA EN SECTORES DEL MERCADO ESPAÑOL. REGRESIÓN BORROSA VS REGRESIÓN ORDINARIA

Antonio Terceño[*], Gloria Barberà*, Hernán Vigier**, Yanina Laumann[**]
[*]Departamento de Gestión de Empresas
Universidad Rovira i Virgili
Av. de la Universidad 1 - 43204 REUS - España
antonio.terceno@urv.net - gloria.barbera@urv.net
**Departamento de Economía
Universidad Nacional del Sur.
12 de Octubre y San Juan - 8000 - Bahía Blanca - Argentina
hvigier@uns.edu.ar - ylaumann@criba.edu.ar

Recibido 15 de diciembre de 2009, aceptado 5 de agosto de 2010

Resumen

La amplia literatura previa, tanto empírica como teórica, respecto a la beta se enmarcan generalmente en un ambiente de riesgo. Sin embargo, consideramos que todo proceso de toma de decisiones, y sobre todo aquellos que utilizan la beta como medida del riesgo, se enmarca en un ambiente de incertidumbre. Este trabajo constituye un aporte a la literatura al ser una primera aproximación al estudio del coeficiente beta empleando el análisis de regresión borrosa. Con el objetivo de incorporar toda la imprecisión que acompaña el desconocimiento del futuro y la subjetividad asociada a la toma de decisiones, proponemos avanzar en el cálculo de la beta empleando el modelo de regresión borrosa de Tanaka e Ishibuchi (1992) para calcular las betas sectoriales de la Bolsa de Madrid. El análisis con regresión borrosa puede aplicarse con datos crisp, inciertos o con una mezcla de ambos. El objetivo de este trabajo es precisamente comparar los resultados que se obtienen al utilizar regresión borrosa con datos crips e inciertos. Luego, realizamos también una comparación con los resultados que se obtendrían con el cálculo de la beta mediante mínimos cuadrados ordinarios. La comparación nos permite determinar cuál de los sistemas permite una mejor adaptación a la realidad.

Palabras clave: riesgo, coeficiente beta, regresión borrosa

BETA COEFFICIENT IN THE SPANISH MARKET SECTORS. FUZZY REGRESSION VS CRISP REGRESSION

Antonio Terceño[*], Gloria Barberà*, Hernán Vigier**, Yanina Laumann[**]
[*]Department of Business
University Rovira i Virgili
Av. de la Universidad 1- 43204 - REUS - España
antonio.terceno@urv.net, gloria.barbera@urv.net
**Department of Economy
Universidad Nacional del Sur.
12 de Octubre y San Juan - 8000 - Bahía Blanca - Argentina
hvigier@uns.edu.ar; ylaumann@criba.edu.ar

Received December 15th 2009, accepted August 6th 2010

Abstract

The vast previous literature, both empirical and theorical, regarding the beta is generally framed in a risk environment. However, we consider that every decision-making process, and especially those using beta as a risk measure, is set in an uncertain environment. This works is a contribution to literature as it is a first approach to the beta coefficient study using a fuzzy regression analysis. With the aim of incorporating every inaccuracy which accompanies ignorance about the future and the subjectivity associated with the decision making, we intend to advance in the calculation of the beta using the fuzzy regression model of Tanaka e Ishibuchi (1992) to calculate the beta sectors of the Spanish Stock Market of Madrid. The analysis with fuzzy regression can be applied with crisp data, uncertain or with a mixture of both. The aim of this work is, precisely, to compare the obtained results using the fuzzy regression with crisp and uncertain data. After that, we make a comparison with the results to be obtained with the calculation of the beta by ordinary least squares. The comparison let us determine which of the systems allows a better adaptation of reality.

Keywords: risk, beta coefficient, fuzzy regression

1. INTRODUCCIÓN

Los elementos básicos de la moderna teoría de carteras se fundamentan en las aportaciones propuestas por Markowitz (1952, 1959) respecto al comportamiento del inversor racional. Sharpe (1964), entre otros, simplifica el modelo de Markowitz al proponer un modelo de valoración de activos, el *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), basado en la teoría de carteras.

El CAPM es un modelo para la formación de carteras de valores óptimas que establece que el rendimiento esperado de cualquier activo es una función lineal y positiva de su riesgo sistemático medido a través del coeficiente beta. Este concepto enfatiza la importancia del riesgo sistemático como medida de riesgo no diversificable, único riesgo remunerado en los mercados financieros. La expresión del CAPM es:

$$E\left(R_j\right) = r + \left[E\left(R_M\right) - r\right]\beta_j$$

donde

$E\left(R_j\right)$: rentabilidad esperada del título j

r: rentabilidad de un activo libre de riesgo

$E\left(R_M\right)$: rentabilidad esperada de la cartera de mercado

Puesto que estas betas no son observables deben utilizarse aproximaciones que, normalmente, se basan en la utilización de datos históricos. La noción básica subyacente en este modelo es que todos los activos están afectados por movimientos del mercado general, asumiendo que este factor de mercado es una fuerza sistemática. El resto de los efectos se supone que son específicos o únicos de un activo individual y que se diversifican en una cartera. Una medida de la respuesta de los activos a los cambios del mercado podría ser obtenida relacionando el rendimiento del activo, R_j, con el rendimiento de un índice de mercado, R_M, de acuerdo con la siguiente expresión:

$$R_{jt} = a_j + \beta_j R_{Mt} + \varepsilon_{jt} \quad j = 1, 2, \ldots, N; \quad t = 1, \ldots, T$$

En la práctica, el riesgo beta no es más que el estimador de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) del rendimiento del activo *j* sobre el rendimiento de la cartera de mercado durante un período de tiempo determinado. Esta estimación, además de utilizar rendimientos históricos, requiere asumir varios supuestos prácticos; y cada uno de ellos puede afectar significativamente los resultados.

Un requisito esencial para utilizar la beta en la obtención del riesgo futuro de un activo financiero es que posea capacidad de predicción. Como los valores futuros se calculan a partir de datos pasados, es necesario que estas medidas sean estables en el tiempo para que la estimación sea correcta y precisa. Por ello, su utilidad será mayor cuanto más estable sea su valor en el tiempo. Si bien la beta es un indicador del riesgo, su valor no es único y el resultado de la misma dependerá de las hipótesis y los datos que se tomen. Numerosos autores han estudiado la evolución histórica de las betas, analizando su capacidad para realizar predicciones, ya fuese con un enfoque empírico o teórico.

