Matemáticas: Enseñanza Universitaria
ISSN: 0120-6788
reviserm@univalle.edu.co
Escuela Regional de Matemáticas
Colombia

Blanco, Liliana; León, Jorge A.
Operador de divergencia con respecto al movimiento browniano fraccional
Matemáticas: Enseñanza Universitaria, vol. XIII, núm. 2, diciembre, 2005, pp. 19-33
Escuela Regional de Matemáticas
Cali, Colombia

Vol. XIII Nº 2 Diciembre (2005)
Matemáticas: 19–33

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Operador de divergencia con respecto al movimiento browniano fraccional

Liliana Blanco, Jorge A. León

Recibido Ago. 25, 2005 Aceptado Oct. 20, 2005

Abstract
The purpose of this paper is to define the stochastic integral with respect to the fractional Brownian motion as the divergence operator in the sense of the calculus of variations. The idea is to introduce the techniques of the Malliavin calculus or calculus of variations for Gaussian processes.

Keywords: Chaos decomposition, derivative and divergence operators, fractional Brownian motion, Itô and Skorohod integrals, Malliavin calculus, reproducing kernel Hilbert space.

AMSC(2000): Primary: 60H05, Secondary: 60H07.

Resumen
En este artículo damos algunos elementos básicos que se utilizan en la definición de la integral estocástica con respecto al movimiento browniano fraccional como un operador de divergencia. La idea es brindar una herramienta útil para entender las técnicas del cálculo de variaciones o cálculo de Malliavin para procesos gaussianos.

Palabras y frases claves: Cálculo de Malliavin, descomposición en caos, espacio asociado a un proceso gaussiano, integrales de Itô y de Skorohod, movimiento Browniano fraccional, operadores de derivada y de divergencia.

1 Introducción.

La integral de Itô ha sido definida en Itô [12] para procesos adaptados a la información que genera el movimiento browniano (ver Sección 2). Esta idea fue posteriormente usada por Doob [9] para tener a las martingalas como integradores, y en consecuencia se tiene una integral estocástica con respecto a una semimartingala (i.e., la suma de una martingala local y un proceso con trayectorias de variación acotada). De hecho en Protter [21] se ha observado que la familia más grande de integradores que permite tener una definición de integral estocástica que cumple versiones del teorema de convergencia dominada son las semimartingalas.

Posteriormente, Skorohod [25] definió una integral estocástica (la llamada integral de Skorohod u operador de divergencia), que resultó ser una extensión de la integral de Itô que permite integrar procesos no necesariamente adaptados a la filtración generada por el movimiento browniano. Ahora se sabe (ver Nualart [17] o Nualart y Pardoux [18]) que esta extensión es el adjunto del operador de derivada sobre el espacio de Wiener. En otras palabras uno puede usar el cálculo de Malliavin o cálculo de variaciones para definir y estudiar a la integral de Skorohod.

Por otra parte, puesto que el cálculo de Malliavin es válido para cualquier proceso gaussiano arbitrario, es natural interpretar al operador de divergencia con respecto al movimiento browniano fraccional (mbf) como una integral estocástica (ver Alòs et al [2, 3], Decreusefond y Üstünel [8], y Duncan et al [10]).

El mbf (ver Sección 3, y para mayores detalles ver Mandelbrot y Van Ness [16]), con parámetro de Hurst $H \in (0,1)$, es un proceso gaussiano que no es una semimartingala cuando $H \neq 1/2$, y es un movimiento browniano cuando $H = 1/2$ (y por lo tanto una semimartingala). Por lo que en general no se puede usar el cálculo estocástico en el sentido de Itô para definir una integral con respecto al mbf.

Las propiedades del mbf lo han convertido en un modelo adecuado para fenómenos cuyos incrementos no son independientes y exhiben dependencia "grande" (ver Nualart [19]).

Cuando el mbf B^H tiene parámetro $H \in (1/2, 1)$, se puede considerar a la integral estocástica $\int_0^T Y_S dB_S^H$ trayectoria por trayectoria (esto es, ω por ω), debido a que Young [26] ha demostrado que ésta existe como una integral de Riemann–Stieltjes si Y tiene trayectorias μ–Hölder continuas con $\mu + H > 1$. Versiones de este enfoque trayectorial han sido analizadas en este caso (i.e., $H > 1/2$) por varios autores, por ejemplo Lin [15], Ruzmaikina [23] y Zähle [27], entre otros.

Varios autores han buscado otras diferentes formas de construir adecuadamente una integral con respecto al mbf, entre los que podemos citar a Alòs et al [1], Carmona et al. [4], Coutin y Qian [6], Dai y Heyde [7], y Nualart [19] y sus referencias.

