



Matemáticas: Enseñanza Universitaria

ISSN: 0120-6788

reviserm@univalle.edu.co

Escuela Regional de Matemáticas

Colombia

Muñoz Grajales, Juan Carlos
Ecuaciones dispersivas para ondas acuáticas
Matemáticas: Enseñanza Universitaria, vol. XIII, núm. 1, junio, 2005, pp. 3-14
Escuela Regional de Matemáticas
Cali, Colombia

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=46800102>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

Ecuaciones dispersivas para ondas acuáticas

Juan Carlos Muñoz Grajales

Recibido Sep. 27, 2004 Aceptado Ene. 19, 2005

Resumen

En la literatura existen varios modelos para describir la propagación de ondas en la superficie de un fluido que ocupa un canal raso con profundidad constante. En particular, se han deducido formalmente algunos modelos simplificados a partir de la formulación potencial de las ecuaciones de Euler [1], [3], [14], [16]. En este trabajo calculamos estimativos en la norma de L^2 que nos permiten comparar las soluciones de un sistema del tipo Boussinesq y las ecuaciones de Euler, en el caso lineal, dentro de un intervalo de tiempo que depende del parámetro de dispersión de los modelos. Validamos la teoría presentada a través de algunos experimentos numéricos.

Palabras y frases claves: Ondas acuáticas, dispersión, ecuaciones de Euler, transformada de Fourier.

Abstract

There are several models to describe wave propagation on the surface of a fluid in a shallow channel with constant depth. In particular, some simplified models have been formally derived from the potential formulation of the Euler equations [1], [3], [14], [16]. In this work we calculate estimates in the L^2 norm which allow us to compare the solutions of a Boussinesq-type system with the Euler equations, in the linear case, within a time interval which depends on the dispersion parameter of the models. We validate the theory presented through some numerical experiments.

Keywords: Water waves, dispersion, Euler equations, Fourier transform

AMSC(2000): Primary: 76B15, Secondary: 76B07

1 Introducción

Para describir el movimiento de una onda en la superficie de fluido que ocupa un canal raso unidimensional con fondo plano, se han propuesto varios modelos, entre otros, la formulación potencial para las ecuaciones de Euler en variables adimensionales [16]

$$\beta\phi_{\xi\xi} + \phi_{\zeta\zeta} = 0, \text{ para } 0 < \zeta < 1 + \alpha\eta(\xi, t), \quad (1)$$

con las condiciones

$$\begin{aligned} \eta_t + \alpha\phi_{\xi}\eta_{\xi} - \frac{1}{\beta}\phi_{\zeta} &= 0, \text{ en } \zeta = 1 + \alpha\eta(\xi, t), \\ \eta + \phi_t + \frac{\alpha}{2} \left(\phi_{\xi}^2 + \frac{1}{\beta}\phi_{\zeta}^2 \right) &= 0, \text{ en } \zeta = 1 + \alpha\eta(\xi, t), \\ \phi_{\zeta} &= 0, \text{ en } \zeta = 0, \\ \phi(\xi, 1 + \alpha\eta_0(\xi), 0) = \phi_0(\xi), \quad \eta(\xi, 0) &= \eta_0(\xi), \end{aligned} \quad (2)$$

y el sistema del tipo Boussinesq

$$\begin{aligned} \eta_t + ((1 + \alpha\eta)u)_\xi &= 0, \\ u_t + \eta_\xi + \frac{\alpha}{2}(u^2)_\xi - \frac{\beta}{3}u_{\xi\xi t} &= 0, \\ u(\xi, 0) = f(\xi), \quad \eta(\xi, 0) &= \eta_0(\xi). \end{aligned} \quad (3)$$