Fernández y Carabias (2007) muestran, en congruencia con la literatura, que es un grave error utilizar las betas calculadas con datos históricos para obtener la rentabilidad exigida a las acciones o para medir la gestión de una cartera de valores. Por siete razones:

1. porque cambian mucho de un día para otro;
2. porque dependen de qué índice bursátil se tome como referencia;
3. porque dependen mucho de qué período histórico (5 años, 3 años, …) se utilice para su cálculo;
4. porque dependen de qué rentabilidades (semanales, mensuales, anuales) se utilicen para su cálculo. Surge un problema de tipo conceptual a la hora de determinar la referencia temporal en el cálculo de la tasa de rendimiento de un título. La teoría no especifica si deben tomarse tasas de rendimientos diarias, semanales o mensuales, etc. Varios estudios han demostrado que los coeficientes betas pueden variar sustancialmente dependiendo del período de posesión según el cual hayan sido determinados sus rendimientos[1]. Además, se pueden hallar betas distintas según se utilice el precio de cierre de cada día de cotización, el precio medio de la jornada, etc.
5. porque, con frecuencia, no sabemos si la beta de una empresa es superior o inferior a la beta de otra empresa;
6. porque tienen muy poca relación con la rentabilidad posterior de las acciones, y

---

[1] Entre estos estudios empíricos pueden citarse: Altman *et al.* (1974), Scholes y Williams (1977), Dimson (1979), Hawawini (1980), Cohen *et al.* (1983) y Fernández (1997), entre otros.

7. porque la correlación (y el R^2) de las regresiones que se utilizan para su cálculo son muy pequeñas.

Blume (1971) y Levy (1971) analizaron la estacionalidad de las betas para valores individuales y para carteras, observando que mientras las betas de carteras que contienen un elevado número de valores dan mucha información sobre las betas futuras, las betas de valores individuales contienen menos información sobre betas futuras. Estos resultados indican que la beta de una cartera fluctúa menos que la de un título individual. La misma relación directa entre tamaño de las carteras y la estacionariedad de las betas es observada por Altman *et al.* (1974), Eubank y Zumwalt (1981), Tole (1981) e Iglesias (1999). Por su parte, Damodaran (2001) también reconoce que las betas de las empresas oscilan mucho, pero afirma que las betas sectoriales (beta de la cartera compuesta por las empresas de un mismo sector) oscilan muy poco. Por eso recomiendan utilizar la beta calculada de un sector.

La amplia literatura, tanto empírica como teórica, respecto a determinados factores que pueden influir en la estabilidad de la beta se enmarca generalmente en un ambiente de riesgo. Desde esta perspectiva, los diferentes autores coinciden en destacar la inestabilidad de la beta. Con el objetivo de incorporar toda la imprecisión que acompaña el desconocimiento del futuro y la subjetividad asociada a la toma de decisiones, proponemos avanzar en el cálculo de la beta empleando elementos de la Teoría de Subconjuntos Borrosos. En particular, buscamos estimar el modelo de mercado a través del análisis de regresión borrosa.

El objetivo de los modelos de regresión borrosa es determinar una relación funcional entre una variable dependiente y varias variables explicativas. Observaremos que es más versátil que los modelos convencionales de regresión estadísticos, ya que permite hallar relaciones funcionales cuando la variable dependiente, las variables independientes o ambas no se manifiestan como valores únicos, sino como intervalos de confianza.

En contraste con el análisis de regresión ordinaria basado en la teoría de la probabilidad, el análisis de regresión borrosa se fundamenta en la teoría de la posibilidad y en la teoría de los subconjuntos borrosos. En el análisis de regresión ordinaria se asume que los errores de estimación (desviaciones entre los valores observados y los estimados) funcionan como una variable aleatoria con distribución normal (media cero y varianza constante). Pero en el análisis de regresión borrosa, los errores de estimación son vistos como la incertidumbre de la estructura del modelo. Tanaka *et. al* (1982) presentan la primera modelización. Luego, Celminš (1987 a y b), Diamond (1988), Tanaka (1987), Tanaka e Ishibuchi (1991), Savic e Pedryckz (1991) e Ishibichi (1992) realizan otras contribuciones aplicando diferentes criterios de optimización para un ajuste lineal o curvo.

Esta forma de modelización tiene ciertas ventajas sobre la técnica tradicional de regresión. Dado que en los mercados financieros un mismo activo se negocia a diferentes precios durante una misma sesión, se permite incorporar toda la información disponible sobre cotizaciones sin tener que limitarnos a una única cotización o a una cotización media. Para utilizar las técnicas econométricas deben cuantificarse las observaciones de la variable explicada a través de un único número, perdiéndose gran parte de la información y siendo arbitraria la elección del valor concreto a considerar. Por el contrario, los métodos de regresión borrosa permiten ajustar una relación funcional utilizando toda la información disponible sobre los valores observados. Además, las estimaciones obtenidas serán números borrosos y no variables aleatorias, cuyos tratamientos son más sencillos y menos exigentes en cuanto a los supuestos.

El análisis con regresión borrosa puede aplicarse con datos *crisp*, inciertos o con una mezcla de ambos. El objetivo de este trabajo es precisamente comparar los resultados que se obtienen utilizando regresión borrosa con datos *crisp* e inciertos y compararlo con los obtenidos al aplicar mínimos cuadrados ordinarios. El trabajo se inicia con una breve descripción del modelo de regresión borrosa de Tanaka e Ishibuchi (1992) que utilizaremos posteriormente. En el apartado 3 realizamos una estimación de las betas sectoriales de la Bolsa de Madrid utilizando mínimos cuadrados ordinarios, regresión borrosa con datos *crisp* y regresión borrosa con datos inciertos, asimismo analizamos los datos obtenidos. Terminamos el trabajo con la presentación de las conclusiones.

2. REGRESIÓN BORROSA LINEAL CON INTERVALOS DE CONFIANZA

Todos los modelos de regresión borrosa suponen que las desviaciones entre los valores observados y los estimados no tienen naturaleza aleatoria sino borrosa. Asimismo, el término de error no queda introducido como un sumando en la ecuación de regresión, sino que está incorporado en los coeficientes al asumirse su naturaleza borrosa.

El objetivo de la regresión borrosa es determinar una relación funcional entre una variable dependiente con varias variables explicativas donde los parámetros estimados son intervalos de confianza (IC)[2].

Un IC A se representa a través de su extremo inferior y superior como $A=[a_1,a_2]$; o a través de su centro y de su radio como $A=\langle a_C,a_R\rangle$ siendo:

$$a_C=(a_1+a_2)/2 \qquad\qquad a_R=(a_1-a_2)/2$$

Tanaka e Ishibuchi (1992) parten de que para un determinado fenómeno, el observador dispone de una muestra que representamos como $\{(Y_1,X_1),(Y_2,X_2),\ldots,(Y_j,X_j),\ldots,(Y_n,X_n)\}$, donde

Y_j es la observación *j*-ésima de la variable dependiente, j=1,2,…,n, y suponemos que viene dada a través de un intervalo de confianza $Y_j=\left[Y_j^1,Y_j^2\right]=\langle Y_{jC},Y_{jR}\rangle$.

X_j es el vector de la *j*-ésima observación sobre las variables independientes, con $j=1,2,\ldots,n$. Así, X_j es una variable *m*-dimensional $X_j=\left(X_{0j},X_{1j},X_{2j},\ldots,X_{ij},\ldots,X_{mj}\right)$, donde $X_{0j}=1\ \forall j$, y X_{ij} es el valor en la *j*-ésima observación de la muestra para la variable *i*-ésima. Asumimos que se trata de observaciones representadas por datos *crisp*.