Con el fin de hacer más comprensibles los desarrollos realizados en [2, 3, 8], en la Sección 2 usamos el cálculo de Malliavin para presentar una extensión de la integral de Itô clásica con respecto al movimiento browniano como un operador de divergencia. Esto permitirá motivar las definiciones de la Sección 3, donde indicamos cómo se utilizan las técnicas del cálculo de variaciones para introducir el operador de divergencia con respecto a B^H.

2 La integral de Skorohod

En lo que sigue $W = \{W_t : t \in [0,T]\}$ es un proceso de Wiener unidimensional definido sobre un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, con $W_0 \equiv 0$. Sea $\mathcal{F}_t$ la σ–álgebra generada por $\{W_s : 0 \leq s \leq t\}$ y los conjuntos de medida cero de tal suerte que la familia $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in [0,T]\}$ satisface las condiciones usuales.

La integral clásica de Itô con respecto al movimiento browniano W está definida para procesos g medibles y adaptados a la filtración $\mathcal{F}$ (i.e., g_t es $\mathcal{F}_t$

medible para todo $t \in [0,T]$), tales que la condición siguiente se satisface

$$E\left(\int_0^T (g_s)^2 ds\right) < \infty. \tag{1}$$

La idea de la construcción de esta integral es similar a la definición de la integral de una variable aleatoria con respecto a una medida. A saber, primero se define para procesos simples y adaptados de la forma

$$g_s = \sum_{i=1}^{n} F_i I_{(s_i,s_{i+1}]}(s), \quad 0 = s_1 < s_2 < \ldots < s_{n+1} = T,$$

como

$$\int_0^T g_s dW_s = \sum_{i=1}^{n} F_i (W_{s_{i+1}} - W_{s_i}),$$

y posteriormente se aproxima a los procesos medibles y adaptados que cumplen (1) (ver por ejemplo [12]).

Sin embargo la condición que exige que los procesos integrables en el sentido de Itô deben ser adaptados es restrictiva, pues si se considera, por ejemplo, la ecuación diferencial estocástica

$$\left\{ \begin{array}{lcl} dX_t &=& b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t, \quad t \in [0,T], \\ X_0 &=& \xi, \end{array} \right. \tag{2}$$

donde ξ es una v.a. $\mathcal{F}_T$–medible o los coeficientes dependan de toda la información que genera W, entonces una solución de (2) no puede ser un proceso adaptado. Por lo tanto, es necesario extender la integral de Itô de tal manera que los integrandos puedan ser procesos no necesariamente adaptados. Cabe mencionar que la ecuación (2) aparece de manera natural en diferentes áreas del conocimiento científico, como por ejemplo cuando la condición inicial depende de la solución en el tiempo T o el sistema está afectado por una variable aleatoria que depende de toda la información que genera W, como sucede en los mercados financieros con información privilegiada (ver León et al. [13]).

En lo que sigue se va a presentar la integral de Skorohod o el operador de divergencia, el cual es una extensión de la integral de Itô y que, como ya mencionamos, nos permite integrar procesos no necesariamente adaptados. Esta integral fue dada por Skorohod en [25]. Además, se tiene que esta integral tiene propiedades similares a las de la integral de Itô (ver [17]) como son la fórmula de Itô o fórmula de integración por partes, el teorema de Fubini, etc. Una definición de utilidad es la siguiente.

Definición 1. *Sea $g : [0,T]^n \to \mathbb{R}$ una función.*

i) Se dice que g es una función simétrica, si y sólo si,

$$g(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = g(x_1, \ldots, x_n),$$

para todas las permutaciones σ del conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$.

ii) Se define la simetrización $\tilde{g}$ de g como sigue:

$$\tilde{g}(s_1, \ldots, s_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} g(s_{\sigma(1)}, \ldots, s_{\sigma(n)}),$$

donde S_n es la familia de las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$.

Es fácil ver que $\tilde{g}$ es simétrica y coincide con g si esta última es simétrica.

La siguiente es una herramienta útil en el cálculo de Malliavin. En lo que sigue usaremos la notación $L^2([0,T]^n) = L^2([0,T]^n, \mathcal{B}([0,T]^n), \lambda^n)$, donde $\mathcal{B}([0,T]^n)$ es la σ-álgebra de Borel de $[0,T]^n$ y λ es la medida de Lebesgue.