Aquí las variables ξ , ζ son las coordenadas espaciales, t denota el tiempo, $\phi(\xi, \zeta, t)$ representa el potencial del flujo, $\eta(\xi, t)$ denota (en ambos modelos) la elevación de la onda medida con respecto al nivel no perturbado ($\zeta = 1$), y el fondo del canal está ubicado en $\zeta = 0$. La función $u(\xi, t)$ denota la componente horizontal de la velocidad de las partículas de fluido en la profundidad $\zeta = \sqrt{1/3}$. Por lo tanto, la velocidad en el modelo (3) y el potencial en (1)-(2) están relacionadas por $u(\xi, t) = \phi_\xi(\xi, \sqrt{1/3}, t)$. Esto es importante en el momento de comparar los dos modelos anteriores. Los parámetros $\alpha > 0$, $\beta > 0$ son constantes adimensionales que son pequeñas cuando la amplitud de las ondas es pequeña y el canal es raso. La constante α mide los efectos no lineales del modelo y β controla la dispersión del sistema. Otros modelos del tipo Boussinesq para el movimiento de ondas en el agua han sido presentados en [1],[2], [3], [6],[7], [10]. Por otro lado, formulaciones integrales para el campo de velocidad del fluido han sido deducidas en [11] y [15] usando la técnica de la función de Green. En el caso del problema (1)-(2), la velocidad potencial en un punto interior del fluido puede ser expresada en términos de una integral de línea a lo largo del fondo del canal y la superficie libre [9]. Este tipo de formulaciones permite la solución numérica de las ecuaciones (1)-(2) (incluso en el caso tri-dimensional), a través de métodos de elementos de frontera (ver [12]). Una formulación integral de primera clase para el operador Dirichlet-Newmann en 2D asociado a la ecuación de Laplace se presenta en [5].

Existe evidencia experimental de que el modelo bi-dimensional (1)-(2) describe con razonable precisión el movimiento de una onda que se propaga en la superficie de un canal raso con profundidad constante [13]. Sin embargo, la formulación potencial (1)-(2) tiene alta complejidad computacional y teórica que dificulta su aplicación en predicción de ondas. Note que el dominio del problema (1)-(2) depende del tiempo (porque la superficie libre descrita por la función $\eta(\xi, t)$ está en movimiento) y esto es una fuente adicional de no linealidad. Por esta razón se han propuesto varios modelos simplificados, pero su deducción ha sido solamente formal. Por ejemplo, en [16] se deduce formalmente el sistema de tipo Boussinesq (3) a partir de las ecuaciones de Euler completas (1)-(2) cuando $0 < \alpha \ll 1, 0 < \beta \ll 1$, descartando los términos de orden $O(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2)$. Los sistemas Boussinesq tales como (3) están ganando bastante popularidad porque su análisis teórico y numérico resulta más fácil que para la formulación potencial (1)-(2). Note que el dominio computacional para el sistema (3) es constante en el tiempo.

El problema que se tiene es calcular teóricamente la precisión de la aproximación Boussinesq (3) con respecto al modelo original de donde proviene (1)-(2). Esto es crucial si queremos verificar que el sistema Boussinesq aproximado captura razonablemente los fenómenos físicos modelizados por las ecuaciones (1)-(2). En este artículo respondemos esta pregunta en el caso lineal $\alpha = 0$. Se demuestra que el campo de velocidad y la elevación de la onda correspondientes a los dos modelos, permanecen próximas en la norma de $L^2(\mathbb{R})$ en un intervalo de tiempo que tiende a infinito cuando $\beta \rightarrow 0$, para datos iniciales en $L^2(\mathbb{R})$ con banda acotada, i.e. tales que su transformada de Fourier tiene soporte compacto. Nuestros estimativos son obtenidos usando la transformada de Fourier y algunas de sus propiedades en los modelos linealizados.

Las contribuciones de este artículo son las siguientes. En primer lugar, mostrar la aplicación de la transformada de Fourier y del algoritmo numérico FFT (Fast Fourier Transform) en la solución de problemas de valores de frontera lineales; en particular estas técnicas pueden usarse para resolver modelos de ondas acuáticas. Segundo, los estimativos que deducimos en el caso lineal son un primer paso para el estudio de los modelos no lineales ($\alpha > 0$) completos (1)-(2), (3).

Este trabajo está organizado como sigue. En la sección 2 deducimos las soluciones de los modelos propuestos cuando $\alpha = 0$ usando la transformada de Fourier. En la sección 3 calculamos estimativos para las soluciones de los modelos (1)-(2), (3) y en la sección 4 presentamos algunos experimentos numéricos que validan los resultados teóricos obtenidos. Finalmente, en la sección 5 se encuentran las conclusiones del trabajo.

