Vol. XI, № 1,2 Dic. (2003)
Matemáticas: 57–71

**Matemáticas:
Enseñanza Universitaria**

Normas tensoriales construidas mediante espacios de sucesiones de Banach

Patricia Gómez Palacio,
Juan Antonio López Molina, , María José Rivera Ortún, ,

Resumen

En este artículo se define una norma tensorial g_λ^c a partir de un espacio de sucesiones de Banach λ. Para cada par de espacios de Banach E y F, se caracterizan los elementos de la compleción del espacio $E \otimes_{g_\lambda} F$, $E\widehat{\otimes}_{g_\lambda}F$, y se caracteriza su espacio dual $(E \otimes_{g_\lambda} F)'$

Palabras y frases claves: Retículos de Banach, espacios de sucesiones, ideales de operadores, productos tensoriales

1 Introducción

En la teoría general de productos tensoriales, cuyos antecedentes los encontramos en el trabajo de Grothendieck de los años cincuenta pero que cobró mayor fuerza en 1968 con la publicación del artículo de Lindenstrauss y Pelzynski *Absolutely summing operators in L_p-spaces and applications*, se destacan entre los ejemplos más relevantes de normas tensoriales aquellas que se definen en la clase de espacios de dimensión finita y después se extienden a la clase de los espacios normados utilizando un procedimiento inductivo, lo que da lugar a las normas tensoriales finitamente generadas.

El problema de definir topologías interesantes sobre los productos tensoriales se ha centrado a través de la historia en la utilización de espacios de sucesiones para la definición de las mismas, dando como resultado normas tensoriales finitamente generadas. En particular, la teoría clásica estudia las normas tensoriales definidas mediante los espacios de sucesiones ℓ_p, y entre ellas se destacan las de Lapresté (α_{pq}), de las cuales las normas tensoriales g_p de Saphar son un caso particular.

[1]La participación del primer autor en este trabajo es apoyada por el proyecto COLCIENCIAS-Universidad Eafit código: 1216-05-11456 y la de los otros dos autores por MCYT y FEDER proyecto BFM2001-2670.

Tomando como motivación la definición de las normas tensoriales g_p de Saphar, contruimos una norma tensorial g_λ definida sobre un determinado espacio de sucesiones de Banach λ, con el objetivo de desarrollar toda la teoría básica y clásica referente a los ideales de operadores asociados, y presentar resultados similares a los conocidos acerca de las normas tensoriales g_p, ver [1], [3] o [2].

Hemos procurado que la notación utilizada sea la comúnmente aceptada. Por el símbolo $\mathbb{R}$ representaremos el cuerpo de los números reales, sobre el cual se definen todos los espacios vectoriales topológicos que aparecen. En general la palabra espacio hará referencia a un espacio de Banach real, a menos que se indique otra cosa. Dado un espacio E denotaremos por B_E a su bola unidad cerrada, y por E' denotaremos su dual topológico. Si E es un espacio normado, denotaremos por $\widehat{E}$ al espacio de Banach que resulta de la complección de E. Con el símbolo $\|\cdot\|_E$, o simplemente $\|\cdot\|$ si no hay lugar a confusión, denotaremos la norma definida en el mismo espacio E, como es usual. Dados dos espacios E y F, denotamos por $\mathcal{L}(E,F)$ al espacio de operadores lineales y continuos de E en F.

Dado un espacio de Banach X parcialmente ordenado diremos que X es *retículo de Banach* si se tiene que:

1. $x \leq y$ implica $x+z \leq y+z$, para todo $x, y, z \in X$,
2. $ax \geq 0$, para todo $x \geq 0$ en X y todo real no negativo a.
3. Para todo par $x, y \in X$ existen en X una mínima cota superior (m.c.s) $x \vee y$, y una máxima cota inferior (m.c.i) $x \wedge y$,
4. $\|x\| \leq \|y\|$ siempre que $|x| \leq |y|$, donde el valor absoluto $|x|$ de $x \in X$ está definido por $|x| = x \vee (-x)$.

Denotamos por ω el espacio vectorial de todas las sucesiones escalares y por φ el subespacio de ω formado por las sucesiones tales que el cardinal de las coordenadas distintas de cero es finito.

Diremos que un espacio de Banach $(\lambda, \|\cdot\|_\lambda)$ es un *espacio de sucesiones de Banach* si satisface:

1. $\varphi \subset \lambda \subset \omega$
2. Si $|x| \leq |y|$ con $x \in \omega$ y $y \in \lambda$ entonces $x \in \lambda$ y $\|x\|_\lambda \leq \|y\|_\lambda$

Obsérvese que todo espacio de sucesiones de Banach λ dotado con el orden puntual es un retículo de Banach. Decimos que un espacio de sucesiones λ es regular si la sucesión de vectores unidad $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$, donde $e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^{\infty}$, es una base de Schauder en λ. En este caso, λ satisface la propiedad de la convergencia seccional, es decir, dada una sucesión $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ en λ se verifica la siguiente igualdad en la norma de λ

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Denotamos por h_λ a la clausura en λ del espacio φ, $h_\lambda = \overline{\varphi}^\lambda$. Entonces h_λ es un subespacio regular de λ, y se tiene que λ es regular si y sólo si $\lambda = h_\lambda$. Un retículo de Banach λ es *orden continuo* si $\|x\|_\lambda \downarrow 0$ cada vez que $0 \leq x_n \downarrow 0$, lo que es equivalente a que su dual topológico λ' coincida con su dual Köthe

$$\lambda^\times = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \omega / \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \text{ converge para todo } (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \lambda\}$$

Los espacios de sucesiones clásicos ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$, los espacios de sucesiones de Orlicz ℓ_M y los espacios de sucesiones de Lorentz ℓ_{pq}, $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ son ejemplos de espacios de sucesiones de Banach, ver [4].