Definición 2. *Sea $f \in L^2([0,T]^n)$. La integral múltiple de orden n de f con respecto a W, denotada por $I_n(f)$, se define como la integral iterada de Itô:*

$$I_n(f) = n! \int_0^T \int_0^{s_n} \cdots \int_0^{s_2} \tilde{f}(s_1, \ldots, s_n) dW_{s_1} \cdots dW_{s_n}. \tag{3}$$

Observamos que la integral múltiple I_n está bien definida pues el proceso

$$\left\{ \int_0^t g(s) dW_s := \int_0^T I_{[0,t]}(s) g(s) dW_s : 0 \le t \le T \right\},$$

es adaptado y cuadrado integrable, para todo proceso adaptado y medible g como en (1). Además (ver Itô [11] y Nualart [17]), el operador I_n es un operador lineal acotado de $L^2([0,T]^n)$ en $L^2(\Omega)$ tal que:

$$E(I_n(f) I_m(g)) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad n \neq m, \\ n! \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{L^2([0,T]^n)}, & \text{si} \quad n = m. \end{cases}$$

Otra forma de introducir las integrales múltiples es usando su relación con los polinomios de Hermite. A saber,

$$\prod_{i=1}^m n_i! H_{n_i} \left(\int_0^T e_i(s) dW_s \right) = I_{\sum_{i=1}^m n_i} \left(e_1^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes e_m^{\otimes n_m} \right). \tag{4}$$

Aquí, $\{e_1, \ldots, e_m\}$ es una familia ortonormal de $L^2([0,T])$,

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \exp(\tfrac{x^2}{2}) \frac{d^n}{dx^n} \left(\exp(-\tfrac{x^2}{2}) \right) \tag{5}$$

es el polinomio de Hermite de orden n y

$$e_i^{\otimes n_i} \otimes e_j^{\otimes n_j}(s_1, \ldots, s_{n_i+n_j}) = e_i(s_1) \cdots e_i(s_{n_i}) e_j(s_{n_i+1}) \cdots e_j(s_{n_1+n_j}). \tag{6}$$

En [11] (ver también [17]) se encuentra el siguiente resultado conocido como la *expansión en caos de Wiener–Itô*, el cual establece que cualquier variable, aleatoria cuadrado integrable, $\mathcal{F}_T$–medible, tiene una descomposición ortogonal en $L^2(\Omega)$ de integrales múltiples. Aquí es importante recordar que $\mathcal{F}_T$ es generada por la familia $\{W_t : t \in [0,T]\}$.

Teorema 3. *Sea $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, entonces existe una sucesión única de funciones determinísticas simétricas $\{f_n \in L^2([0,T]^n) : n \in \mathbb{N}\}$ tal que*

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) = EF + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n). \tag{7}$$

Note que la descomposición en caos (7) puede no ser única si algún elemento de la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ no es simétrico. En efecto, sea $f(s,t) = t - s$, entonces $0 = I_2(f)$ ya que $\tilde{f} = 0$.

La expansión en caos de Wiener-Itô es uno de los puntos de partida para la introducción de la integral de Skorohod. Esto lo detallamos a continuación.

Sea $u \in L^2(\Omega \times [0,T])$. Esto implica en particular que:

a) u_t es $\mathcal{F}_T$–medible para todo $t \in [0,T]$,

b) $E(u_t^2) < \infty$ para casi todo $t \in [0,T]$.

Por lo que para casi cada $t \in [0,T]$ fijo se puede considerar la expansión en caos de Wiener-Itô de la variable aleatoria u_t, esto implica entonces, que para casi cada $t \in [0,T]$ existe una sucesión única $\{f_n(\cdot,t) \in L^2([0,T]^n) : n \in \mathbb{N}\}$ de funciones simétricas con

$$u_t = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot,t)). \tag{8}$$

Es claro que la función f_n puede ser considerada como una función de las $(n+1)$ variables $t_1, \ldots, t_n, t$. Además (ver [17]), no es difícil demostrar que el hecho de que $u \in L^2(\Omega \times [0,T])$ implica que f_n es una función en $L^2([0,T]^{n+1})$. Puesto que la función f_n es simétrica con respecto a las primeras n variables, entonces su simetrización $\tilde{f}_n$ está dada por:

$$\tilde{f}_n(t_1, \ldots, t_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} f_n(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{n+1}, t_{i+1}, \ldots, t_n, t_i).$$

Con las definiciones y observaciones dadas hasta el momento podemos introducir el siguiente concepto:

Definición 4. *Sea $u \in L^2(\Omega \times [0,T])$ con expansión en caos de Wiener-Itô dada por (8). Se dice que u es Skorohod integrable si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n)$$

converge en $L^2(\Omega)$. Esto es,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! ||\tilde{f}_n||^2_{L^2([0,T]^{n+1})} < \infty.$$

En tal caso se define la integral de Skorohod δ de u como sigue:

$$\delta(u) := \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n). \tag{9}$$

Algunas veces se denota a la variable aleatoria $\delta(u)$ por $\int_0^T u_s dW_s$ debido a que $\delta(u)$ es igual a la integral de Itô de u con respecto a W si u es un proceso adaptado a $\mathcal{F}$.

Otra forma de definir el operador δ es introducirlo como el adjunto del operador derivada. Esto se bosqueja a continuación.