2 Solución de los modelos linealizados

En esta sección resolvemos los modelos (1)-(2), (3) en el caso lineal $\alpha = 0$. A fin de eliminar el parámetro β en las ecuaciones, hacemos el cambio de variables

$$\begin{aligned}\phi(\xi, \zeta, t) &= \beta^{-1/2}\Phi(\beta^{-1/2}\xi, \zeta, \beta^{-1/2}t), \\ \eta(\xi, t) &= \beta^{-1}N(\beta^{-1/2}\xi, \beta^{-1/2}t), \\ u(\xi, t) &= \beta^{-1}U(\beta^{-1/2}\xi, \beta^{-1/2}t).\end{aligned}$$

Por lo tanto, los datos iniciales en las variables U, N, Φ se expresan como $N(\xi, 0) = N_0(\xi) = \beta\eta_0(\beta^{1/2}\xi)$, $U(\xi, 0) = F(\xi) = \beta f(\beta^{1/2}\xi)$ y $\Phi(\xi, 1, 0) = \Phi_0(\xi) = \beta^{1/2}\phi_0(\beta^{1/2}\xi)$. Las ecuaciones (1)-(2) se transforman en

$$\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\zeta\zeta} = 0, \text{ para } 0 < \zeta < 1, \quad (4)$$

con las condiciones

$$N_t - \Phi_\zeta = 0, \text{ en } \zeta = 1, \quad (5)$$

$$N + \Phi_t = 0, \text{ en } \zeta = 1, \quad (6)$$

$$\Phi_\zeta = 0, \text{ en } \zeta = 0, \quad (7)$$

$$\Phi(\xi, 1, 0) = \Phi_0(\xi), \quad N(\xi, 0) = N_0(\xi), \quad (8)$$

y el sistema (3) se transforma en

$$N_t + U_\xi = 0, \quad (9)$$

$$U_t + N_\xi - \frac{1}{3}U_{\xi\xi t} = 0, \quad (10)$$

$$U(\xi, 0) = F(\xi), \quad N(\xi, 0) = N_0(\xi). \quad (11)$$

2.1 Modelo Boussinesq

Denotamos la transformada de Fourier de una función $g(\xi, t)$ con respecto a ξ como

$$\hat{g}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, t) e^{-ik\xi} d\xi.$$

Tomando formalmente transformada de Fourier en la variable ξ en el sistema (9)-(11) obtenemos

$$\hat{N}_t + ik\hat{U} = 0, \quad (12)$$

$$\hat{U}_t + ik\hat{N} + \frac{1}{3}k^2\hat{U}_t = 0, \quad (13)$$

$$\hat{U}(k, 0) = \hat{F}(k), \quad \hat{N}(k, 0) = \hat{N}_0(k). \quad (14)$$

Eliminando la variable \hat{N} de las ecuaciones (12)-(13) se obtiene

$$\hat{U}_{tt} + \bar{\omega}^2 \hat{U} = 0, \quad (15)$$

donde

$$\bar{\omega}^2 = \frac{k^2}{1 + (1/3)k^2}. \quad (16)$$

Por lo tanto, tenemos

$$\hat{U}(k, t) = C_1 e^{i\bar{\omega}t} + C_2 e^{-i\bar{\omega}t}. \quad (17)$$

Entonces de la ecuación (13) se tiene

$$\hat{N}(k, t) = -\frac{\bar{\omega}}{k}(1 + (1/3)k^2)(C_1 e^{i\bar{\omega}t} - C_2 e^{-i\bar{\omega}t}). \quad (18)$$

Ahora usando las condiciones iniciales en (14) se tiene

$$C_1 = \frac{\hat{F}(k)}{2} - \frac{k\hat{N}_0(k)}{2\bar{\omega}(1 + (1/3)k^2)}, \quad (19)$$

$$C_2 = \frac{\hat{F}(k)}{2} + \frac{k\hat{N}_0(k)}{2\bar{\omega}(1 + (1/3)k^2)}.$$

2.2 Formulación potencial

Tomando transformada de Fourier con respecto a la variable ξ en la ecuación (4) obtenemos $\hat{\Phi}_{\zeta\zeta} - k^2\hat{\Phi} = 0$. Por lo tanto, usando la condición en el fondo (7) se obtiene

$$\hat{\Phi}(k, \zeta, t) = A(t)\cosh(k\zeta).$$

Tomando transformada de Fourier y combinando las ecuaciones (5) y (6) que se satisfacen en la superficie libre $\zeta = 1$, se deduce que el coeficiente $A(t)$ satisface la ecuación $A''(t) + \omega^2 A(t) = 0$, con $\omega^2 = k \tanh(k)$. Resolviendo esta ecuación se obtiene

$$\hat{\Phi}(k, \zeta, t) = (D_1(k)e^{i\omega t} + D_2(k)e^{-i\omega t})\cosh(k\zeta). \quad (20)$$

De las condiciones iniciales (8) y la ecuación (6), y evaluando en $t = 0$, $\zeta = 1$, se deduce que