2 Normas tensoriales e ideales de operadores. Conceptos básicos

En esta sección introducimos los conceptos de norma tensorial e ideal de operadores, y establecemos algunas relaciones entre éstos y entre las normas tensoriales asociadas a una norma tensorial dada. Un tratamiento más detallado de este tema puede encontrarse en el texto [1].

2.4 Normas tensoriales

Dados E y F espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, denotamos por $B(E,F)$ el espacio vectorial de las formas bilineales definidas de $E \times F$ en $\mathbb{R}$. Cada elemento $(x,y) \in E \times F$ define una forma lineal canónica sobre $B(E,F)$, denotada por $x \otimes y$, mediante la fórmula $\langle x \otimes y, \psi \rangle := \psi((x,y))$ para toda $\psi \in B(E,F)$. El subespacio vectorial del dual algebraico de $B(E,F)$ generado por el conjunto las formas lineales $\{x \otimes y : x \in E,\ y \in F\}$ es el *producto tensorial* de los espacios E y F, y se le denota por $E \otimes F$.

A los elementos de $E \otimes F$ los denominamos tensores y estos admiten una representación de la forma $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$.

Si el espacio $E \otimes F$ está dotado de una norma α, denotamos por $E \otimes_\alpha F$ al correspondiente espacio normado, por $E \widehat{\otimes}_\alpha F$ a su espacio complección, y por $\alpha\,(z; E, F)$, o simplemente por $\alpha(z)$, a la norma α de un elemento $z \in E \otimes F$.

Definición 2.1. *Una* norma tensorial α *es un functor que asocia a cada par de espacios normados E y F una norma sobre $E \otimes F$, y satisface las siguientes condiciones:*

i) $\alpha(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$ *y* $\alpha(x' \otimes y') = \|x'\| \|y'\|$, *para* $x \in E$, $y \in F$, $x' \in E'$, $y' \in F'$.

ii) Para cualquier cuádrupla de espacios normados E_i, F_i, $i = 1, 2$, y cualquier par de operadores $A_i \in \mathcal{L}(E_i, F_i)$, se satisface la Propiedad métrica de los operadores:

$$A_1 \otimes A_2 \in \mathcal{L}(E_1 \otimes_\alpha E_2, F_1 \otimes_\alpha F_2), \quad \textit{con} \quad \|A_1 \otimes A_2\| \leq \|A\| \|B\|$$

$$\textit{donde } (A_1 \otimes A_2)(x_1 \otimes x_2) := A_1(x_1) \otimes A_2(x_2)$$

Dada una norma tensorial α, definimos su norma tensorial *transpuesta*, α^t por,

$$\alpha^t(z; E, F) := \alpha(z^t; F, E)$$

donde $z^t = \left(\sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k\right)^t := \left(\sum_{k=1}^n y_k \otimes x_k\right)$

Para introducir el concepto de norma tensorial finitamente generada, necesitamos establecer la siguiente notación. Dado un espacio de Banach E, denotamos por $FIN(E)$ al conjunto de los subespacios de dimensión finita de E, y por $COFIN(E)$ al conjunto de los subespacios de E de codimensión finita. Si M es un subespacio cerrado de E, denotamos por $I_M^E : M \to E$, $Q_M^E : E \to E/M$ a la inclusión y la aplicación cociente canónicas respectivamente.

Definición 2.2. *Dada una norma tensorial α, definimos la norma tensorial $\overrightarrow{\alpha}$ en una clase de los espacios normados, o* envoltura finitamente generada *por α, por:*

$$\overrightarrow{\alpha}(z) := \inf\{\alpha(z; M, N) : M \in FIN(E), N \in FIN(F)\}$$

De manera similar definimos la norma tensorial $\overleftarrow{\alpha}$, o envoltura cofinitamente generada *por α, por*

$$\overleftarrow{\alpha}(z) := \sup\{\alpha((Q_H^E \otimes Q_G^F)(z)) : H \in COFIN(E), G \in COFIN(F)\}$$

Definición 2.3. *Diremos que una norma tensorial α es* finitamente generada*(resp.* cofinitamente generada*) si $\alpha = \overrightarrow{\alpha}$ (resp. $\alpha = \overleftarrow{\alpha}$).*

En general, para toda norma tensorial α se satisface la siguiente desigualdad

$$\overleftarrow{\alpha} \leq \alpha \leq \overrightarrow{\alpha}$$

Sea α una norma tensorial en la clase de espacios normados. Dados M un espacio de dimensión finita y F un espacio normado arbitrarios, decimos que α es *accesible* si $\overleftarrow{\alpha}(\cdot; M, F) = \overrightarrow{\alpha}(\cdot; M, F)$ y $\overleftarrow{\alpha}(\cdot; F, M) = \overrightarrow{\alpha}(\cdot; F, M)$ y que es *totalmente accesible* si $\overleftarrow{\alpha} = \overrightarrow{\alpha}$, es decir si α es finita y cofinitamente generada.

A partir de una norma tensorial α, definida en la clase de espacios normados que contiene a los espacios de dimensión finita (FIN), se define su norma tensorial dual α' como sigue. Para $M, N \in FIN$ α'_f, definida por

$$\alpha'_f(z; M, N) := \sup\{|\langle u, z\rangle| : \ \alpha(u; M', N') \leq 1\}$$

para todo $z \in M \otimes N$ es una norma tensorial sobre FIN.

Se define la *norma tensorial dual*, α', de la norma tensorial α (definida sobre en la clase de espacios normados que contiene a FIN), como la envoltura finitamente generada de la norma tensorial α'_f, $\overrightarrow{\alpha'_f}$.