La relación existente entre la variable dependiente, que puede venir dada por un intervalo de confianza, y la variable independiente es lineal:

$$Y=A_0+A_1\,X_1+A_2\,X_2+\ldots+A_m\,X_m$$

donde A_i, i =0,1,…,m son IC:

$$A_i=\langle a_{iC},a_{iR}\rangle \quad i=0,1,\ldots,m$$

El objetivo final es determinar centros y radios de A_i de forma que sean compatibles con las observaciones de que se dispone.

Para estimar el valor de la *j*-ésima variable independiente, $\hat{Y}_j=\langle\hat{Y}_{jC},\hat{Y}_{jR}\rangle$, se realiza la suma:

[2] Para un análisis más profundo de esta apartado puede consultarse: de Andrés y Terceño. (2003, 2004), Wang y Tsaur (2000) y Yen et al. (1999).

$$\left\langle \hat{Y}_{jC}, \hat{Y}_{jR} \right\rangle = \sum_{i=0}^{m} \langle a_{iC}, a_{iR} \rangle X_{ij} = \left\langle \sum_{i=0}^{m} a_{iC} X_{ij}, \sum_{i=0}^{m} a_{iR} \left| X_{ij} \right| \right\rangle j = 1, 2, \ldots, n$$

La bondad del ajuste es inversa a la incertidumbre (amplitud) de las estimaciones de las observaciones Y_j, $\hat{Y}_j$. Así, la amplitud de $\hat{Y}_j$ es el radio de dicho intervalo de confianza $\hat{Y}_{jR}$, el cual se obtiene como:

$$\hat{Y}_{jR} = \sum_{i=0}^{m} a_{iR} \left| X_{ij} \right| = a_{0R} + a_{1R} \left| X_{1j} \right| + \ldots + a_{mR} \left| X_{mj} \right|$$

Por tanto, la incertidumbre total de todas las estimaciones de la muestra, *z*, será la suma de los radios de las estimaciones:

$$z = \sum_{j=1}^{n} \hat{Y}_{jR} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_{iR} \left| X_{ij} \right|$$

El objetivo final será minimizar la incertidumbre total de las estimaciones.

Los parámetros A_i deben procurar no sólo que la incertidumbre de $\hat{Y}_j$ sea lo menor posible, sino que $\hat{Y}_j$ sea lo más congruente posible con la observación de la variable explicada que se pretende aproximar, Y_j.

Tanaka e Ishibuchi (1992) postulan que la observación debe estar incluida dentro de su estimación: $Y_j \subseteq \hat{Y}_j; \forall j$. Es decir, debe cumplirse que:

$$Y_{jC} - Y_{jR} \geq \hat{Y}_{jC} - \hat{Y}_{jR} \quad \text{y} \quad Y_{jC} + Y_{jR} \leq \hat{Y}_{jC} + \hat{Y}_{jR}$$

Para determinar los parámetros A_i debe resolverse el siguiente programa lineal:

$$\text{Min } z = \sum_{j=1}^{n} \hat{Y}_{jR} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_{iR} \left| X_{ij} \right|$$

s. a:

$$\hat{Y}_{jC} - \hat{Y}_{jR} = \sum_{i=0}^{m} a_{iC} X_{ij} - \sum_{i=0}^{m} a_{iR} \left| X_{ij} \right| \leq Y_{jC} - Y_{jR} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\hat{Y}_{jC} + \hat{Y}_{jR} = \sum_{i=0}^{m} a_{iC} X_{ij} + \sum_{i=0}^{m} a_{iR} \left| X_{ij} \right| \geq Y_{jC} + Y_{jR} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$a_{iR} \geq 0 \qquad i = 0, 1, \ldots, m$$

La primera restricción asegura que los extremos inferiores de las estimaciones sean inferiores a los extremos inferiores de las observaciones mientras que la segunda garantiza que los extremos superiores de las estimaciones sean superiores a los de las observaciones. El tercer bloque de restricciones asegura que el radio del IC sea positivo.

3. ESTIMACIONES BETAS SECTORIALES

Para los propósitos de este estudio tomamos los valores diarios del Índice General de la Bolsa de Madrid (IGBM) y de la familia de índices sectoriales correspondientes a la nueva clasificación sectorial bursátil vigente desde el 01/01/2005[3]:

1. Petróleo y energía
2. Materiales básicos, industria y construcción
3. Bienes de consumo
4. Servicios de consumo
5. Servicios financieros e inmobiliarias
6. Tecnología y telecomunicaciones

La especificación y justificación del marco temporal en la determinación de la tasa de rendimiento es a menudo olvidada. Algunos estudios emplean tasas de rendimiento diarias, mientras que otros emplean tasas semanales, mensuales o incluso anuales. Existen, no obstante, argumentos teóricos para considerar que la tasa histórica debe evaluarse a partir de cotizaciones semanales. En primer lugar, los trabajos de Cheng y Deets (1973) concluyen que la estimación del coeficiente beta a partir de datos semanales responde al concepto de riesgo sistemático instantáneo del modelo de mercado.

En segundo lugar, la utilización de cotizaciones diarias presenta el

[3] Todas las compañías admitidas a cotización en la bolsa española y negociadas tanto a través del SIBE como en los Corros de las cuatro plazas bursátiles, Madrid, Barcelona, Bilbao y Valencia, están encuadradas dentro de la Clasificación Sectorial y Subsectorial unificada, que se implantó el 1 de enero de 2005.

problema de negociación asíncrona o infrecuente (Scholes y Williams, 1977; Dimson, 1979; entre otros), según el cual la dinámica bursátil no es idéntica para todos los títulos. Algunos contratan diariamente; otros, por el contrario, ven modificados sus precios en mayor espacio de tiempo. Unos no lo harán exactamente al final del día, con lo cual su precio de cierre no habrá incorporado determinados cambios producidos a última hora en el índice de mercado; cambios que serán asimilados por el título en cuestión al día siguiente de la contratación. Esta falta de sincronización en los movimientos bursátiles hace recomendable espaciar la frecuencia de las observaciones.

En tercer lugar, Grande (1984) sostiene que la semana puede considerarse como el horizonte de posesión para el inversor debido a razones de imperfección en el procesamiento de la información. La detección del "efecto fin de semana" o "día de la semana" conduce a proponer que los sujetos inversores emplean un horizonte de posesión semanal y que se orientan con consideraciones objetivas cuya periodicidad es semanal (publicaciones en prensa ordinaria, boletines de información financiera y bursátil, etc.).

La rentabilidad del mercado se aproxima por el Índice General de la Bolsa de Madrid (IGBM), tomando la cotización de cierre.