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(k, 1, 0) &= (D_1(k) + D_2(k))\cosh(k) = \hat{\Phi}_0(k), \\ \hat{\Phi}_t(k, 1, 0) &= i\omega(D_1(k) - D_2(k))\cosh(k) = -\hat{N}_0(k). \end{aligned} \quad (21)$$

De las ecuaciones (21) se encuentra que

$$D_1(k) = \frac{i\omega\hat{\Phi}_0(k) - \hat{N}_0(k)}{2i\omega\cosh(k)}, \quad D_2(k) = \frac{i\omega\hat{\Phi}_0(k) + \hat{N}_0(k)}{2i\omega\cosh(k)}.$$

Por otra parte, de la ecuación (6) y usando el resultado en la ecuación (20), se sigue que

$$\hat{N}(k, t) = -\hat{\Phi}_t(k, 1, t) = i\omega(-D_1(k)e^{i\omega t} + D_2(k)e^{-i\omega t})\cosh(k). \quad (22)$$

La componente horizontal $U_p(\xi, t)$ de la velocidad según el modelo (4)-(8) es

$$U_p(\xi, t) = \Phi_\xi(\xi, \sqrt{1/3}, t),$$

y por lo tanto, de la ecuación (20) obtenemos

$$\hat{U}_p(k, t) = ik\hat{\Phi}_0(k) \left(D_1(k)e^{i\omega t} + D_2(k)e^{-i\omega t} \right) \frac{\cosh(\sqrt{1/3}k)}{\cosh(k)}. \quad (23)$$

Usando la ecuación anterior, es fácil ver que a fin que los modelos (4)-(8) y (9)-(11) coincidan en $t = 0$ (i.e. $\hat{U}_p(k, 0) = \hat{U}(k, 0) = \hat{F}(k)$), se requiere la siguiente relación entre los datos iniciales:

$$\hat{\Phi}_0(k) = \frac{\hat{F}(k)\cosh(k)}{ki\cosh(\sqrt{1/3}k)}. \quad (24)$$

Entonces, reemplazando la expresión (24) en las ecuaciones (22),(23), obtenemos que la elevación de la onda está dada por

$$\begin{aligned} \hat{N}_p(k, t) = \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{\omega \hat{F}(k) \cosh(k)}{k \cosh(\sqrt{1/3}k)} + \hat{N}_0(k) \right) e^{i\omega t} \right. \\ \left. + \left(\frac{\omega \hat{F}(k) \cosh(k)}{k \cosh(\sqrt{1/3}k)} + \hat{N}_0(k) \right) e^{-i\omega t} \right], \end{aligned} \quad (25)$$

y la componente horizontal de la velocidad es

$$\begin{aligned} \hat{U}_p(k, t) = \frac{1}{2} \left[\left(\hat{F}(k) - \frac{k \hat{N}_0(k) \cosh(\sqrt{1/3}k)}{\omega \cosh(k)} \right) e^{i\omega t} \right. \\ \left. + \left(\hat{F}(k) + \frac{k \hat{N}_0(k) \cosh(\sqrt{1/3}k)}{\omega \cosh(k)} \right) e^{-i\omega t} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

3 Comparación analítica de los modelos linealizados

Consideramos el espacio $L^2(\mathbb{R})$ con la norma

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

y el espacio $E = L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ dotado con la norma

$$\|(u, v)\|_E = \|u\|_2 + \|v\|_2,$$

donde $u, v \in L^2(\mathbb{R})$. Además, usamos la notación estándar $f(x) = O(g(x))$ para indicar que existe una constante $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$.

En esta sección nos proponemos calcular estimativos que nos permiten comparar las soluciones correspondientes a los modelos (4)-(8) y (9)-(11). Demostramos el siguiente teorema.

Teorema 1. *Suponga que $\eta_0, f \in L^2(\mathbb{R})$, que el soporte de $\hat{\eta}_0, \hat{f}$ está contenido en $[-M, M]$, $M > 0$ y $0 < \beta \ll 1$. Sean (Φ, N_p) , (U, N) soluciones de los modelos (4)-(8) y (9)-(11), respectivamente, con datos iniciales $N_p(\xi, 0) = N(\xi, 0) = N_0(\xi) = \beta \eta_0(\beta^{1/2}\xi)$, $U(\xi, 0) = F(\xi) = \beta f(\beta^{1/2}\xi)$ y $\Phi(\xi, 1, 0) = \Phi_0(\xi)$ con $\hat{\Phi}_0(k) = \frac{\hat{F}(k) \cosh(k)}{k i \cosh(\sqrt{1/3}k)}$. Sea $U_p(\xi, t) = \Phi_\xi(\xi, \sqrt{1/3}, t)$. Entonces si $t \in [0, \beta^{-9/4}]$,*

$$\|(U_p(\cdot, t), N_p(\cdot, t)) - (U(\cdot, t), N(\cdot, t))\|_E \leq C\beta \|(f, \eta_0)\|_E, \quad (27)$$

donde $C > 0$ es una constante que depende sólo de M .