Sea $\mathcal{S}$ la familia de todos los funcionales suaves $F \in L^2(\Omega)$ de la forma

$$F = f\left(\int_0^T h_1(t)\, dW_t, \ldots, \int_0^T h_n(t)\, dW_t\right), \tag{10}$$

donde f es una función definida sobre $\mathbb{R}^n$ tal que ella y todas sus derivadas parciales tienen crecimiento polinomial y las h_i son funciones de $L^2([0,T])$.

Definición 5. *La derivada de un funcional suave F de la forma (10) es el proceso estocástico cuadrado integrable $DF = \{D_t F : t \in [0,T]\}$ dado por:*

$$D_t F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\int_0^T h_1(t) dW_t, \ldots, \int_0^T h_n(t) dW_t\right) h_i(t).$$

Observación. *Observe que la idea de esta definición es aplicar la regla de la cadena a la expresión dada en (10), lo cual justifica el nombre de derivada de este operador. Esto es, el i-ésimo sumando es*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\int_0^T h_1(t) dW_t, \ldots, \int_0^T h_n(t) dW_t\right)$$

multiplicado por la "derivada" de la integral $\int_0^T h_i(t) dW_t$. De hecho el operador D es una derivada en la dirección ω si Ω es el espacio canónico de Wiener (ver Nualart y Pardoux [18]).

Por otro lado, sean $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un sistema ortonormal de $L^2([0,T])$ y F un funcional suave de la forma

$$F = f\left(\int_0^T e_1(s) dW_s, \ldots, \int_0^T e_n(s) dW_s\right). \tag{11}$$

Entonces, la fórmula de integración por partes y la definición del operador D implican

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^T (D_s F) e_1(s) ds\right) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^T e_1(s) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) e_i(s) ds\right] \phi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \phi(x) dx = E\left(F \int_0^T e_1(s) dW_s\right), \end{aligned}$$

donde $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^2/2}$ y hemos usado el hecho de que el vector aleatorio

$$\left(\int_0^T e_1(s)dW_s, \ldots, \int_0^T e_n(s)dW_s\right)$$

tiene distribución normal estándar n-dimensional. Así se obtiene el siguiente resultado el cual es una fórmula de integración por partes:

Teorema 6. *Sea F un funcional suave de la forma (10) y $h \in L^2([0,T])$. Entonces*

$$E\left(\int_0^T (D_sF)h(s)ds\right) = E\left(F\int_0^T h(s)dW_s\right).$$

En la demostración de este resultado uno puede usar, sin pérdida de generalidad, que F tiene la forma (11) y que h es igual a e_1.

Una consecuencia de este resultado es que D es un operador cerrable de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega \times [0,T])$. Esto significa que si $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de funcionales suaves tales que $F_n \to 0$ en $L^2(\Omega)$ y $DF_n \to Y$ en $L^2(\Omega \times [0,T])$, entonces $Y = 0$. En lo que sigue denotaremos a la extensión cerrada $\overline{D}$ también por D. Por lo que ahora el dominio del operador D es el espacio $\mathbb{D}^{1,2}$ dado en la siguiente definición.

Definición 7. *Sea $\mathbb{D}^{1,2}$ la adherencia del conjunto de los funcionales suaves de la forma (10) con respecto a la seminorma*

$$||F||_{1,2} := \left[E(|F|^2) + E\int_0^T (D_sF)^2 ds\right]^{1/2}.$$

Observaciones. *a) El operador de derivada $D : \mathbb{D}^{1,2} \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega \times [0,T])$, con dominio $\mathbb{D}^{1,2}$, es un operador cerrado no acotado con dominio denso, y en consecuencia posee un operador adjunto, el cual es también un operador cerrado.*

b) De la definición de $\mathbb{D}^{1,2}$ se sigue que, $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, si y sólo si, existe una sucesión $\{F^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ de funcionales suaves de la forma (10), tal que $F^{(n)} \to F$ en $L^2(\Omega)$ y $DF^{(n)} \to Y$ en $L^2(\Omega \times [0,T])$. En tal caso se tiene $DF = Y$.

A continuación se verá la relación existente entre el operador de divergencia y la integral de Skorohod.

En primer lugar, observamos que de la descomposición en caos de las variables aleatorias cuadrado integrables y la relación (4), se puede obtener una caracterización del dominio del operador de derivada D. En efecto, se tiene el resultado siguiente:

Proposición 8. *Sea F una variable aleatoria cuadrado integrable con descomposición en caos dada por (7). Entonces $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, si y sólo si,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} nn! ||f_n||^2_{L^2([0,T]^n)} < \infty.$$

En tal caso,

$$D_t F = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(\cdot, t)). \tag{12}$$

Una consecuencia importante de este resultado es la siguiente proposición, la cual identifica el operador de divergencia (i.e., el adjunto de D dado por la igualdad (12)) con la integral de Skorohod y cuya demostración puede ser encontrada en [17].