Estimamos las betas de portafolios de sectores económicos a través de dos metodologías:

1- Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO). Utilizaremos dos tipos de datos:

   1.1 Expresamos las rentabilidades sectoriales semanales tomando la cotización de cierre.

   Para la estimación de las betas se recurre al modelo de mercado empleando series de tiempo. La práctica habitual en los estudios empíricos de cálculo de betas es utilizar el ajuste MCO por razones de sencillez y simplificación. Al emplear este método de regresión se asume que la variable perturbación es ruido blanco. Esto es, cumple tres hipótesis: esperanza nula, no correlación y homoscedasticidad. No obstante, numerosos trabajos empíricos (por ejemplo, Blume, 1975; Iglesias, 1997) concluyen, a partir de resultados obtenidos al aplicar diversas técnicas de regresión a los mismos datos para el calculo de las betas, que el método econométrico no pareciera tener influencia alguna en los resultados.

   1.2 Tomamos como datos los intervalos de confianza de las rentabilidades tal como definiremos posteriormente y aplicaremos MCO.

2- Análisis de Regresión Borrosa a través del modelo de regresión borrosa de Tanaka e Ishibuchi (1992). Esta aplicación la desarrollaremos utilizando dos tipos de datos:

2.1 Datos *crisp* de la cartera sectorial. Expresamos las rentabilidades sectoriales semanales por medio de un intervalo de confianza, [R_1, R_2], cuyos extremos coinciden y están dados por la rentabilidad tomando la cotización de cierre. Con estos datos obtenemos los coeficientes betas ($\left[\beta_1^C, \beta_2^C\right]$).

2.2 Datos inciertos de la cartera sectorial. Siguiendo a de Andrés *et al.* (2004), para el cálculo de las betas $\left[\beta_1^I, \beta_2^I\right]$, expresamos las rentabilidades sectoriales semanales por medio de un intervalo de confianza, [R_1, R_2], cuyos extremos están dados por:

- La rentabilidad mínima, R_1, que puede obtener el inversor. Esta sucederá cuando compre el activo al mayor precio de cotización del día *t-1* ($P_{\max,t-1}$) y lo venda en *t* al menor precio $P_{\min,t}$:

$$R_1 = \frac{P_{\min,t} - P_{\max,t-1}}{P_{\max,t-1}}$$

- La rentabilidad máxima, R_2. El accionista obtendría esta tasa de rendimiento si compra la acción al menor precio y la vende al precio máximo:

$$R_2 = \frac{P_{\max,t} - P_{\min,t-1}}{P_{\min,t-1}}$$

Esta forma de calcular las tasas de rendimiento permite incluir toda la información contenida en los diferentes precios de una sesión.

En la Tabla 1 se presentan las betas promedio. Se observa que el valor obtenido es similar con los cuatro métodos. Cuando se aplica el análisis de regresión borrosa con datos *crisp*, los resultados de la regresión borrosa deberían aproximarse a los resultados de la regresión ordinaria. Esto se cumple en los valores promedios de la Tabla 1. Pero tal propiedad no existe en el método de regresión analizado aquí cuando se comparan las betas trimestrales de cada sector (Ver Anexo I). Puede observarse que las β obtenidas por MCO son mayores que el extremo superior de los intervalos obtenidos por regresión borrosa con datos inciertos, esto se debe a que en este último caso tomamos toda la información que se produce durante las sesiones semanales. Por el mismo motivo los extremos de los intervalos que obtenemos con regresión borrosa pero datos *crisp* son mayores que los extremos de los intervalos con regresión borrosa y datos inciertos.

SECTOR	β_{MCO}	Regresión Borrosa (X e Y *crisp*)		Regresión Borrosa (X *crisp*, Y incierto)	
		β_1^C	β_2^C	β_1^I	β_2^I
Petróleo y energía	0,93	0,84	0,97	0,82	0,93
Materiales básicos, industria y construcción	1,18	1,06	1,10	0,99	1,00
Bienes de consumo	0,66	0,64	0,72	0,54	0,63
Servicios de consumo	0,89	0,86	0,87	0,79	0,82
Servicios financieros e inmobiliarias	1,13	1,04	1,17	0,93	1,11
Tecnología y telecomunicaciones	0,89	0,73	1,03	0,65	0,87

Tabla 1. Beta trimestral promedio

Otra forma de comparar los modelos es observar la amplitud de la beta trimestral. Comenzamos analizando el caso extremo de que la beta calculada sea un numero cierto, es decir, que la β inferior y superior del intervalo coinciden. En la Tabla 2 observamos que en todos los sectores, el Modelo de regresión borrosa con datos inciertos genera mayor cantidad de betas *crisp*.

SECTOR	Regresión Borrosa (X e Y *crisp*) Número de:			Regresión Borrosa (X *crisp*, Y incierto) Número de:		
	$\beta_1^C = \beta_2^C$	$\beta_{MCO} > \left[\beta_1^C, \beta_2^C\right]$	$\beta_{MCO} < \left[\beta_1^C, \beta_2^C\right]$	$\beta_1^I = \beta_2^I$	$\beta_{MCO} > \left[\beta_1^I, \beta_2^I\right]$	$\beta_{MCO} < \left[\beta_1^I, \beta_2^I\right]$
Petróleo y energía	14	5	9	17	8	9
Materiales básicos, industria y construcción	15	13	2	15	12	3
Bienes de consumo	16	7	9	15	9	6
Servicios de consumo	15	9	6	16	12	4
Servicios financieros e inmobiliarias	13	9	4	13	10	3
Tecnología y telecomunicac.	9	6	3	14	10	4
TOTAL	82	49	33	90	61	29

Tabla 2. Análisis de betas sectoriales

El 75% de las betas obtenidas por medio de regresión borrosa con datos *crisp* tiene una amplitud nula. Mientras que el análisis de regresión borrosa considerando todo el intervalo las cotizaciones genera en el 83% de los casos betas cuyo extremo inferior es igual al superior. Por consiguiente, incorporar el rango completo de cotizaciones en el cálculo de la beta no implica ampliar la incertidumbre del coeficiente.

Se observa, al igual que con los datos promedios de la Tabla 1, que en la mayoría de los casos las β_{MCO} son mayores que el extremo superior de los intervalos obtenido por regresión borrosa con datos inciertos.

Hemos añadido la estimación utilizando intervalos de confianza y aplicando MCO (IC_{MCO}) con el objetivo de compararlos cuando utilizamos, para los mismos intervalos, regresión borrosa.

Se observa que el IC_{MCO} presenta mayor amplitud que los correspondientes borrosos. La Tabla 3 muestra que en la mayoría de los casos el IC_{MCO} contiene a los intervalos borrosos, tanto $\left[\beta_1^C, \beta_2^C\right]$ como $\left[\beta_1^I, \beta_2^I\right]$. Esto muestra que la incorporación de toda la información disponible sobre cotizaciones no implica mayor inestabilidad de la beta.