Demostración. En primer lugar, de las ecuaciones (17) y (26) tenemos

$$\left| \hat{U}_p(k, t) - \hat{U}(k, t) \right| \leq \left| e^{i\bar{\omega}t} (A_1(k) e^{i(\omega - \bar{\omega})t} - B_1(k)) \right| + \left| e^{-i\bar{\omega}t} (A_2(k) e^{-i(\omega - \bar{\omega})t} - B_2(k)) \right|, \quad (28)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1(k) &= \frac{\hat{F}(k)}{2} - \frac{k \cosh(\sqrt{1/3}k) \hat{N}_0(k)}{2\omega \cosh(k)} \\ B_1(k) &= \frac{\hat{F}(k)}{2} - \frac{k \hat{N}_0(k)}{2\bar{\omega}(1 + (1/3)k^2)} \\ A_2(k) &= \frac{\hat{F}(k)}{2} + \frac{k \cosh(\sqrt{1/3}k) \hat{N}_0(k)}{2\omega \cosh(k)} \\ B_2(k) &= \frac{\hat{F}(k)}{2} + \frac{k \hat{N}_0(k)}{2\bar{\omega}(1 + (1/3)k^2)} \end{aligned} \quad (29)$$

Usando las expansiones de Taylor en torno de $k = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{k \cosh(\sqrt{1/3}k)}{2\omega \cosh(k)} &= \frac{1}{2} - \frac{k^2}{12} + \frac{53}{2160}k^4 + O(k^6) \\ \frac{k}{2\bar{\omega}(1 + (1/3)k^2)} &= \frac{1}{2} - \frac{k^2}{12} + \frac{1}{48}k^4 + O(k^6) \\ \omega = k^{1/2} \tanh(k)^{1/2} &= k - \frac{1}{6}k^3 + \frac{19}{360}k^5 + O(k^7) \\ \bar{\omega} = \sqrt{\frac{k^2}{1 + (1/3)k^2}} &= k - \frac{1}{6}k^3 + \frac{1}{24}k^5 + O(k^7), \end{aligned} \quad (30)$$

obtenemos el estimativo

$$\left| \hat{U}_p(k, t) - \hat{U}(k, t) \right| \leq \left| A_1(k) e^{i(\frac{19}{360} - \frac{1}{24})tk^5 + O(tk^7)} - B_1(k) \right| + \left| A_2(k) e^{-i(\frac{19}{360} - \frac{1}{24})tk^5 + O(tk^7)} - B_2(k) \right| \leq |G(t, k)| \quad (31)$$

para $k \ll 1$, donde

$$G(t, k) = \hat{N}_0(k)(O(k^4) + O(tk^5)) + \hat{F}(k)O(tk^5).$$

De manera semejante, usando las expansiones de Taylor en torno de $k = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\omega \cosh(k)}{k \cosh(\sqrt{1/3}k)} &= 1 + \frac{k^2}{6} - \frac{23}{1080}k^4 + O(k^6) \\ \frac{\bar{\omega}(1 + (1/3)k^2)}{k} &= 1 + \frac{k^2}{6} - \frac{1}{72}k^4 + O(k^6), \end{aligned} \quad (32)$$

en las ecuaciones (18) y (25) obtenemos el estimativo

$$\left| \hat{N}_p(k, t) - \hat{N}(k, t) \right| \leq \left| \hat{N}_0(k)O(tk^5) + \hat{F}(k)(O(k^4) + O(tk^5)) \right|, \quad (33)$$

válido para $k \ll 1$. Los datos iniciales $\eta_0(\xi)$ y $f(\xi)$ tienen *banda acotada*, i.e., que sus transformadas de Fourier tienen soporte compacto en $[-M, M]$, con $M > 0$. Por lo tanto, como $N_0(\xi) = \beta\eta_0(\beta^{1/2}\xi)$, $F(\xi) = \beta f(\beta^{1/2}\xi)$, tenemos que los soportes de \hat{N}_0 y \hat{F} están contenidos en $[-\beta^{1/2}M, \beta^{1/2}M]$. Tenemos por el teorema de Parseval y por los estimativos (31) y (33)