Es claro que $\alpha' = \alpha'_f$ en FIN, y por consiguiente, para todos los $N, M \in FIN$ la igualdad $M \otimes_{\alpha'} N = (M' \otimes_\alpha N')'$ se satisface isométricamente. Se puede ver además que si α es finitamente generada entonces $\alpha'' = \alpha$

2.5 Ideales de operadores

Como se pone de manifiesto en el libro de A. Defant y K. Floret, *Tensor norms and operator ideals*, [1], la teoría topológica de los productos tensoriales está estrechamente ligada a la de los espacios de operadores. Esta última fue desarrollada por A. Pietsch y su escuela en los años sesenta y setenta, y sus resultados fueron publicados en el texto *Operator ideals*, [6]. A continuación fijamos la notación y recordamos los conceptos básicos más representativos de la teoría de operadores que utilizaremos.

Definición 2.4. *Un* ideal de operadores *(o, simplemente,* ideal*) entre espacios de Banach es un functor $\mathfrak{I}$ que asocia a cada par de espacios de Banach E y F un subconjunto $\mathfrak{I}(E, F)$ de $\mathcal{L}(E, F)$ (llamado* componente *de $\mathfrak{I}$), de manera tal que se cumplen las siguientes condiciones, para espacios de Banach arbitrarios E, F, G y H:*

i) $x' \otimes y \in \mathfrak{I}(E, F)$, *para* $x' \in E'$, $y \in F$.

ii) *Si* $S_1, S_2 \in \mathfrak{I}(E, F)$, *entonces* $S_1 + S_2 \in \mathfrak{I}(E, F)$.

iii) *Si* $T \in \mathcal{L}(G, E), S \in \mathfrak{I}(E, F)$, *y* $R \in \mathcal{L}(F, H)$, *entonces* $RST \in \mathfrak{I}(G, H)$.

Es claro de los numerales i), ii) de la definición, que todas las componentes $\mathfrak{I}(E,F)$ son espacios lineales. Ver [6, p.45]

Sea $\mathfrak{I}$ un ideal y a un functor que asocia a cada componente $\mathfrak{I}(E,F)$ una norma (denotada también por a), que cumple:

iv) Para $T \in \mathcal{L}(G,E), S \in \mathfrak{I}(E,F), R \in \mathcal{L}(F,H),\ a(R \circ S \circ T) \leq \|R\|\, a(S)\, \|T\|$.

A la pareja $(\mathfrak{I}, a)$ la llamaremos *ideal normado*.

Un ideal de operadores $(\mathfrak{I}, a)$, tiene asociados diferentes ideales entre los que destacamos el ideal maximal, concepto análogo al de norma tensorial finitamente generada, y el ideal minimal, los cuales definimos a continuación.

El *ideal maximal asociado* a $(\mathfrak{I}, a)$, $(\mathfrak{I}^{max}, a^{max})$, es el ideal tal que dados E y F, un par de espacios de Banach, un operador $T : E \to F \in \mathfrak{I}^{max}(E,F)$ siempre y que

$$a^{max}(T) := \sup\left\{a(Q_L^F.T.I_M^E) : M \in \mathrm{FIN}(E), L \in \mathrm{COFIN}(F)\right\} < \infty$$

La función a^{max} es una norma en cada componente y $(\mathfrak{I}^{max}, a^{max})$ es un ideal normado.

El *ideal minimal asociado* a $(\mathfrak{I}, a)$, $(\mathfrak{I}^{min}, a^{min})$, es el ideal tal que para todo par de espacios normados E, F, $T : E \to F \in \mathfrak{I}^{min}(E,F)$, siempre que existan espacios normados G, H y operadores aproximables $S : E \to G$, $R : H \to F$ y $T_0 : G \to H \in \mathfrak{I}(G,H)$ tales que $T = R \circ T_0 \circ S$.

Si $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}^{max}$ ($\mathfrak{I} = \mathfrak{I}^{min}$), $\mathfrak{I}$ es un *ideal maximal (minimal)*.

Un ideal maximal $\mathfrak{I}$ está asociado a una norma tensorial finitamente generada α, escribimos $\mathfrak{I} \sim \alpha$, si para cualquier par de espacios (M,N) de dimensión finita, se tiene que: $\mathfrak{I}(M,N) = M' \otimes_\alpha N = (M \otimes_{\alpha'} N')'$

La extensión de esta igualdad a espacios de dimensión infinita es el importante *teorema de representación para ideales de operadores maximales*, de acuerdo con el cual, si $(\mathfrak{I}, a)$ es un ideal maximal asociado a una norma tensorial finitamente generada α, es decir $\mathfrak{I} \sim \alpha$, entonces para todo par de espacios de Banach E y F las relaciones $\mathfrak{I}(E,F') = (E \otimes_{\alpha'} F)'$ y $\mathfrak{I}(E,F) = (E \otimes_{\alpha'} F')' \cap \mathcal{L}(E,F)$ se satisfacen isométricamente.

3 Sobre la norma tensorial g_λ

En esta sección, a partir de un espacio de Banach de sucesiones λ, sobre el cual impondremos en su momento determinadas condiciones, definimos una norma tensorial cuya motivación inicial viene dada por la definición de las normas tensoriales de Saphar.

En adelante, λ será un espacio de Banach de sucesiones en el cual se satisface la igualdad $\|\mathbf{e}_i\|_\lambda = \|\mathbf{e}_i\|_{\lambda^\times} = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Dado un espacio de Banach E, una sucesión $(x_i)_{i=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$ es fuertemente $\lambda-$sumable si $\pi_\lambda((x_i)) : = \|(\|x_i\|)\|_\lambda < \infty$ y es débilmente λ-sumable si $\varepsilon_\lambda((x_i)) : = \sup_{\|x'\|\leq 1} \|(|\langle x_i, x'\rangle|)\|_\lambda < \infty$. Denotamos por $\lambda[E]$ (resp. $\lambda(E)$) el espacio de todas las sucesiones fuertemente (resp. débilmente) λ-sumables en E dotado con la norma $\pi_\lambda(.)$ (resp. $\varepsilon_\lambda(.)$).