Proposición 9. *Sea u un proceso estocástico en $L^2(\Omega \times [0,T])$ con descomposición en caos dada por (8). Entonces u pertenece al dominio del operador adjunto de D, si y sólo si,*

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)! ||\tilde{f}_m||^2_{L^2([0,T]^{m+1})} < \infty.$$

En tal caso,

$$D^*(u) = \sum_{m=0}^{\infty} I_{m+1}(\tilde{f}_n).$$

Observaciones. *i) La igualdad (9) implica que $D^* = \delta$.*

ii) Por definición del operador adjunto, el dominio de δ, denotado por Dom δ, es el conjunto de procesos $u \in L^2(\Omega \times [0,T])$ tal que

$$\left| E \int_0^T u_t D_t F dt \right| \leq C ||F||_{L^2(\Omega)},$$

para toda $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, donde C es una constante que sólo depende de u.

iii) Si $u \in \mathrm{Dom}\, \delta$ entonces $\delta(u)$ es el único elemento de $L^2(\Omega)$ tal que

$$E(F\delta(u)) = E\left(\int_0^T (D_t F) u_t dt \right), \quad F \in \mathbb{D}^{1,2}.$$

iv) Si h es una función determinística de $L^2([0,T])$, la variable cuadrado integrable $\delta(h)$ coincide con la integral de Itô de h con respecto a W debido a la fórmula de integración por partes. Además, si $u \in L^2(\Omega \times [0,T])$ es un proceso adaptado, también se tiene que $\delta(u)$ coincide con la integral de Itó de u.

Para terminar esta sección notemos que a W lo podemos ver como una familia gaussiana

$$W = \{W(h) : h \in L^2([0,T])\}, \tag{13}$$

donde $W(h) = \int_0^T h(s)dW_s$. En efecto, note que en este caso, la definición de la integral de Itô da

$$W = \{W(I_{[0,t]}) : t \in [0,T]\}.$$

Una propiedad importante de esta familia gaussiana centrada (i.e., con media cero) es que

$$E\left(W(h)W(g)\right) = \langle h, g\rangle_{L^2([0,T])},$$

lo cual implica que $L^2([0,T])$ es la cerradura de las funciones simples de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i I_{[0,t_i]}, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad t_i \in [0,T] \tag{14}$$

con respecto al producto interno

$$\langle I_{[0,t]}, I_{[0,s]}\rangle := E\left(W_t W_s\right). \tag{15}$$

La importancia de este hecho se verá mejor en la siguiente sección, y esto significa que la familia de integrandos deterministas con respecto a W es el espacio de Hilbert real separable $L^2([0,T])$ y que existe una isometría entre el espacio $L^2([0,T])$ y el espacio $\{W(h) : h \in L^2([0,T])\}$, que consiste de todas las integrales múltiples de orden 1 con respecto a W.

3 Integración estocástica con respecto al movimiento browniano fraccional.

En el caso del movimiento browniano estándar se vió que la expansión en caos de Wiener-Itô es un buen punto de partida para la definición y el estudio de la integral de Skorohod u operador de divergencia. Para poder tomar ventaja de este enfoque en el caso del movimiento browniano fraccional (mbf), se debe determinar un espacio de Hilbert real separable $\mathcal{H}$ de tal manera que el mbf pueda identificarse con un proceso gaussiano centrado $B^H = \{B^H(h), h \in \mathcal{H}\}$, como en (13), esto es, con una familia gaussiana centrada de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathcal{F}_T^H, P)$ tales que

$$E(B^H(h)B^H(h^*)) = \langle h, h^*\rangle_{\mathcal{H}}.$$

En lo que sigue veremos como se usa la existencia del espacio $\mathcal{H}$ para demostrar la validez de una descomposición en caos análoga a (7), donde ahora I_n sería la integral múltiple de orden n con respecto a B^H, y en consecuencia tener la definición de un operador de divergencia. Para más detalles se puede consultar el artículo de Nualart [19] y sus referencias.

Como antes $[0,T]$ es un intervalo de tiempo fijo y en lo que sigue $B^H = \{B_t^H : t \in [0,T]\}$ es un movimiento browniano fraccional con parámetro de Hurst $H \in (0,1)$, esto es, B^H es un proceso estocástico gaussiano centrado con función de covarianza dada por

$$R_H(t,s) := E(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}). \tag{16}$$

Supóngase que B^H está definido en un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathcal{F}_T^H, P)$ siendo $\mathcal{F}_T^H$ la σ–álgebra generada por el proceso estocástico B^H.