SECTOR	IC_{MCO}	$\left[\beta_1^C, \beta_2^C\right] \subseteq IC_{MCO}$	$\left[\beta_1^C, \beta_2^C\right] \subseteq IC_{MCO}$
Petróleo y energía	17	16	16
Bienes de consumo	16	16	16
Servicios de consumo	18	17	18
Materiales básicos, industria y construcción	18	17	14
Servicios financieros e inmobiliarias	18	17	11
Tecnología y telecomunicac.	16	9	15

Tabla 3. Comparación de "intervalos borrosos" con "intervalos de confianza MCO"

En la Tabla 4 se ordenan los sectores según el valor de la beta trimestral promedio de todo el período de estudio. Se aprecian variaciones mínimas en el orden relativo de los sectores según el enfoque de estimación empleado.

SECTOR	β_{MCO}	Regresión Borrosa (X e Y ciertos)	Regresión Borrosa (X cierto, Y incierto)
Bienes de consumo	1	1	1
Servicios de consumo	2	2	3
Tecnología y telecomunicaciones	2	3	2
Petróleo y energía	3	4	4
Materiales básicos, industria y construcción	5	5	5
Servicios financieros e inmobiliarias	4	6	6

Tabla 4. Ranking de sectores según su beta trimestral promedio

Siguiendo a de Andrés *et al.* (2004), creemos adecuado analizar si se encuentran diferencias entre ambos modelos en términos de la estabilidad de los coeficientes betas. Para ello, empleamos como medida de comparación la desviación estándar de las betas calculadas. El modelo más preciso será aquel que presente una menor dispersión entre los coeficientes. Calculamos la desviación de las betas inferiores, σ_{β_1}, superiores, σ_{B_2}, la suma de ambas, $\sigma_{B_1}+\sigma_{B_2}$, y la desviación conjunta de β_1 y β_2, σ_{B_1,B_2}. Estas medidas calculadas a partir de las betas trimestrales se presentan en la Tabla 5.

SECTOR	Regresión Borrosa (X e Y ciertos)				Regresión Borrosa (X cierto, Y incierto)			
	σ_{B_1}	σ_{B_2}	$\sigma_{B_1}+\sigma_{B_2}$	σ_{B_1,B_2}	σ_{B_1}	σ_{B_2}	$\sigma_{B_1}+\sigma_{B_2}$	σ_{B_1,B_2}
Petróleo y energía	0,44	0,40	0,84	0,74	0,51	0,47	0,98	0,70
Materiales básicos, industria y construcción	0,39	0,38	0,77	0,38	0,39	0,39	0,78	0,38
Bienes de consumo	0,28	0,33	0,61	0,30	0,27	0,29	0,56	0,28
Servicios de consumo	0,27	0,28	0,55	0,27	0,29	0,32	0,61	0,30
Servicios financieros e inmobiliarias	0,31	0,35	0,66	0,33	0,33	0,41	0,74	0,38
Tecnología y telecomunicaciones	0,66	0,80	1,46	0,42	0,50	0,85	1,35	0,49

Tabla 5. Beta trimestral. Desviación estándar

El análisis de las filas permite comparar el desempeño de los modelos y se observa que considerar el rendimiento de cada sector como un dato incierto no implica una mayor inestabilidad del coeficiente beta. La dispersión entre los coeficientes es similar en ambos modelos.

4. CONCLUSIONES

En las últimas décadas se han sucedido muchos trabajos en el mundo académico cuestionando la estabilidad de la beta en el tiempo. Si bien los primeros trabajos se han basado en metodologías simples, el mayor desarrollo de modelos, algoritmos y sistemas computacionales ha permitido testear mediante técnicas más sofisticadas. No obstante, todos estos aportes se desarrollan en un ambiente de riesgo.

Este trabajo constituye un aporte a la literatura al ser una primera aproximación al estudio de la estabilidad de este coeficiente empleando el análisis de regresión borrosa, ya que consideramos que todo proceso de toma de decisiones, y sobre todo aquellos que utilizan la beta como medida del riesgo, se desarrolla en un ambiente de incertidumbre.

Esta forma de modelización ofrece ciertas ventajas sobre la tradicional técnica de regresión. En primer lugar, porque las estimaciones que obtengamos después de ajustar los coeficientes borrosos no serán variables aleatorias, sino números borrosos, cuyo tratamiento es más sencillo.

Los métodos de regresión borrosa presentan diferencias respecto a la regresión ordinaria. La principal diferencia, aún cuando se consideran las mismas observaciones, se debe a la naturaleza de las desviaciones entre los valores observados y los estimados. En la regresión ordinaria, las desviaciones son vistas como errores aleatorios. En la regresión *fuzzy*, las desviaciones se deben a la borrosidad del sistema. En la regresión ordinaria, se emplea la teoría de la probabilidad para modelizar los errores aleatorios y el resultado es presentado como una ecuación de regresión ordinaria. Por otro lado, sobre la base de la teoría de los subconjuntos borrosos se modelizan los errores borrosos y el resultado es presentado como una ecuación de regresión borrosa.

Por otra parte, si el fenómeno de estudio es de carácter económico o social, las observaciones que del mismo se obtienen son consecuencia de la interacción entre creencias, expectativas, etc. de los agentes que participan en dicho fenómeno y, por tanto, ya hemos señalado que en nuestra opinión no es del todo adecuado modelizar dicho fenómeno utilizando la teoría de la probabilidad. Por ejemplo, el precio de los activos que se negocian en los mercados financieros es la consecuencia de las expectativas que tienen los participantes sobre el devenir de la economía, la confianza que a los operadores les generan los emisores de dichos activos, etc.

Posiblemente en este caso sea excesivamente simplificadora la existencia de linealidad entre la variable explicada y las variables explicativas, lo cual se asume utilizando tanto la regresión convencional como la regresión borrosa, pero creemos que es más realista modelizar el sesgo que puede darse entre las realizaciones de la variable dependiente y el valor que teóricamente éstas pueden tomar asumiendo que la relación entre variable dependiente y variables explicativas es borrosa que si damos una naturaleza aleatoria a dicho sesgo. Respecto a los precios de los activos financieros, estaremos asumiendo, como mínimo, el fuerte componente subjetivo que implica su determinación.

En muchas circunstancias las observaciones de la variable dependiente, de la variable independiente o de ambas no vienen dadas por un número cierto, sino por un intervalo de confianza. Por ejemplo, el precio que se negocia en los mercados financieros durante una sesión para un determinado activo difícilmente es único, sino que éste suele negociarse dentro de una horquilla delimitada por un precio máximo y por un precio mínimo. Para utilizar las técnicas de mínimos cuadrados -o la más sofisticada de máxima verosimilitud- deben cuantificarse las observaciones de la variable explicada (y explicativa) a través de un único número, utilizándose por ejemplo el precio medio negociado o el último precio en el modelo que se vaya a implementar. Es evidente que este proceder implica una importante pérdida de información. Para implementar los métodos de regresión borrosa no hace falta reducir el valor de las variables observadas a un número real cuando son observadas como intervalos; así, podremos ajustar la relación funcional que busquemos trabajando con todos los valores observados, siendo posible entonces utilizar toda la información disponible. Es cierto que esto también puede aplicarse si tomamos MCO con intervalos de confianza, pero en este caso es aplicable lo comentado anteriormente para la regresión normal.