Sean E, F espacios de Banach. Una forma natural de extender la norma tensorial de Saphar a una norma tensorial sobre $E \otimes F$, pero con parámetro λ, se logra con la definición del siguiente funcional, para todo $z \in E \otimes F$,

$$g_\lambda(z; E, F) := \inf\{\pi_\lambda((x_i))\varepsilon_{\lambda^\times}((y_i)) \ : \ z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\} \tag{1}$$

Éste coincide con g_p cuando $\lambda = \ell_p, 1 \leq p < \infty$. Sin embargo, puede verse que para espacios de Banach de sucesiones más generales, como por ejemplo un espacio de Orlicz de sucesiones, tal funcional no es una norma tensorial. Por lo anterior, consideramos el funcional de Minkowski de la envolvente absolutamente convexa de la bola unidad de g_λ en $E \otimes F$ ($B_{g_\lambda} := \{z \in E \otimes F : g_\lambda(z) \leq 1\}$), que denotamos por g_λ^c, y puede ser evaluado como

$$g_\lambda^c\,(z; E, F) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \pi_\lambda\left((x_{ij})\right)\varepsilon_{\lambda^\times}\left((y_{ij})\right)\right\} \tag{2}$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las representaciones de z de la forma $z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell_i} x_{ij} \otimes y_{ij}$.

Hay que hacer notar que g_λ y g_λ^c coinciden en el caso en que g_λ sea una norma. En la proposición que sigue a continuación demostraremos que g_λ es efectivamente una norma tensorial.

Proposición 3.1. *g_λ es una norma tensorial.*

Demostración. Para la demostración utilizamos un criterio equivalente a la definición de norma tensorial, según el cual basta verificar las siguiente condiciones:

1. $g_\lambda^c\,(\cdot; E, F)$ es una seminorma en $E \otimes F$ para todo $E, F \in$ NORM.
2. $g_\lambda^c\,(1 \otimes 1; \mathbb{R}, \mathbb{R}) = 1$.
3. g_λ^c cumple la propiedad métrica de las aplicaciones en NORM. Aquí NORM denota la clase de los espacios normados.

1. Para probar que g_λ^c es una seminorma en $E\otimes F$ basta verificar que g_λ^c satisface la desigualdad triangular, ya que por definición es claro que $g_\lambda^c(z;E,F)\geq 0$ y que $g_\lambda^c(\beta z;E,F)=|\beta|g_\lambda^c(z;E,F)$.

Dados $\epsilon>0$ y $z_1,\ z_2\in E\otimes F$, con $z_k=\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{\ell_i}x_{ij}^k\otimes y_{ij}^k$ para $k=1,2$, representaciones que satisfacen la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n_k}\pi_\lambda\left(\left(x_{ij}^k\right)\right)\varepsilon_{\lambda^\times}\left(\left(y_{ij}^k\right)\right)\leq g_\lambda^c\left(z_k;E,F\right)+\frac{\epsilon}{2},$$

z_1+z_2 admite una representación $z_1+z_2=\sum_{i=1}^{n_1+n_2}\sum_{j=1}^{\ell_i}u_{ij}\otimes v_{ij}$ donde $u_{ij}=x_{ij}^1$ y $v_{ij}=y_{ij}^1$ si $1\leq i\leq n_1$, y $u_{ij}=x_{ij}^2$ y $v_{ij}=y_{ij}^2$ si $n_1+1\leq i\leq n_1+n_2$. Con lo cual,

$$\begin{aligned}
g_\lambda^c\left(z_1+z_2;E,F\right) &\leq \sum_{i=1}^{n_1}\pi_\lambda\left(\left(x_{ij}^1\right)\right)\varepsilon_{\lambda^\times}\left(\left(y_{ij}^1\right)\right)\\
&\quad+\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}\pi_\lambda\left(\left(x_{ij}^2\right)\right)\varepsilon_{\lambda^\times}\left(\left(y_{ij}^2\right)\right)\\
&\leq g_\lambda^c\left(z_1;E,F\right)+g_\lambda^c\left(z_2;E,F\right)+\epsilon
\end{aligned}$$

y como $\epsilon>0$ es arbitrario, se obtiene el resultado esperado.

2. Si $E=\mathbb{K}$, $E'=\mathbb{K}$, entonces $\{\beta\in E':\|\beta\|\leq 1\}=\{\beta\in\mathbb{K}:|\beta|\leq 1\}$ y $\langle\alpha,\beta\rangle=\alpha\beta$. Luego para $z\in\mathbb{K}\otimes\mathbb{K}$, con $z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\alpha_{ij}\otimes\beta_{ij}$ se tiene que:

$$\varepsilon_{\lambda^\times}((\beta_{ij}))\leq\sup_{\|y'\|_{E'}\leq 1}|y'|\|(|\beta_{ij}|)\|_{\lambda^\times}\leq\|(|\beta_{ij}|)\|_{\lambda^\times}$$

Pero $\|(|\beta_{ij}|)\|_{\lambda^\times}\leq\varepsilon_{\lambda^\times}((\beta_{ij}))$, ya que $y'=1$ es uno de los valores admisibles en la definición de $\varepsilon_{\lambda^\times}((\beta_{ij}))$, con lo cual $\|(|\beta_{ij}|)\|_{\lambda^\times}=\varepsilon_{\lambda^\times}((\beta_{ij}))$. De lo anterior, con $\varepsilon_{\lambda^\times}((1,0,0,0,...))=\|(1,0,0,0,...)\|_{\lambda^\times}=1$ y dado que $\pi_\lambda((1,0,0,0,...))=\|(1,0,0,0,...)\|_\lambda=1$, se sigue que

$$g_\lambda^c\left(1\otimes 1;\mathbb{K},\mathbb{K}\right)\leq\pi_\lambda\left((1,0,...,0)\right)\varepsilon_{\lambda^\times}\left((1,0,...,0)\right)=1.$$