Sea ξ el conjunto de funciones de la forma (14). El espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ asociado a la covarianza R_H es definido como la adherencia de ξ con respecto al producto escalar:

$$\langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]} \rangle_{\mathcal{H}} := R_H(t,s).$$

La aplicación $1_{[0,t]} \mapsto B_t^H$ puede ser extendida a una isometría entre $\mathcal{H}$ y el espacio gaussiano H_1 asociado a B^H (i.e., la cerradura de la familia $\{\sum_{i=1}^n a_i B_{t_i}^H : a_i \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ y $t_i \in [0,T]\}$ en $L^2(\Omega)$). Para cualquier $\varphi \in \mathcal{H}$ se denota por $B^H(\varphi)$ a la imagen de φ en H_1 bajo esta isometría.

La descripción del espacio $\mathcal{H}$ depende de los valores del parámetro H. A saber, hay tres casos: $H \in (0,1/2)$, $H = 1/2$ y $H \in (1/2,1)$.

Cuando $H = 1/2$, B^H no es más que el moviminto browniano, lo cual es una consecuencia inmediata de (15) y (16). Por lo tanto, en este caso, $\mathcal{H}$ es el espacio $L^2([0,T])$, hecho que hemos usado en la Sección 2.

Para el caso $H < 1/2$, Pipiras y Taqqu [20] han demostrado que una función f pertenece a $\mathcal{H}$, si y sólo si, existe una única función $\varphi_f \in L^2([0,T])$ tal que

$$f(t) = c_H t^{\frac{1}{2}-H} \int_t^T \frac{u^{H-\frac{1}{2}} \varphi_f(u)}{(u-t)^{H+\frac{1}{2}}} du, \quad t \in [0,T], \tag{17}$$

donde c_H es una constante conveniente. La igualdad (17) implica que $\mathcal{H} \subset L^2([0,T])$ y observamos que su lado derecho es $c_H t^{\frac{1}{2}-H}$ multiplicado por la integral fraccionaria a la derecha de orden $\frac{1}{2} - H$ de la función $u \mapsto u^{H-\frac{1}{2}} \varphi_f(u)$, por lo que el cálculo fraccional (ver por ejemplo [24]) se ha convertido en una herramienta fundamental del cálculo estocástico basado en el mbf. Además, en este caso (i.e., $H \in (0,1/2)$), se tiene

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \varphi_f, \varphi_g \rangle_{L^2([0,T])}. \tag{18}$$

Si $H > 1/2$, también Pipiras y Taqqu [20] han indicado que varios autores han trabajado supuestamente con el espacio $\mathcal{H}$ sin tener cuidado si los espacios en cuestion son completos. Hasta el conocimiento de los autores de este artículo, el espacio $\mathcal{H}$ no ha sido caracterizado hasta ahora. Sin embargo, hay subespacios de $\mathcal{H}$ suficientemente ricos cuyos elementos son funciones y que han aprovechado varios autores, entre los cuales se encuentran Alòs et al. [1, 3], León y Tudor [14], entre otros. Un ejemplo de ésto es el espacio

$$|\mathcal{H}| = \left\{ f : [0,T] \to \mathbb{R} : \int_0^T \int_0^T |f(u)|\,|f(v)|\,|u-v|^{2H-2} du dv < \infty \right\},$$

provisto del producto interno

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}} = H(2H-1) \int_0^T \int_0^T f(u) f(v) |u-v|^{2H-2} du\, dv.$$

En particular, uno tiene ahora que $L^2([0,T]) \subset \mathcal{H}$.

Ahora podemos tratar la construcción de las integrales múltiples y la descomposición en caos de variables aleatorias cuadrado integrables.

Es bien conocido (ver [17] y sus referencias) que el mbf (con parámetro $H \in (0,1)$) también tiene la propiedad de descomposición en caos. Esto es, cada $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^H, P)$ admite una única representación en $L^2(\Omega)$ de la forma

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^{B^H}(f_n), \tag{19}$$

donde , para cada $n \geq 0$, f_n pertenece al producto tensorial simétrico $\mathcal{H}^{\odot n}$ de $\mathcal{H}$ (consultar Reed y Simon [22]), y $I_n^{B^H}(f_n)$ es la integral múltiple de f_n de orden n con respecto a B^H, la cual es la única variable aleatoria en $L^2(\Omega)$ que cumple

$$\begin{aligned} & E[I_n^{B^H}(f_n)(n_1)! H_{n_1}(B^H(e_{i_1})) \cdots (n_k)! H_{n_k}(B^H(e_{i_k}))] \\ &= \begin{cases} n! \langle f_n, e_{i_1}^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^{\otimes n_k} \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}}, & \text{si } \sum_{j=1}^{k} n_j = n, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \end{aligned} \tag{20}$$

Aquí $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortonormal de $\mathcal{H}$ y H_n es el polinomio de Hermite de orden n dado en (5).