$$\begin{aligned} \|U_p(\cdot, t) - U(\cdot, t)\|_2 &= \left\| \hat{U}_p(\cdot, t) - \hat{U}(\cdot, t) \right\|_2 \\ &\leq \left(\int_{-\beta^{1/2}M}^{\beta^{1/2}M} \left| \hat{N}_0(k)(C_1k^4 + C_2tk^5) + C_3\hat{F}(k)tk^5 \right|^2 dk \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{-\beta^{1/2}M}^{\beta^{1/2}M} \left| \beta^{1/2}\hat{\eta}_0(\beta^{-1/2}k)(C_1k^4 + C_2tk^5) \right|^2 dk \right)^{1/2} + \\ &\quad \left(\int_{-\beta^{1/2}M}^{\beta^{1/2}M} \left| \beta^{1/2}\hat{f}(\beta^{-1/2}k)C_3tk^5 \right|^2 dk \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{-M}^M \left| \beta^{1/2}\hat{\eta}_0(s)(C_1\beta^2s^4 + C_2t\beta^{5/2}s^5) \right|^2 \beta^{1/2}ds \right)^{1/2} + \\ &\quad \left(\int_{-M}^M \left| \beta^{1/2}\hat{f}(s)C_3t\beta^{5/2}s^5 \right|^2 \beta^{1/2}ds \right)^{1/2} \\ &\leq \|\eta_0\|_2 (\tilde{C}_1\beta^{11/4} + \tilde{C}_2t\beta^{13/4}) + \tilde{C}_3 \|f\|_2 t\beta^{13/4}, \end{aligned} \quad (34)$$

donde $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3$ son constantes positivas que dependen de M . Note que las series de Taylor (30)-(32) usadas en los estimativos anteriores son válidas en el intervalo $[-\beta^{1/2}M, \beta^{1/2}M]$ para β suficientemente pequeño.

Procediendo de manera similar,

$$\begin{aligned} \|N_p(\cdot, t) - N(\cdot, t)\|_2 &= \left\| \hat{N}_p(\cdot, t) - \hat{N}(\cdot, t) \right\|_2 \\ &\leq \|f\|_2 (\tilde{D}_1\beta^{11/4} + \tilde{D}_2t\beta^{13/4}) + \tilde{D}_3 \|\eta_0\|_2 t\beta^{13/4}, \end{aligned} \quad (35)$$

donde $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \tilde{D}_3$ son constantes positivas que dependen de M . Por lo tanto combinando las desigualdades (34) y (35) tenemos

$$\|(U_p(\cdot, t) - U(\cdot, t), N_p(\cdot, t) - N(\cdot, t))\|_E \leq C \|(f, \eta_0)\|_E (\beta^{11/4} + \beta^{13/4}t), \quad (36)$$

donde $C > 0$ es una constante que depende de M . De los estimativos anteriores deducimos que el error absoluto en la norma de $L^2 \times L^2$ es $O(\beta)$ siempre que $0 < t < \beta^{-9/4}$. Así las soluciones $(U_p(\cdot, t), N_p(\cdot, t)), (U(\cdot, t), N(\cdot, t))$ se encuentran próximas $O(\beta)$ cuando $t \in [0, \beta^{-9/4}]$. Esto concluye la demostración del estimativo (27). \square

4 Experimentos numéricos

Calculamos U_p, U, N_p, N las ecuaciones (17),(18),(25),(26) usando el teorema de inversión de Fourier

$$U(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{U}(k, t) e^{ik\xi} dk \quad (37)$$

y similarmente para U, N_p, N . Para computar la integral del tipo Fourier en la ecuación (37) es más eficiente emplear el algoritmo numérico FFT (Fast Fourier Transform) el cual disminuye el costo de las operaciones a $O(n \log(n))$, donde n es el número de puntos donde se evalúa el coeficiente de Fourier $\hat{U}(k, t)$. Esto debe compararse al costo normal de este cálculo sin FFT que es $O(n^2)$. La FFT usa la regla del trapecio para aproximar la integral en (37) y su uso es ventajoso cuando se implementan esquemas numéricos del tipo espectral o pseudoespectral para ecuaciones de evolución, tales como los modelos (1)-(2) y (3) considerados en este trabajo, que requieren evaluar varias integrales del tipo Fourier en cada paso del tiempo. Por ejemplo, el autor implementa un esquema del tipo espectral usando el algoritmo FFT para la ecuación de Benjamin-Ono y otros sistemas de ecuaciones dispersivas para ondas acuáticas en [8]. Destacamos que la máxima eficiencia de la FFT requiere que el número de puntos n sea una potencia de 2. Además, este algoritmo es fácil de usar y se encuentra implementado en varios sistemas de computación científica tales como SCILAB, MATLAB y MATHEMATICA. Ver información completa sobre la FFT en [4].