De otro lado, si $1\otimes 1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell_i}\alpha_{ij}\otimes\beta_{ij}$ es una representación arbitraria de $1\otimes 1$, entonces

$$1=|\langle 1\otimes 1,\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell_i}\alpha_{ij}\otimes\beta_{ij}\rangle|=|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell_i}\alpha_{ij}\beta_{ij}|\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell_i}|\alpha_{ij}\beta_{ij}|$$

que es menor o igual que $\sum_{i=1}^{n}\|(|\alpha_{ij}|)\|_\lambda\|(|\beta_{ij}|)\|_{\lambda^\times}$, por la desigualdad de Hölder. En consecuencia $1\leq\sum_{i=1}^{n}\pi_\lambda\left((\alpha_{ij})\right)\varepsilon_{\lambda^\times}\left((\beta_{ij})\right)$. Con lo cual, al tomar el ínfimo sobre todas las representaciones de $1 \otimes 1$, se sigue la igualdad esperada $g_\lambda^c(1 \otimes 1; \mathbb{R}, \mathbb{R}) = 1$.

3. Finalmente, veamos que g_λ^c satisface la propiedad métrica de las aplicaciones. Sean $A \in \mathcal{L}(E_1, F_1)$ y $B \in \mathcal{L}(E_2, F_2)$ y consideremos la aplicación $A \otimes B : E_1 \otimes_{g_\lambda^c} E_2 \to F_1 \otimes_{g_\lambda^c} F_2$.

Consideramos el caso $\|B\| \neq 0$, ya que el resultado es inmediato en el caso contrario. Para cada representación $z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\ell_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \in E_1 \otimes E_2$, dado que $\|\frac{B'(y')}{B'}\| \leq \frac{\|B'\|\|y'\|}{\|B'\|} \leq 1$ para $y' \in B_{F'}$ y $\|B'\| = \|B\|$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\lambda^\times}((B(y_{ij}))) &= \sup_{y' \in B_{F_2'}} \|(|\langle B(y_{ij}), y' \rangle|)\|_{\lambda^\times} \\
&= \sup_{y' \in B_{F_2'}} \|(|\langle y_{ij}, B'(y') \rangle|)\|_{\lambda^\times} \\
&= \|B'\| \sup_{y' \in B_{F_2'}} \|(|\langle y_{ij}, \frac{B'(y')}{\|B'\|} \rangle|)\|_{\lambda^\times} \\
&\leq \|B\| \varepsilon_{\lambda^\times}((y_{ij}))
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
g_\lambda^c((A \otimes B)(z); F_1, F_2) &\leq \sum_{i=1}^n \pi_\lambda((A(x_{ij}))) \varepsilon_{\lambda^\times}((B(y_{ij}))) \\
&= \|A\| \|B\| \sum_{i=1}^n \pi_\lambda((x_{ij})) \varepsilon_{\lambda^\times}((y_{ij}))
\end{aligned}$$

y, tomando ínfimos sobre las distintas representaciones de z, se sigue que

$$g_\lambda^c((A \otimes B)(z); F_1, F_2) \leq \|A\| \|B\| g_\lambda^c(z; E_1, E_2)$$

con lo cual

$$\|A \otimes B\| = \sup_{z \in B_{E_1 \otimes_{g_\lambda^c} E_2}} g_\lambda^c((A \otimes B)(z); F_1, F_2) \leq \|A\| \|B\|$$

que es lo que queríamos demostrar. □

El siguiente teorema da una caracterización de los elementos de la complección del espacio $E \otimes_{g_\lambda} F$ mediante una serie doble convergente.

Teorema 3.2. *Todo elemento de* $E \widehat{\otimes}_{g_\lambda^c} F$ *admite una representación de la forma* $z = \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty x_{ij} \otimes y_{ij}$ *donde* $\{(x_{ij})_{j=1}^\infty : i \in \mathbb{N}\} \subset h_\lambda[E]$ *y*

$\{(y_{ij})_{j=1}^{\infty} : i \in \mathbb{N}\} \subset \lambda^{\times}(F)$ *con*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_{h_\lambda}\left((x_{ij})\right) \varepsilon_{\lambda^\times}\left((y_{ij})\right) < \infty \tag{3}$$

Además

$$g_\lambda^c(z) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \pi_{h_\lambda}\left((x_{ij})\right) \varepsilon_{\lambda^\times}\left((y_{ij})\right)\right\} \tag{4}$$

tomando el ínfimo sobre todas las series que cumplan la condición (3).

Demostración. Veamos primero que cualquier serie del tipo mencionado es convergente en $E\widehat{\otimes}_{g_\lambda^c}F$ y por tanto define un elemento de la compleción.

En efecto, observar que la condición (3) implica que para cada $i \in \mathbb{N}$ $\pi_{h_\lambda}((x_{ij}))$ y $\varepsilon_{\lambda^\times}((y_{ij}))$ son finitos, y entonces de la propiedad de convergencia seccional en $h_\lambda[E]$ se tiene que dado $\epsilon > 0$, existe $m_i \in \mathbb{N}$, tal que $\pi_{h_\lambda}((x_{ij})_{j=m_i+1}^{\infty}) < \frac{\epsilon}{\varepsilon_{\lambda^\times}((y_{ij}))}$ y como $\varepsilon_{\lambda^\times}((y_{ij})_{j=m_i+1}^{\infty}) \leq \varepsilon_{\lambda^\times}((y_{ij}))$ se tiene que

$$\pi_{h_\lambda}\left((x_{ij})_{j=m_i+1}^{\infty}\right) \varepsilon_{\lambda^\times}\left((y_{ij})_{j=m_i+1}^{\infty}\right) < \epsilon$$