Observe que (6), (17) y (18) implican en particular que si $H < 1/2$, entonces f pertenece a $\mathcal{H}^{\odot n}$, si y sólo si, existe una función simétrica $\varphi \in L^2([0,T]^n)$ tal que para todo $(t_1, \ldots, t_n) \in [0,T]^n$ se tiene

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} t_i^{\frac{1}{2}-H} \right) \int_{t_1}^{T} \cdots \int_{t_n}^{T} \frac{(\prod_{i=1}^{n} u_i^{H-\frac{1}{2}}) \varphi(u)}{\prod_{i=1}^{n} (u_i - t_i)^{H+\frac{1}{2}}} du.$$

También observe que las integrales múltiples $I_n^{B^H}$ no son en general integrales iteradas como en (3) pero se definen a partir de la relación (20) (compare con (4)).

Las integrales múltiples son operadores lineales tales que para $f \in (\mathcal{H})^{\otimes m}$ y $g \in (\mathcal{H})^{\otimes n}$, $I_m^{B^H}(f) = I_m^{B^H}(\widetilde{f})$ y

$$E[I_m^{B^H}(f) I_n^{B^H}(g)] = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad n \neq m, \\ m! \langle \widetilde{f}, \widetilde{g} \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes m}}, & \text{si} \quad n = m, \end{cases} \tag{21}$$

donde, como antes, $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ son las simetrizaciones de f y g, respectivamente.

Ahora estamos listos para dar el operador de divergencia δ^H con respecto al mbf, y se hace de manera análoga a la definición de la integral de Skorohod usando la descomposición en caos. A saber, uno puede demostrar que una variable aleatoria $u \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^H; \mathcal{H})$ tiene una única representación

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^{B^H}(u_n), \tag{22}$$

donde ahora $u_n \in \mathcal{H}^{\odot n} \otimes \mathcal{H}$ y para $h \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} &E[\langle I_n^{B^H}(u_n), h \rangle_{\mathcal{H}} (n_1)! H_{n_1}(B^H(e_{i_1})) \cdots (n_k)! H_{n_k}(B^H(e_{i_k}))] \\ &= \begin{cases} n! \langle u_n, e_{i_1}^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^{\otimes n_k} \otimes h \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes (n+1)}}, & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{k} n_j = n, \\ 0, & \text{caso contrario}, \end{cases} \end{aligned}$$

donde estamos usando la notación de (20). Así hemos llegado al siguiente concepto:

Definición 10. *Sea $u \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^H; \mathcal{H})$ con expansión en caos dada por (22). Se dice que u está en el dominio de δ^H, denotado Dom δ^H, si y sólo si,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}^{B^H}(\tilde{u}_n)$$

converge en $L^2(\Omega)$. Esto es (ver (21)),

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! ||\tilde{u}_n||^2_{\mathcal{H}^{\otimes (n+1)}} < \infty.$$

En tal caso se define el operador de divergencia δ^H de u con respecto a B^H como la variable aleatoria cuadrado integrable

$$\delta^H(u) := \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}^{B^H}(\tilde{u}_n).$$

El dominio del operador δ^H ha sido extendido por Cheridito y Nualart [5] en el caso que $H < 1/2$.

Como en el caso browniano (i.e., $H = 1/2$), la segunda forma de definir al operador δ^H es por medio del operador de derivada con respecto a mbf B^H, lo cual señalaremos para terminar este artículo.

Sea $\mathcal{S}^H$ el conjunto de todas las variables aleatorias F de la forma

$$F = f(B^H(\phi_1), \ldots, B^H(\phi_n)),$$

donde $n \neq 1$, $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ (el conjunto de todas las funciones definidas sobre $\mathbb{R}^n$ tales que la función y todas sus derivadas parciales tienen crecimiento polinomial), y $\phi_i \in \mathcal{H}$.

Definición 11. *Sea $F \in \mathcal{S}^H$. Se define la derivada de F como la variable aleatoria $D^{B^H}F$ con valores en $\mathcal{H}$ dada por*

$$D^{B^H}F = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(B^H(\phi_1), \ldots, B^H(\phi_n))\phi_j.$$

De manera análoga a como ocurre en el caso del movimiento browniano estándar, se tiene que el operador derivada D^{B^H} es un operador cerrable de $L^p(\Omega)$ en $L^p(\Omega; \mathcal{H})$ para cualquier $p \geq 1$, y que el operador adjunto de la extensión cerrada de D coincide con el operador de divergencia δ^H. Esto está resumido en el siguiente resultado.