El método de regresión borrosa se basa en la técnica de programación lineal para estimar el coeficiente borroso. Como señalan Chang y Ayyub (2001), cuando el número de observaciones crece, puede aparecer una dificultad en el empleo de programación lineal para estimar la beta borrosa. Cada observación se transforma en dos restricciones de la formulación de la regresión borrosa. Al incrementarse el número de observaciones, crece el número de restricciones proporcionalmente. Este incremento podría llevar a dificultades computacionales.

Al tener en cuenta que con modelos econométricos borrosos se incorpora toda la información de las cotizaciones, y que no es necesario recurrir a supuestos referidos al término aleatorio de difícil aplicación, se abre una posibilidad para mejorar la predicción de las cotizaciones futuras por medio de este método.

El análisis de regresión ordinaria es una herramienta para tratar con observaciones ciertas y analizar los errores aleatorios entre las observaciones y las estimaciones. El análisis de regresión borrosa es una manera de modelizar observaciones borrosas. Si los datos contienen incertidumbre, entonces es más razonable utilizar este análisis. Sin embargo, cuando se aplica el análisis de regresión borrosa con *crisp*, los resultados de la regresión por MCO deberían estar incluidos dentro del intervalo obtenido por medio de la regresión borrosa con datos *crisp*; en nuestro caso esto se cumple para la mayoría de los sectores excepto dos, si bien estos se encuentran por encima del extremo superior por muy poco.

ANEXO I. Betas sectoriales trimestrales[4]

PETRÓLEO Y ENERGÍA				
Período Trimestres	MCO		Regresión borrosa $[\beta_1; \beta_2]$	
	B	IC	Datos ciertos	Datos inciertos
1 -2005	1,06	[0,64; 1,48]	[1,34; 1,34]	[1,23; 1,23]
2 -2005	0,67	[0,24; 1,10]	[1,07; 1,07]	[1,27; 1,27]
3 -2005	1,22	[0,66; 1,77]	[0,55; 0,73]	[0,65; 0,65]
4 -2005	1,38	[0,83; 1,93]	[1,59; 1,59]	[1,46; 1,46]
1 -2006	**1,11**	[-0,12; 2,32]	[-0,07; 1,66]	[-0,28; 1,62]
2 -2006	0,97	[0,68; 1,26]	[1,13; 1,13]	[1,02; 1,02]
3 -2006	1,21	[0,67; 1,76]	[1,49; 1,49]	[1,55; 1,55]
4 -2006	0,85	[0,53; 1,17]	[0,71; 0,71]	[0,62; 0,62]
1 -2007	0,57	[0,26; 0,87]	[0,33; 0,33]	[0,25; 0,25]
2 -2007	1,01	[0,81; 1,21]	[1,15; 1,15]	[1,22; 1,22]
3 -2007	1,12	[0,88; 1,36]	[0,88; 0,88]	[1,39; 1,39]
4 -2007	0,62	[0,06; 1,17]	[0,26; 0,26]	[0,31; 0,31]
1 -2008	0,94	[0,37; 1,49]	[1,18; 1,18]	[1,34; 1,34]
2 -2008	0,84	[0,54; 1,13]	[0,66; 0,94]	[0,57; 0,57]
3 -2008	0,98	[0,44; 1,52]	[0,66; 0,66]	[0,22; 0,22]
4 -2008	0,93	[0,73; 1,14]	[0,98; 0,98]	[0,80; 0,80]
1 -2009	0,58	[0,32; 0,84]	[0,62; 0,62]	[0,58; 0,58]
2 -2009	0,77	[0,39; 1,16]	[0,66; 0,78]	[0,62; 0,62]

[4] En todos los sectores, todos los valores del coeficiente beta son significativos con un nivel de confianza de 95% a excepción de los que figuran en negrilla, que no son significativas.

BIENES DE CONSUMO				
Período Trimestres	MCO		Regresión borrosa $[\beta_1; \beta_2]$	
	β	IC	Datos ciertos	Datos inciertos
1 -2005	0,84	[0, 27; 1,41]	[1,41; 1,41]	[1,01; 1,01]
2 -2005	**0,47**	[-0, 22; 1,15]	[0,47; 0,47]	[0,37; 0,37]
3 -2005	0,53	[0, 02; 1,04]	[0,58; 0,58]	[0,16; 0,78]
4 -2005	0,94	[0, 58; 1,30]	[0,80; 0,80]	[0,76; 0,76]
1 -2006	**0,36**	[-0, 15; 0,87]	[0,73; 0,73]	[0,42; 0,42]
2 -2006	0,73	[0, 38; 1,08]	[0,45; 0,45]	[0,55; 0,55]
3 -2006	0,60	[0, 19; 1,00]	[0,64; 0,64]	[0,60; 0,60]
4 -2006	1,20	[0, 77; 1,62]	[0,88; 1,53]	[1,12; 1,40]
1 -2007	0,64	[0, 12; 1,17]	[0,35; 0,35]	[0,51; 0,51]
2 -2007	0,63	[0, 46; 0,80]	[0,57; 0,57]	[0,59; 0,59]
3 -2007	0,68	[0, 29; 1, 07]	[0,82; 0,82]	[0,55; 0,55]
4 -2007	0,67	[0, 26; 1, 09]	[0,64; 0,64]	[0,50; 0,50]
1 -2008	0,48	[0, 11; 0, 84]	[0,43; 0,43]	[0,31; 0,31]
2 -2008	0,33	[0, 14; 0, 52]	[0,31; 0,31]	[0,11; 0,11]
3 -2008	0,94	[0, 43; 1, 45]	[0,73; 0,73]	[0,46; 0,46]
4 -2008	0,56	[0, 37; 0,76]	[0,74; 0,74]	[0,60; 0,60]
1 -2009	0,67	[0, 28; 1,05]	[0,85; 0,85]	[0,91; 0,91]
2 -2009	0,54	[0, 04; 1,05]	[0,18; 0,93]	[1,01; 1,01]

