Matemáticas: Enseñanza Universitaria
ISSN: 0120-6788
reviserm@univalle.edu.co
Escuela Regional de Matemáticas
Colombia

Ortega Palencia, Pedro; Cabarcas Urriola, Héctor
Problemas y soluciones
Matemáticas: Enseñanza Universitaria, vol. XI, núm. 1-2, diciembre, 2003, pp. 135-138
Escuela Regional de Matemáticas
Cali, Colombia

Problemas y soluciones

En esta sección se publican problemas propuestos por los lectores de la revista. Cuando las soluciones sean conocidas se solicita que sean enviadas junto con los problemas. Las soluciones serán, en su momento, objeto de publicación. Pueden remitir sus problemas a la dirección de la Revista por cualquiera de las vías disponibles o directamente al profesor Yu Takeuchi, editor de la sección a la Carrera 30, No. 39–31, Apto. 203, Bogotá, Colombia.

Problema 5.98 Vol. VII, No. 1, Mayo (1998). Propuesto por Yu Takeuchi. Demostrar que:

i) Existen dos valores de $a > 0$ que satisfacen la igualdad

$$(a^a)^a = a^(a^a).$$

ii) Dado $a > 0$, existen a lo más dos valores de $b > 0$ que satisfacen la igualdad

$$a^b = b^a$$

Como solución a la parte ii) de este problema hemos recibido la siguiente nota.

Existencia de raices no triviales de la ecuación $x^y - y^x = 0$, x, $y \in \mathbb{R}^+$

Pedro Ortega Palencia   Héctor Cabarcas Urriola

En esta nota se establecen condiciones para la existencia de soluciones reales positivas no triviales x, y $(x \neq y)$ de la ecuación $x^y - y^x = 0$. Además se demuestra la existencia y unicidad de soluciones enteras positivas para la correspondiente ecuación diofantica. Adicionalmente se da un criterio que permite establecer la relación de orden que surge entre las potencias de dos números reales positivos que no conmutan bajo exponenciación. Las herramientas utilizadas son algunos métodos del cálculo elemental y de la teoría de números elemental.

Soluciones reales positivas. Considérese la ecuación

$$x^y - y^x = 0, \quad x \neq y \tag{4}$$

o, en forma equivalente,

$$x^{\frac{1}{x}} - y^{\frac{1}{y}} = 0, \quad x \neq y \tag{5}$$

La segunda forma sugiere introducir la función $f : (0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$. Esta función es derivable en $(0, +\infty)$ y para todo x en dicho intervalo se tiene

$$f'(x) = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1 - \ln x) \tag{6}$$

De (6) se deduce lo siguiente:

i) El único punto crítico de f es $x = e$.

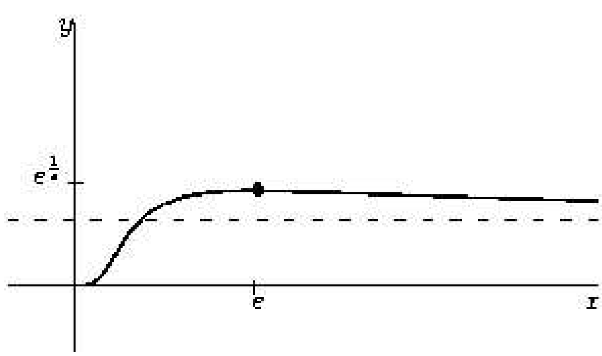
ii) $f' > 0$ en $(0, e)$, luego f es estrictamente creciente en este intervalo.

iii) $f' < 0$ en $(e, +\infty)$ luego f es estrictamente decreciente en dicho intervalo.

Por el criterio de la primera derivada, $x = e$ es un máximo absoluto de f, es decir, $e^{\frac{1}{e}} > x^{\frac{1}{x}}$ para todo $x > 0$, $x \neq e$.
De otro lado

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0 \quad y \quad \lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

Con la información anterior se puede bosquejar la gráfica de f



Sea $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq e$. Puede ocurrir:

a) $0 < a \leqslant 1$. Entonces $0 < a^{\frac{1}{a}} \leqslant 1$ y f alcanza el valor $a^{\frac{1}{a}}$ una sola vez. Esto es, $f(x) = a^{\frac{1}{a}}$ solo para $x = a$.

b) $1 < a < e$. Entonces $1 < a^{\frac{1}{a}} < e^{\frac{1}{e}}$. Como f es estrictamente creciente en $(1, e)$, el único x en $(1, e)$ tal que $f(x) = a^{1/a}$ es $x = a$.