A fin de validar los resultados obtenidos en la sección 3, en la figura 1 comparamos la elevación de la onda N_p, N , dados por los modelos (4)-(8) y (9)-(11), respectivamente, para $t = 5000$ y $\beta = 0.01$. El pulso inicial $N_0(\xi) = F(\xi)$ es un tren de tres Gaussianas con amplitud β ubicadas en las posiciones $\xi = 500, 550, 600$ de la forma

$$N_0(\xi) = F(\xi) = \beta(e^{-\beta(x-600)^2/\epsilon} + e^{-\beta(x-550)^2/\epsilon} + e^{-\beta(x-500)^2/\epsilon}),$$

donde $\epsilon = 0.3$. Note que a pesar que este tipo de pulso no es en realidad de banda acotada, su transformada de Fourier es efectivamente cero fuera del intervalo $[-4, 4]$, debido a su decaimiento exponencial en infinito. Se observa que las soluciones coinciden con buena precisión en esta escala de tiempo en concordancia con el teorema 1. Se usaron en este cálculo 8192 puntos para el cálculo de la FFT en el intervalo $[0, 6000]$. Las tres Gaussianas aún pueden distinguirse en la parte de la solución en el intervalo $[5450, 5700]$. Su amplitud ha disminuido debido a la atenuación dispersiva generada en el modelo. En la figura 2 presentamos los resultados para la elevación de la onda en ambos modelos considerados para un valor mayor de dispersión $\beta = 0.1$ y $t = 200$. La FFT se realiza en este caso con 4096 puntos en el intervalo $[0, 1000]$. Según la teoría se espera que las soluciones correspondientes estén próximas dentro

de una escala de tiempo $t \in [0, \beta^{-9/4}] = [0, 177.83]$. Así en este experimento las soluciones empiezan a separarse, sobretodo en la cola dispersiva de la solución ubicada en el intervalo $[550, 750]$. En este intervalo, el número de onda típico k es grande y las aproximaciones de Taylor (válidas en el intervalo $[-\beta^{1/2}M, \beta^{1/2}M]$) empleadas en el teorema 1 son menos precisas. No obstante, en el frente de la onda dentro del intervalo $[750, 850]$ se observa que la solución del modelo Boussinesq (9)-(11) aún coincide con buena precisión con la solución de las ecuaciones de Euler (4)-(8).

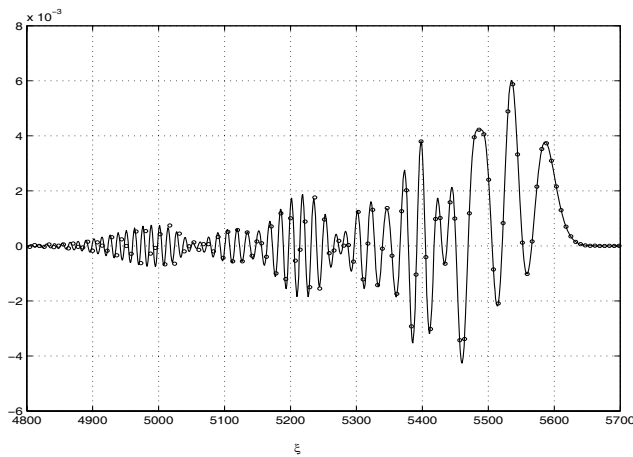


Figura 1: Puntos: Elevación de la onda $N_p(\xi, t)$ según modelo (4)-(8). Línea continua : $N(\xi, t)$ según modelo (9)-(11). Parámetros del modelo: $t = 5000$, $\beta = 0.01$.