Proposición 12. *Sea $u \in L^2(\Omega; \mathcal{H})$. Entonces $u \in Dom\ \delta^H$, si y sólo si, existe una única variable aleatoria $D^*(u)$ en $L^2(\Omega)$ tal que*

$$E\left(FD^*(u)\right) = E\left(\langle D^{B^H}F, u\rangle_{\mathcal{H}}\right).$$

En este caso

$$D^*(u) = \delta^H(u).$$

Agradecimientos

La autora fue parcialmente apoyada por el proyecto DIB 803890 y el autor fue parcialmente apoyado por el proyecto CONACyT 45684-F. Los autores agradecen al árbitro de la revista por sus valiosas observaciones.

Referencias

[1] Alòs, E.; León, J.A. y Nualart, D. Stratonovich stocastic calculus with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter less that 1/2, *Taiwanese J. Math.* **5**, 2001, 609–632.

[2] Alòs, E.; Mazet, O. y Nualart, D. Stochastic calculus with respect to gaussian processes, *The Annals of Probability* **29**(2), 2001, 766–801.

[3] Alòs, E. y Nualart, D. Stochastic integration with respect to the fractional Brownian motion. *Stoch. Stoch. Rep.* **75**(3), 2003, 129–152.

[4] Carmona, P.; Coutin, L. y Montseny, G. Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion, *Ann. Inst. H. Poincaré* **39**, 2003, 27–68.

[5] Cheridito, P. y Nualart, D. Stochastic integral of divergence type with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter $H \in (0, \frac{1}{2})$, preimpreso, 2002.

[6] Coutin, L. y Qian, Z. Stochastic analysis rough path analysis, and fractional Brownian motions, *Probab. Theory Related Fields* **122**, 2002, 108–140.

[7] Dai, W. y Heyde, C.C. Itô's formula with respect to fractional Brownian motion and its application, *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* **9**(4), 1996, 439–448.

[8] Decreusefond, L. y Üstünel, A.S. Stochastic analysis of the fractional Brownian motion, *Potential Anal.* **10**, 1999, 177–214.

[9] Doob, J.L. *Stochastic Processes*, John Wiley, 1953.

[10] Duncan,T.E.; Hu, Y. y Pasik-Duncan, B. Stochastic calculus for fractional Brownian motion I. Theory, *SIAM J. Control Optim.* **38**, 2000, 582–612.

[11] Itô, K. Multiple Wiener integrals, *J. Math. Soc. Japan* **3**, 1951, 157–169.

[12] K. Itô, Stochastic integral, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **20**, 1944, 519–524.

[13] León, J.A.; Navarro, R. y Nualart, D. An anticipating calculus approach to the utility maximization of an insider. En *Conference on Applications of Malliavin Calculus in Finance (Rocquencourt, 2001). Math. Finance* **13**(1), 2003, 171–185.

[14] León, J.A. y Tudor, C. Semilinear fractional stochastic differential equations, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **8**(2), 2002, 205–226.

[15] Lin, S.J. Stochastic analysis of fractional Brownian motions, *Stochastics Stochastics Rep.* **55**(1-2), 1995, 121–140.

[16] Mandelbrot, B.B. y Van Ness, J.W. Fractional Brownian motions, fractional noisses and applications, *SIAM Rev.* **10**, 1968, 422–437.

[17] Nualart, D. *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Springer, New York, 1995.

[18] Nualart, D. y Pardoux, E. Stochastic calculus with anticipating integrands. *probab. Theory Rel. Fields* **78**, 1988, 535–581.

[19] Nualart, D. Stochastic integration with respecto to fractional Brownian motion and applications, *Strochastic Models*. En Contemp. Math. **336**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, 3–39. Contemporary Mathematics.

[20] Pipiras, V. y Taqqu, M.S. Are classes of deterministic integrands for fractional Brownian motion on an interval complete?, *Bernoulli* **7**(6), 2001, 873–897.

[21] Protter, P. *Stochastic Integration and Differential Equations: A New approach*, Springer-Verlag, 1990.

[22] Reed, M. y Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1972.

[23] Ruzmaikina, A.A. Stieltjes integrals of Hölder continuous functions with applications to fractionl Brownian motion, *J. Statist. phys.* **100**, 2000, 1049–1069.

[24] Samko, S.G.; Kilbas, A.A. y Marichev, O.I. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach, 1993.

[25] Skorohod, A.V. On a generalization of a stochastic integral. *Theory Probab. Appl.* **20**, 1975, 219-233.

[26] Young, L.C. An inequality of the Hölder type connected with Stieltjes integration, *Acta Math.* **67**, 1936, 251–282.

[27] Zähle, M. Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus I, *Probab. Theory Related Fields* **111**, 1998, 333–374.

Dirección de los autores: Liliana Blanco, Departamento de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Ciudad Universitaria, Bogotá, D.C., Colombia. lblancoc@unal.edu.co — Jorge A. León Cinvestav-IPN, Depto. de Control Automático, Apartado Postal 14–740, 07000 México, D.F. jleon@ctrl.cinvestav.mx