con lo cual, si $m_i \leq m < n$, entonces

$$\begin{aligned} g_\lambda^c\left(\sum_{j=m+1}^{n} x_{ij} \otimes y_{ij}\right) &\leq \pi_{h_\lambda}\left((x_{ij})_{j=m+1}^{n}\right) \varepsilon_{\lambda^\times}\left((y_{ij})_{j=m+1}^{n}\right) \\ &\leq \pi_{h_\lambda}\left((x_{ij})_{j=m_i+1}^{\infty}\right) \varepsilon_{\lambda^\times}\left((y_{ij})_{j=m_i+1}^{\infty}\right) \end{aligned}$$

se puede hacer tan pequeña como se quiera y por tanto la serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij}$ converge en $E\widehat{\otimes}_{g_\lambda^c}F$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Además, se tiene que

$$\begin{aligned} g_\lambda^c\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij}\right) &= \lim_{m\to\infty} g_\lambda^c\left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \otimes y_{ij}\right) \\ \leq \lim_{m\to\infty} \pi_{h_\lambda}\left((x_{ij})_{j=1}^{m}\right) \varepsilon_{\lambda^\times}\left((y_{ij})_{j=1}^{m}\right) &\leq \pi_{h_\lambda}\left((x_{ij})\right) \varepsilon_{\lambda^\times}\left((y_{ij})\right) < \infty \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} g_\lambda^c\left(\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij}\right) &\leq \sum_{i=m+1}^{n} g_\lambda^c\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij}\right) \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{n} \pi_{h_\lambda}\left((x_{ij})\right) \varepsilon_{\lambda^\times}\left((y_{ij})\right) < \epsilon \end{aligned}$$

para m suficientemente grande, por la ecuación (3), y por tanto la sucesión de sumas parciales de $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij}\otimes y_{ij}$ es de Cauchy y por consiguiente converge en $E\widehat{\otimes}_{g_\lambda^c}F$.

Además, de lo anterior, se sigue también que

$$\begin{aligned} g_\lambda^c(z) &= \lim_{n\to\infty} g_\lambda^c\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij}\otimes y_{ij}\right) \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g_\lambda^c\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij}\otimes y_{ij}\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi_{h_\lambda}((x_{ij}))\,\varepsilon_{\lambda^\times}((y_{ij})) = \sum_{i=1}^{\infty}\pi_{h_\lambda}((x_{ij}))\,\varepsilon_{\lambda^\times}((y_{ij})) \end{aligned}$$

y por tanto,

$$g_\lambda^c(z) \leq \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\pi_{h_\lambda}((x_{ij}))\,\varepsilon_{\lambda^\times}((y_{ij}))\right\}$$

Recíprocamente, veamos que para $z\in E\widehat{\otimes}_{g_\lambda^c}F$ hay una representación de la forma $z=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij}\otimes y_{ij}$ con la condición dada.

En efecto, como $z\in E\widehat{\otimes}_{g_\lambda^c}F$ es punto límite de $E\otimes_{g_\lambda^c}F$, existe una sucesión de Cauchy (u_n) en $E\otimes_{g_\lambda^c}F$ que converge a z, es decir, que para todo $\epsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geq N$, $g_\lambda^c(u_n-z)<\frac{\epsilon}{3}$. Sea $\epsilon>0$, entonces existe una sucesión $(k_n)_{n=0}^{\infty}$ en $\mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que

$$g_\lambda^c\left(u_{k_n}-u_{k_{n+1}}\right)\leq\frac{\epsilon}{3\left(2^{n+1}\right)}$$

y claramente $z=\lim_{n\to\infty}u_{k_n}$.

Renombrando $w_n=u_{k_n}$, $n=0,1,2,...$ se sigue que

$$z=\lim_{n\to\infty}w_n=\lim_{k\to\infty}\left(w_0+\sum_{n=1}^{k}(w_n-w_{n-1})\right)=w_0+\sum_{n=1}^{\infty}(w_n-w_{n-1})$$

Como $w_0\in E\otimes_{g_\lambda^c}F$, $(w_n-w_{n-1})\in E\otimes_{g_\lambda^c}F$, tienen representación en $E\otimes_{g_\lambda^c}F$, de la forma $w_0=\sum_{i=1}^{k_0}\sum_{j=1}^{m_{0i}}x_{ij}^0\otimes y_{ij}^0$ y $(w_n-w_{n-1})=\sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=1}^{m_{ni}}x_{ij}^n\otimes y_{ij}^n$ con los x_{ij}^n y los y_{ij}^n, $n=0,1,2,...$ escogidos de tal manera que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k_0}\pi_{h_\lambda}\left(\left(x_{ij}^0\right)\right)\varepsilon_{\lambda^\times}\left(\left(y_{ij}^0\right)\right) &< g_\lambda^c(w_0)+\frac{\epsilon}{3} \\ \sum_{i=1}^{k_n}\pi_{h_\lambda}\left(\left(x_{ij}^n\right)\right)\varepsilon_{\lambda^\times}\left(\left(y_{ij}^n\right)\right) &< g_\lambda^c(w_n-w_{n-1})+\frac{\epsilon}{3\left(2^{n+1}\right)} \quad (n=1,2,...) \end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$z=\sum_{i=1}^{k_0}\sum_{j=1}^{m_{0i}}x_{ij}^0\otimes y_{ij}^0+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=1}^{m_{ni}}x_{ij}^n\otimes y_{ij}^n$$

o mejor $z=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{r_s}u_{st}\otimes v_{st}$, donde r_s, u_{st} y v_{st}, están dados por:

i) Definimos $p_0=1$, $p_1=k_0$,..., $p_n=\sum_{q=0}^{n-1}k_q$ para cada natural n