SERVICIOS DE CONSUMO				
Período Trimestres	MCO		Regresión borrosa [β_1; β_2]	
	β	IC	Datos ciertos	Datos inciertos
1 -2005	0,70	[0,33; 1,07]	[0,55; 0,55]	[0,45; 0,45]
2 -2005	1,06	[0,72; 1,41]	[1,04; 1,04]	[0,91; 0,91]
3 -2005	0,51	[0,07; 0,96]	[0,52; 0,52]	[0,32; 0,32]
4 -2005	1,45	[0,90; 2,00]	[1,31; 1,31]	[1,54; 1,54]
1 -2006	0,66	[0,02; 1,29]	[0,53; 0,55]	[0,61; 0,61]
2 -2006	0,88	[0,68; 1,08]	[0,64; 0,64]	[0,81; 0,81]
3 -2006	0,79	[0,49; 1,09]	[0,67; 0,71]	[0,66; 0,81]
4 -2006	0,81	[0,43; 1,18]	[0,57; 0,57]	[0,57; 0,57]
1 -2007	0,76	[0,46; 1,06]	[0,82; 0,82]	[0,81; 0,81]
2 -2007	0,90	[0,70; 1,11]	[0,90; 0,90]	[0,73; 0,73]
3 -2007	1,07	[0,73; 1,40]	[1,12; 1,12]	[1,26; 1,26]
4 -2007	1,06	[0,50; 1,63]	[1,06; 1,06]	[0,94; 0,94]
1 -2008	0,75	[0,43; 1,07]	[0,78; 0,78]	[1,01; 1,01]
2 -2008	0,82	[0,48; 1,15]	[0,83; 0,83]	[0,65; 0,65]
3 -2008	1,38	[0,64; 2,12]	[1,35; 1,35]	[0,85; 0,85]
4 -2008	0,68	[0,47; 0,89]	[0,74; 0,74]	[0,65; 0,65]
1 -2009	0,83	[0,56; 1,10]	[0,75; 0,75]	[0,56; 0,56]
2 -2009	0,97	[0,51; 1,43]	[1,26; 1,34]	[0,98; 1,37]

CONSTRUCCIÓN				
Período Trimestres	MCO		Regresión borrosa $[\beta_1; \beta_2]$	
	β	IC	Datos ciertos	Datos inciertos
1 -2005	1,23	[0,62; 1,83]	[0,88; 1,01]	[0,70; 0,81]
2 -2005	1,19	[0,67; 1,71]	[0,75; 0,75]	[1,13; 1,13]
3 -2005	0,88	[0,43; 1,33]	[0,85; 1,14]	[0,79; 0,84]
4 -2005	1,59	[1,00; 2,18]	[1,53; 1,53]	[1,76; 1,76]
1 -2006	1,08	[0,55; 1,60]	[0,77; 1,13]	[1,69; 1,69]
2 -2006	1,53	[1,12; 1,93]	[1,58; 1,58]	[1,24; 1,24]
3 -2006	1,12	[0,86; 1,38]	[1,13; 1,13]	[1,01; 1,12]
4 -2006	1,19	[0,86; 1,52]	[1,30; 1,30]	[0,88; 0,88]
1 -2007	1,11	[0,80; 1,43]	[0,86; 0,86]	[0,87; 0,87]
2 -2007	1,22	[0,91; 1,54]	[0,81; 0,81]	[1,12; 1,12]
3 -2007	1,75	[1,20; 2,31]	[2,11; 2,11]	[1,45; 1,45]
4 -2007	1,42	[0,71; 2,12]	[0,81; 0,81]	[0,87; 0,87]
1 -2008	1,27	[0,90; 1,63]	[1,18; 1,18]	[1,19; 1,19]
2 -2008	0,83	[0,48; 1,19]	[0,60; 0,60]	[0,43; 0,43]
3 -2008	1,21	[0,74; 1,68]	[1,37; 1,37]	[0,62; 0,62]
4 -2008	0,83	[0,61; 1,05]	[0,94; 0,94]	[0,94; 0,94]
1 -2009	0,80	[0,52; 1,08]	[0,63; 0,63]	[0,27; 0,27]
2 -2009	0,94	[0,51; 1,37]	[0,98; 0,98]	[0,85; 0,85]

FINANCIERO				
Período Trimestres	MCO		Regresión borrosa [β_1; β_2]	
	β	IC	Datos ciertos	Datos inciertos
1 -2005	1,02	[0,76; 1,29]	[1,09; 1,09]	[0,97; 0,97]
2 -2005	1,14	[0,95; 1,34]	[1,04; 1,04]	[1,23; 1,23]
3 -2005	1,11	[0,76; 1,47]	[1,16; 1,72]	[0,79; 1,42]
4 -2005	0,86	[0,55; 1,17]	[0,80; 0,80]	[0,88; 0,88]
1 -2006	1,19	[0,75; 1,63]	[0,83; 1,69]	[1,38; 1,38]
2 -2006	1,01	[0,77; 1,24]	[0,87; 0,87]	[0,90; 0,90]
3 -2006	0,97	[0,65; 1,29]	[0,84; 0,84]	[0,81; 0,81]
4 -2006	0,94	[0,67; 1,21]	[0,98; 1,15]	[0,82; 1,48]
1 -2007	1,17	[0,98; 1,36]	[1,28; 1,28]	[1,01; 1,01]
2 -2007	1,07	[0,96; 1,19]	[1,07; 1,07]	[0,89; 0,89]
3 -2007	0,87	[0,57; 1,17]	[0,81; 0,81]	[0,82; 0,82]
4 -2007	0,87	[0,41; 1,33]	[0,48; 1,06]	[0,33; 1,12]
1 -2008	1,18	[0,80; 1,56]	[1,22; 1,22]	[0,83; 0,91]
2 -2008	1,29	[1,18; 1,41]	[1,28; 1,28]	[1,03; 1,03]
3 -2008	1,05	[0,71; 1,38]	[0,62; 0,62]	[0,25; 0,25]
4 -2008	1,23	[1,03; 1,43]	[1,22; 1,22]	[0,96; 0,96]
1 -2009	1,81	[1,47; 2,14]	[1,87; 1,87]	[1,75; 1,75]
2 -2009	1,46	[1,10; 1,82]	[1,21; 1,53]	[1,00; 2,09]

TECNOLOGÍA				
Período Trimestres	MCO		Regresión borrosa $[\beta_1; \beta_2]$	
	β	IC	Datos ciertos	Datos inciertos
1 -2005	0,98	[0,52; 1,44]	[1,04; 1,04]	[0,90; 0,90]
2 -2005	1,21	[0,56; 1,86]	[0,82; 0,82]	[1,36; 1,36]
3 -2005	1,05	[0,62; 1,49]	[0,82; 0,82]	[0,60; 0,60]
4 -2005	**0,10**	[-1,01; 1,21]	[-1,30; -1,30]	[-0,76; -0,76]
1 -2006	**0,83**	[-0,27; 1,92]	[0,71; 1,44]	[1,01; 1,74]
2 -2006	0,73	[0,25; 1,21]	[1,49; 1,49]	[0,82; 0,82]
3 -2006	0,97	[0,67; 1,27]	[1,19; 1,49]	[0,95; 0,95]
4 -2006	1,21	[0,53; 1,90]	[1,19; 1,49]	[0,98; 0,98]
1 -2007	1,24	[1,00; 1,47]	[1,19; 1,49]	[0,94; 0,94]
2 -2007	0,83	[0,55; 1,10]	[0,89; 1,49]	[0,68; 0,75]
3 -2007	0,83	[0,29; 1,36]	[0,89; 0,94]	[0,93; 0,93]
4 -2007	1,66	[0,55; 2,75]	[0,78; 2,79]	[0,35; 3,46]
1 -2008	0,80	[0,20; 1,40]	[1,39; 1,39]	[1,22; 1,22]
2 -2008	0,94	[0,75; 1,12]	[0,91; 0,91]	[0,33; 0,33]
3 -2008	0,76	[0,06; 1,46]	[0,52; 0,52]	[0,12; 0,12]
4 -2008	0,88	[0,71; 1,05]	[0,88; 0,88]	[0,82; 0,82]
1 -2009	0,46	[0,05; 0,87]	[-0,12; 0,43]	[0,15; 0,15]
2 -2009	0,63	[0,14; 1,11]	[-0,12; 0,43]	[0,33; 0,40]

BIBLIOGRAFÍA

Altman, E.I.; Jacquillat B.; Levasseur M. (1974). "Comparative Analysis of Risk Measures: France and the United States". *The Journal of Finance*, vol. 29, No. 5. pp. 1495-1511.