   De otro lado $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$, $f(+\infty) = 1$ y $1 < a^{\frac{1}{a}} < e^{\frac{1}{e}}$. Entonces por el teorema del valor intermedio existe b en $(0, +\infty)$ tal que $f(b) = a^{\frac{1}{a}}$. Por ser f estrictamente decreciente en $(e, +\infty)$ este b es único. Es decir, existe un único $b \neq a$ tal que $b^{\frac{1}{b}} = a^{\frac{1}{a}}$.

c) $a > e$. Nuevamente $f(+\infty) = 1 < a^{\frac{1}{a}} < e^{\frac{1}{e}} = f(e)$. Un razonamiento análogo prueba que f toma el valor $a^{\frac{1}{a}}$ una única vez en $(1, e)$ y una única vez en $(e, +\infty)$.

Todo lo anterior se puede resumir en:

Proposición 1. Si $a > 1$, $a \neq e$ existe un único real $b \neq a$ tal que $a^b = b^a$.[1]

Proposición 2. i) Si $0 < a < b < e$ entonces $a^b < b^a$. ii) Si $e < a < b$ entonces $a^b > b^a$.

Queda una cuestión aún por resolver: si $1 < a < e < b$, ¿cómo es a^b con respecto a b^a?

Para responder esta pregunta se procede como sigue.

Se busca el único $x > e$ tal que $a^{\frac{1}{a}} = x^{\frac{1}{x}}$. Ahora si $x < b$ entonces $x^{\frac{1}{x}} > b^{\frac{1}{b}}$ y por tanto $a^{\frac{1}{a}} > b^{\frac{1}{b}}$, de donde $a^b > b^a$. Si $x > b$ entonces $b^{\frac{1}{b}} > x^{\frac{1}{x}} = a^{\frac{1}{a}}$ de donde $b^a > a^b$.

Si $a > 1$, $a \neq e$, existe un único $b > 1$ tal que $a^{\frac{1}{a}} = b^{\frac{1}{b}}$ y $a \neq b$. Obsérvese que $0 < \frac{1}{a} < 1$ y $0 < \frac{1}{b} < 1$, luego $\frac{1}{a^{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{b^{\frac{1}{b}}}$, entonces $(\frac{1}{a})^{\frac{1}{a}} = (\frac{1}{b})^{\frac{1}{b}}$. Esto se resume en la siguiente proposición.

Proposición 3. Si $0 < x < 1$, $x \neq \frac{1}{e}$ existe un único y, $0 < y < 1$ tal que $x^x = y^y$, $x \neq y$.

Soluciones enteras positivas Si se restringen los valores de x e y al conjunto $\mathbb{Z}^+$ de los enteros positivos se obtiene la ecuación diofántica

$$m^n - n^m = 0 \tag{7}$$

Si m, n son tales que $0 < m < n < e$ por la proposición(1) $m^n < n^m$. De otro lado, si $e < m < n$ entonces $m^n > n^m$. Luego si (7) tiene solución

[1] Problema propuesto por Yu Takeuchi en la revista Matemática: Enseñanza Universitaria, Vol. VII No. 1, Mayo de 1998.

debe tenerse $o < m < e < n$. Pero esto implica que $m = 1$ ó $m = 2$. Un cálculo sencillo prueba que $m \neq 1$, de donde $m = 2$. Sustituyendo en (7) resulta

$$n^2 = 2^n, \quad n > 2, \tag{8}$$

Lo que implica que el único factor primo de n es 2, y $n = 2^k$ con $k > 1$. Luego $(2^k)^2 = 2^{2^k}$ lo cual conduce a $2^k = 2k, k > 1$. Pero $2^k > 2k$ para $k > 2$ y de esto $1 < k < 3$, es decir $k = 2$ y por tanto, $n = 4$.

Hasta ahora se ha encontrado una pareja solución en $\mathbb{Z}^+$, $m = 2$ y $n = 4$. La unicidad de m está implícita en el argumento anterior y la unicidad de n se sigue de la unicidad de k.

Referencias

[1] T. M. Apostol. *Calculus*. Vol I, Editorial Reverté S.A, 1998.

[2] T. M. Apostol. *Introducción a la Teoría Analítica de Números*. Editorial Reverté S.A, Barcelona, 1980.

[3] Garrett Birkhoff y Saunders Maclane. *Algebra Moderna*. Editorial Vicens-Vives, Barcelona, 1963.

[4] Richard Courant y Fritz John. *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*. Vol.I, Editorial Limusa-Wiley S.A, México, 1971.

[5] K. Chandrasekharan. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag, New York inc, 1968.

[6] Carl Friedrich Gauss. *Disquisitiones Aritmeticae*. Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Santa fé de Bogotá, D.C, 1995.

[7] Serge Lang. *Introducción al Análisis Matemático*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1990.

[8] Serge Lang. *Cálculo I*. Fondo Educativo Interamericano, S.A, 1976.

[9] *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*. Vol VII, mayo de 1998, sección de Problemas propuestos.

[10] James Shokley. *Introduction to Number Theory*. Holt. Rinehart and Wiston, inc, 1967.

Dirección del autor: Pedro Ortega Palencia. pedrootegaco@yahoo.com — Héctor Cabarcas Urriola. hecjo10@hotmail.com