ii) Para $s=1,2,...,p_1$ y $t=1,2,...,m_{0s}$, hacemos $u_{st}\otimes v_{st}=x_{st}^0\otimes y_{st}^0$ Para $s=p_1+1,...,p_2$ y $t=1,...,m_{1(s-p_1)}$, hacemos $u_{st}\otimes v_{st}=x_{(s-p_1)t}^1\otimes y_{(s-p_1)t}^1$ Para $s=p_2+1,...,p_3$ y $t=1,...,m_{1(s-p_2)}$, hacemos $u_{st}\otimes v_{st}=x_{(s-p_2)t}^2\otimes y_{(s-p_2)t}^2$

iii) Continuamos el proceso para cada natural n, teniendo presente que $s=p_n+1,...,p_{n+1}$, $t=1,...,m_{n(s-p_n)}$ y $u_{st}\otimes v_{st}=x_{(s-p_n)t}^n\otimes y_{(s-p_n)t}^n$. Y para simplificar la notación hacemos $m_{n(s-p_n)}=r_s$ en cada caso.

Es claro de la construcción que la serie $\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{r_s}u_{st}\otimes v_{st}$ convergente, que es una representación de z, y además satisface la condición (3), ya que la serie

$$\sum_{s=1}^{\infty}\pi_{h_\lambda}\left((u_{st})_{t=1}^{r_s}\right)\varepsilon_{\lambda^\times}\left((v_{st})_{t=1}^{r_s}\right)$$

se puede escribir, para $t=1...r_s$ y $j=1...m_{ni}$, en la forma

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{k_0}\pi_{h_\lambda}\left((u_{st})_t\right)\varepsilon_{\lambda^\times}\left((v_{st})_t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=p_n+1}^{p_{n+1}}\pi_{h_\lambda}\left((u_{st})_t\right)\varepsilon_{\lambda^\times}\left((v_{st})_t\right)\\
=\;&\sum_{i=1}^{k_0}\pi_{h_\lambda}\left(\left(x_{ij}^0\right)_j\right)\varepsilon_{\lambda^\times}\left(\left(y_{ij}^0\right)_j\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n}\pi_{h_\lambda}\left(\left(x_{ij}^n\right)_j\right)\varepsilon_{\lambda^\times}\left(\left(y_{ij}^n\right)_j\right)\\
<\;&g_\lambda^c(w_0)+\frac{\epsilon}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\epsilon}{3\left(2^{n+1}\right)}\\
\leq\;&g_\lambda^c(w_0-z)+g_\lambda^c(z)+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}<g_\lambda^c(z)+\epsilon<\infty
\end{aligned}$$

Se obtiene así la representación deseada, y al ser $\epsilon>0$ arbitrario, se sigue que

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\pi_{h_\lambda}\left((x_{ij})\right)\varepsilon_{\lambda^\times}\left((y_{ij})\right)\right\}\leq g_\lambda^c\left(z\right)$$

de donde la igualdad (4) se satisface en forma inmediata, lo que concluye la demostración. □

4 Sobre el dual de $E \otimes_{g_\lambda^c} F$

En la teoría de las normas tensoriales, aparecen de manera natural y asociados a la misma de diferentes maneras, determinados espacios de operadores. Estamos interesados en este epígrafe en el ideal de operadores asociado por dualidad a la norma tensorial g_λ, es decir queremos caracterizar, en términos de espacios de operadores el espacio $(E \otimes_{g_\lambda} F)'$. Tal como aparece en el libro de Pietsch "Operator Ideals", [6], la definición de muchos espacios de operadores viene descrita mediante el comportamiento de los mismos frente a determinados espacios de sucesiones.

Definición 4.1. *Una aplicación $T \in \mathcal{L}(E,F)$ se dice que es* λ-absolutamente sumante *si existe un número real $C > 0$, tal que para toda sucesión $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ en E, con $\varepsilon_\lambda((x_i)) < \infty$, se cumple que*

$$\pi_\lambda((T(x_i))) \leq C\varepsilon_\lambda((x_i)) \tag{5}$$

Dicho con palabras sencillas, un operador es $\lambda-$absolutamente sumante si transforma sucesiones débilmente λ-sumables en sucesiones fuertemente λ-sumables.

Denotaremos por $\mathcal{P}_\lambda(E,F)$ al conjunto de operadores λ-absolutamente sumantes de E en F, y para cada $T \in \mathcal{P}_\lambda(E,F)$ definimos

$$\Pi_\lambda(T) := \inf\{C \geq 0 : \text{ C satisface la condición (5)}\}$$

Es fácil verificar que $\mathcal{P}_\lambda(E,F)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(E,F)$ con norma $\Pi_\lambda(\cdot)$. Más aún, $\mathcal{P}_\lambda(E,F)$ es un ideal Banach de operadores, que denominamos ideal de operadores $\lambda-$absolutamente sumantes.

Teorema 4.2. *Para E, F espacios de Banach, $\left(E \otimes_{g_\lambda^c} F\right)' = \mathcal{P}_{\lambda^\times}(F,E')$ se satisface isométricamente.*

Demostración. Para todo $T \in \mathcal{P}_{\lambda^\times}(F,E')$, definimos $\varphi_T : E \otimes_{g_\lambda^c} F \to \mathbb{R}$ por

$$\langle \varphi_T, z\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_i}\langle x_{ij}, T(y_{ij})\rangle \ \text{ para todo } \ z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_i} x_{ij}\otimes y_{ij} \in E \otimes_{g_\lambda^c} F$$

φ_T está bien definida con independencia de la representación elegida para z y pertenece a $(E \otimes_{g_\lambda^c} F)'$ ya que

$$|\langle \varphi_T, z\rangle| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_i}|\langle x_{ij}, T(y_{ij})\rangle| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_i}\|x_{ij}\|\|T(y_{ij})\|$$

y por la desigualdad de Hölder la última expresión es menor o igual que:

$$sum_{i=1}^{n}\|(\|x_{ij}\|)\|_{\lambda}\|(\|T(y_{ij})\|)\|_{\lambda^{\times}} \leq \Pi_{\lambda^{\times}}(T)\sum_{i=1}^{n}\pi_{\lambda}((x_{ij}))\varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_{ij}))$$

luego, tomando ínfimos sobre todas las representaciones de z, se sigue que

$$|\langle\varphi_T, z\rangle| \leq \Pi_{\lambda^{\times}}(T)\, g_{\lambda}^{c}(z; E, F)$$

y por consiguiente $\|\varphi_T\| \leq \Pi_{\lambda^{\times}}(T)$.