Blume, M.E. (1971). "On the Assessment of Risk". *The Journal of Finance*, vol. 26, No. 1. pp. 1-10.

Blume, M.E. (1975). "Betas and their Regression Tendencies". *The Journal of Finance*, vol. 30, num. 3, June: pp. 785-795.

Celminš, A. (1987a). "Least squares model fitting to fuzzy vector data". *Fuzzy Sets and Systems,* 22: pp. 245-269.

Celminš, A. (1987b) "Multidimensional least-squares model fitting of fuzzy model". *Math. Modeling* 9, pp. 669-690.

Chen, P.L.; Deets M.K. (1973). "Systematic Risk and the Horizon Problem". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 8, No. 2: pp. 299-316.

Chang Y.; Ayyub, B. (2001). "Fuzzy regression methods – a comparative assessment". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 119, pp. 187-203.

Cohen, K.J.; Hawawini G.A.; Maier S.F.; Schwartz R.A.; Whitcomb D.K. (1983). "Friction in the Trading Process and the Estimation of Systematic Risk". *Journal of Financial Economics*, vol. 12, No. 2, pp. 263-278.

Damodaran, A. (2001). *The dark side of valuation.* Financial Times-Prentice Hall, Nueva Jersey.

de Andrés Sánchez, J.; Terceño Gómez A. (2003). "Estimating a Term Structure of Interest Rates for Fuzzy Financial Princing by Using Fuzzy Regression Methods". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 139, pp. 313-331.

de Andrés Sánchez, J.; Terceño Gómez A. (2004). "Estimating a Fuzzy Term Structure of Interest Rates Using Fuzzy Regression Techniques". *European Journal of Operational Research*, vol. 154: pp. 804-818.

Diamond, P. (1988). "Fuzzy least squares". Inform. Sci. 46, pp. 141-157.

Dimson, E. (1979). "Risk Measurement when Shares are Subject to Infrecuent Trading". *Journal of Financial Economics*, vol. 7, No. 2, pp. 197-226.

Eubank, A.A.; Zumwalt J.K. (1981). "Impact of Alternative Lengh Estimation and Prediction Periods on the Stability of Security and

Portfolio Betas". *Journal of Business Research*, vol. 9, No. 3, pp. 321-325.

Fernández, P. (1997). *Volatilidades, Betas y Alfas de Empresas Españolas. Períodos 1990-96 y 1986-89.* Documento de Investigación Nº 350, Centro Internacional de Investigación Financiera, Octubre.

Fernández, P.; Carabias J.M. (2007). *El peligro de utilizar betas calculadas.* Documento de Investigación, DI n° 685, IESE Business School – Universidad de Navarra.

Grande Esteban, I. (1984). "Efecto de las Ampliaciones de Capital y Pagos de Dividendos sobre la Evaluación Histórica del Coeficiente Beta". *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, vol. 13, No. 44, pp. 273-295.

Hawawini, G.A. (1980). "Intertemporal Cross Dependence in Securities Daily Returns and the Short-Run Intervalling Effect on Systematic Risk". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 15, No. 1, pp. 139-150.

Iglesias Antelo, S. (1997). "Estudio de la Estabilidad de las Betas de Títulos Individuales". En Actas del *XI Congreso Nacional, VII Congreso Hispano-Francés de Asociación Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, Lleida, pp. 539-552.

Iglesias Antelo, S. (1999). Nuevas Evidencias acerca de la Estabilidad de las Betas de las Carteras. En Actas del *XIII Congreso Nacional, IX Congreso Hispano-Francés de Asociación Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, Logroño, pp. 59-62.

Ishibuchi, H. (1992). "Fuzzy regression analysis". *Fuzzy Theory and Systems*, vol. 4, pp. 137-148.

Levy, R.A. (1971). "On the Short-Term Stationarity of Beta Coefficients". *Financial Analysts Journal*, vol. 27, No. 5, pp. 55-62.

Markowitz, H.M. (1952). "Portfolio Selection". *The Journal of Finance*, vol. 7, No. 1: pp. 77-91.

Markowitz, H.M. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Wiley & Sons, New York.

Savic, D.; Pedrycz, W (1991). "Evaluation of fuzzy regression models". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 39, pp. 51-63.

Scholes, M.; Williams J. (1977). "Estimating Betas from Nonsynchronous Data". *Journal of Financial Economics,* vol. 5, No. 3, pp. 309-327.

Sharpe, W. (1964) "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk". *The Journal of Finance*, vol. 19, No. 3, pp. 425-442.

Tanaka, H. (1987). "Fuzzy data analysis by possibilistic linear models". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 24, pp. 363-375.

Tanaka, H.; Ishibuchi, H. (1991). "Identification of possibilistic linear systems by quadratic membership functions of fuzzy parameters". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 41, pp. 145-160.

Tanaka, H.; Ishibuchi, H. (1992) A possibilistic regression analysis based on linear programming. In Kacprzyk, J.; Fedrizzi M. (Eds.). *Fuzzy regression analysis*. Physica-Verlag, Heildelberg: pp. 47-60.

Tanaka, H.; Uejima, S.; Asai, K. (1982). "Linear regression analysis with fuzzy model". IEEE, Systems, Trans. Systems Man Cybernet. SMC-2: pp. 903-907.

Terceño, A.; Laumann Y.; Barberà M.G.; Fernández A.; Càmara X. (2004). "Analysis of beta stability by using fuzzy regression methods. An application to the spanish stock market". XI International Association for Fuzzy-Set Management and Economy Congress. Messina-Reggio Calabria (Italia). Publicado en los Proceedings del Congreso, pp. 445-462. ISBN: 88-8296-146-X (obra completa).

Tole, T.M. (1981). "How to Maximize Stationarity of Beta". *Journal of Portfolio Management*, vol. 7, No. 2: pp. 45-49.

Wang, H-F.; Tsaur, R-C. (2000). "Insight of a fuzzy regression model". *Fuzzy Sets and Systems,* vol. 112, pp. 355-369.

Yen, K.K.; Ghoshray, S.; Roig, G. (1999). "A linear regression model using triangular fuzzy number coefficients". *Fuzzy Sets and Systems,* 106, pp. 167-177.