5 Conclusiones

En este trabajo hemos demostrado que las soluciones de los modelos linealizados (4)-(8) y (9)-(11) coinciden $O(\beta)$ cuando el tiempo varía dentro del intervalo $[0, \beta^{-9/4}]$. Así si $\beta \ll 1$ se espera que las soluciones correspondientes estén próximas en un intervalo de tiempo razonablemente grande. Saber esto es crucial para tener seguridad de que el modelo Boussinesq aproximado describe los fenómenos físicos modelizados por la formulación potencial de las ecuaciones de Euler (4)-(8). Se ha validado la teoría a través de algunos experimentos numéricos. Este estudio es el punto de partida para analizar la consistencia de los modelos completos no lineales ($\alpha > 0$) en un futuro trabajo.

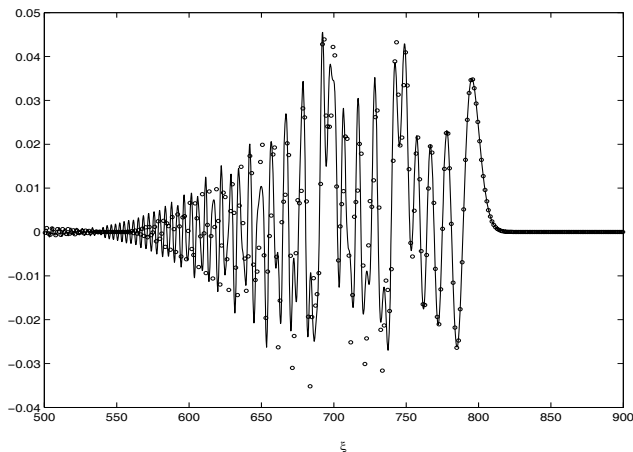


Figura 2: Puntos: Elevación de la onda $N_p(\xi, t)$ según modelo (4)-(8). Línea continua: $N(\xi, t)$ según modelo (9)-(11). Parámetros del modelo: $t = 200$, $\beta = 0.1$.

6 Agradecimientos

Este trabajo hace parte del proyecto **Modelos para ondas en costas altamente irregulares** (Código 7660) financiado parcialmente por la Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Referencias

- [1] Benney, D. J., Luke, J. C. Interactions of permanent waves of finite amplitude. *J. Math. Phys.* 43, pp 309-313, 1964.
- [2] Beji, S., Nadaoka, K. Formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth. *Ocean Eng.* 23,(8), pp. 691-704, 1996.
- [3] Bona, J. L., Chen, M., Saut, J. C. Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media. I: Derivation and Linear Theory. *J. Nonlinear Science* 12, pp 283-318, 2002.
- [4] Brigham, E.O. The Fast Fourier Transform and its Applications. Prentice Hall, 1988.
- [5] Guidotti, P. A first-kind boundary integral formulation for the Laplace Dirichlet-to-Neumann map in 2D. *J. Comp.Phys.*, 190, pp. 325-345, 2003.

- [6] Kennedy, A., Kirby, J., Chen, Q., Dalrymple, R. Boussinesq-type equations with improved nonlinear performance. *Wave Motion*. 33, pp. 225-243, 2001.
- [7] Madsen, A., Murray, R., Sørensen, O. R. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. *Coastal Eng.* 15, pp. 371-388, 1991.
- [8] Muñoz, J.C. Spectral methods for dispersive water wave models. En preparación, 2005.
- [9] Nachbin A., Papanicolaou, G. C. Boundary Element Method for the long-time water wave propagation over rapidly varying topography. *Intl. J. Numer. Meth. Fluids*. 14, pp. 1347-1365, 1992.
- [10] Nwogu, O. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 119, pp. 618-638, 1993.
- [11] Ladyzhenskaya, O. A. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. Gordon and Breach, New York, 1963.
- [12] Liu, P. L. F., Liggett, J. A. Boundary Element formulations and solutions for some nonlinear water wave problems. Developments in Boundary Element Methods -2, eds. P.K. Banerjee y R.P. Shaw, Elsevier Applied Science Publishers, 1984.
- [13] Ohyama, T., Kioka, W., Tada, A. Applicability of numerical models to nonlinear dispersive waves. *Coastal Engineering* 24, pp. 297-313, 1995.
- [14] Peregrine, D. H. Long waves on a beach. *J. Fluid Mech.* , pp. 815-827, 1967.
- [15] Power, H., Wrobel, L. C. Boundary Integral Methods in Fluid Mechanics. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1995.
- [16] Whitham, G.B. Linear and nonlinear waves, John Wiley, 1974.

Dirección del autor: J. C. Muñoz, Univ. del Valle, jcarlmz@yahoo.com