Recíprocamente, dado $\varphi \in (E \otimes_{g_\lambda} F)'$ definimos $T_\varphi : F \longrightarrow E'$ por

$$\langle T_\varphi(y), x\rangle = \langle\varphi, x \otimes y\rangle \text{ para todos } y \in F,\ x \in E$$

Veamos que $T_\varphi \in \mathcal{P}_{\lambda^{\times}}(F, E')$. Para ello, consideremos una sucesión (y_i) de elementos de F tal que $\varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_i)) < \infty$. Como B_E es débilmente densa en $B_{E''}$, dados $\epsilon > 0$ y $(\delta_i) \in \lambda^{\times}$ con $\|(\delta_i)\|_{\lambda^{\times}} \leq 1$, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $x_i \in E$ tal que $\|x_i\| \leq 1$ y

$$\|T_\varphi(y_i)\| \leq |\langle T_\varphi(y_i), x_i\rangle| + \epsilon\delta_i = |\langle\varphi, x_i \otimes y_i\rangle| + \epsilon\delta_i$$

por tanto

$$\begin{aligned}\|(\|T_\varphi(y_i)\|)\|_{\lambda^{\times}} &\leq \|(|\langle\varphi, x_i \otimes y_i\rangle| + \epsilon\delta_i)\|_{\lambda^{\times}}\\ &\leq \|(\langle\varphi, x_i \otimes y_i\rangle)\|_{\lambda^{\times}} + \epsilon\\ &\leq \sup_{\|(\eta_i)\|_{\lambda}\leq 1} |\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\langle\varphi, x_i \otimes y_i\rangle| + \epsilon\end{aligned}$$

Las sucesiones (η_i) en la desigualdad anterior están en h_λ y $\|(\eta_i)\|_{h_\lambda} \leq 1$. Además, $\pi_{h_\lambda}((\eta_i x_i)) = \|(\|\eta_i x_i\|)\|_{h_\lambda} \leq \|(\eta_i)\|_{h_\lambda} \leq 1$ y como $\varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_i)) < \infty$. Entonces del teorema 3.2 se puede ver que $\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i x_i \otimes y_i \in E\widehat{\otimes}_{g_\lambda^c}F$. Luego

$$\begin{aligned}\|(\|T_\varphi(y_i)\|)\|_{\lambda^{\times}} &\leq \sup_{\|(\eta_i)\|_{h_\lambda}\leq 1} |\langle\varphi, \sum_{i=1}^{\infty}\eta_i x_i \otimes y_i\rangle| + \epsilon\\ &\leq \sup_{\|(\eta_i)\|_{h_\lambda}\leq 1} \|\varphi\| g_\lambda^c(\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i x_i \otimes y_i) + \epsilon\\ &\leq \sup_{\|(\eta_i)\|_{h_\lambda}\leq 1} \|\varphi\|\|(\|\eta_i x_i\|)\|_{h_\lambda}\varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_i)) + \epsilon\\ &\leq \|\varphi\|\varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_i)) + \epsilon\end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, se sigue que $\|(\|T_\varphi(y_i\|)\|_{\lambda^{\times}} \leq \|\varphi\|\varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_i))$ y $\Pi_{\lambda^{\times}}(T_\varphi) \leq \|\varphi\|$, lo que concluye la demostración. $\square$

Como consecuencia inmediata del teorema, tenemos que $((g_\lambda^c)^t)'$ es la norma tensorial asociada al ideal de operadores $\mathcal{P}_{\lambda^\times}$, ya que $(E \otimes_{g_\lambda^c} F)' = (F \otimes_{(g_\lambda^c)^t} E)' = (F \otimes_{((g_\lambda^c)^t)''} E)'$ con lo cual $(F \otimes_{((g_\lambda^c)^t)''} E)' = \mathcal{P}_{\lambda^\times}(F, E')$ y por tanto $((g_\lambda^c)^t)' \sim \mathcal{P}_{\lambda^\times}$

Referencias

[1] Defant, A.-Floret, K.*Tensor norms and operator ideals.* North Holland Math. Studies. North Holland. Amsterdam. 1993.

[2] Jarchow, H.*Locally Convex Spaces.* B.B. Teubner. Stuttgart. 1981.

[3] Köthe, G.*Topological Vector Spaces* II. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1979.

[4] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L.*Classical Banach Spaces I and II.* Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

[5] Persson, A. and Pietsch, A. p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachraümen. *Studia Math.* **33**(1969), 213-222.

[6] Pietsch, A.*Operator ideals.* North Holland Math. Library. North Holland. Amsterdam. 1980.

[7] Saphar P. Hypothèse d'approximation à l'ordre p dans les espaces de Banach et approximation d'applications p-absolument sommantes.*Israel J. Math.* **13**(1972),379-399.

Dirección de los autores: Patricia Gómez Palacio, Universidad EAFIT, Depto. de Ciencias Básicas, A. A.3300 Medellín, Colombia pagomez@eafit.edu.co — Juan Antonio López Molina, jalopez@mat.upv.es, María José Rivera Ortún, jrivera@mat.upv.es, E.T.S. Ingenieros Agrónomos, Camino de Vera, 46073 Valencia, España