Vol. XVII, Nº 1, Junio (2009)
Matemáticas: 1–12

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Endomorfismos de álgebras de Stone

Hernando Gaitán
Universidad Nacional de Colombia

Juan Pablo Quijano
Universidad Nacional de Colombia

Recibido Jun. 18, 2008 Aceptado Mzo. 25, 2009

Abstract

By considering Stone algebras as Ockham algebras we prove that a Stone algebra is completely determined by its endomorphism monoid.

Keywords: Pristley duality, endomorphism monoid, pseudo-complemented distributive lattice, Stone algebra, Ockham algebra.

MSC(2000): 06D15, 06D50, 06E15.

Resumen

Considerando las álgebras de Stone como álgebras de Ockham probamos que una álgebra de Stone queda completamente determinada por su monoide de endomorfismos.

Palabras y frases claves: Dualidad de Priestley, monoide de endomorfismos, retículo distributivo pseudo-complementado, álgebra de Stone, álgebra de Ockham.

1 Introducción

Dada una álgebra $\mathbf{A}$, el conjunto de sus endomorfismos con la composición de funciones forma un monoide al que denotaremos por $\mathrm{End}(\mathbf{A})$. La pregunta que se plantea es ¿hasta qué punto tal monoide determina al álgebra $\mathbf{A}$? Entre las álgebras mas estudiadas en la literatura se encuentran respuestas que van de un extremo al otro. En uno de los extremos se encuentran las álgebras Booleanas que están completamente determinadas por sus respectivos monoides de endomorfismos: más precisamente dos álgebras Booleanas con monoides de endomorfismos isomorfos son necesariamente isomorfas; esto fue probado independientemente en [9], [10] y [8]. Muy cerca de este extremo se encuentran los retículos distributivos; en [10] esta probado que dos retículos distributivos con monoides de endomorfismos isomorfos son, o bien isomorfos o uno es isomorfo al retículo dual del otro, es decir al retículo obtenido de este invirtiendo su orden. Igual resultado se tiene para los retículos distributivos acotados (ver [7]). En el otro extremo se encuentran las álgebras de Kleene. Para esta clase de álgebras se sigue de resultados debidos a Adams y Priestley (ver [1]) que hay muchas álgebras de Kleene no isomorfas que comparten el mismo monoide de endomorfismos. Por supuesto que igual cosa ocurre en la clase mas amplia de las álgebras de Morgan. Estas álgebras son generalizaciones naturales de las álgebras Booleanas.

Otra importante y natural generalización de las álgebras Booleanas la constituye las álgebras de Stone. La clase de las álgebras de Stone ha sido extensamente estudiada en el contexto de los retículos distributivos acotados con pseudo-complemento. Vistas en este contexto, las álgebras de Stone son retículos distributivos con pseudo-complemento que satisfacen la conocida identidad de Stone (ver definiciones más adelante). En [2], Adams, Koubek y Sichler abordan la pregunta planteada al comienzo de esta introducción para las álgebras pseudo-complementadas. En dicho trabajo se deduce de resultados validos para toda álgebra pseudo-complementada que una álgebra de Stone esta completamente determinada por su monoide de endomorfismos.

En el presente trabajo nosotros damos una prueba directa de este resultado muy en el espíritu de la prueba del mismo resultado para las álgebras Booleanas dada por Magill en [8] en la cual se aprecia claramente el papel determinante de los endomorfismos de dos valores (0 y 1 necesariamente) que corresponden a endomorfismos constantes en el espacio dual. En el caso de las álgebras de Stone, se suman a este papel los endomorfismos de tres valores ($0, 1$ y un elemento denso) que corresponden, en el espacio dual, a endomorfismos de dos valores comparables siendo uno de ellos minimal y los endomorfismos de 4 valores ($0, 1$, un elemento distinto de 0 y 1 y su complemento) correspondiendo estos a endomorfismos de dos valores minimales en el espacio dual. Se probara básicamente que estos endomorfismos se preservan bajo isomorfismo de monoides.

La estrategia es considerar una álgebra de Stone como una álgebra de Ockham (ver la definición de dichas álgebras en la siguiente sección) que satisface ciertas identidades adicionales. Obviamente usamos la dualidad de Priestley especializada en las álgebras de Ockham y caracterizamos los espacios de Ockham duales a álgebras de Stone. Luego pasamos a probar que dos de dichos espacios con el mismo monoide de endomorfismos (en este caso los endomorfismos son funciones monótonas y continuas del espacio en si mismo) son isomorfos. El resultado deseado se obtendrá luego por dualidad.

2 Álgebras de Stone vistas como álgebras de Ockham

Un *retículo distributivo pseudo-complementado* es un par $(\mathbf{L},\ ^*)$ donde

$$\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee, 0, 1)$$

es un retículo distributivo acotado y la operación unaria * (*el pseudocomplento*) está definida por la propiedad

$$a \wedge x = 0 \Longleftrightarrow x \leq a^*.$$

La clase de los retículos distributivos pseudo-complementados que se denota por $\mathcal{B}_\omega$ es una variedad (clase de estructuras algebraicas cerrada para la formación de sub-álgebras, productos directos e imágenes homomorfas.) El retículo de sus subvariedades es una cadena de tipo $\omega + 1$

$$\mathcal{B}_{-1} \subset \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{B}_\omega$$

donde $\mathcal{B}_{-1}$ es la variedad trivial, $\mathcal{B}_0$ es la variedad de las álgebras Boolenas y $\mathcal{B}_1$ es la variedad de las álgebras de Stone. Una *álgebra de Stone* es un retículo pseudo-complementado que satisface la identidad de Stone, a saber,

$$x^* \vee x^{**} = 1.$$

Las álgebras de Stone también forman una sub-variedad de la variedad de las álgebras de Ockham a la cual denotaremos por $\mathcal{O}$. Una *álgebra de Ockham* es un par $(\mathbf{L}, \sim)$ donde $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y la operación unaria $\sim$ que llamaremos por el momento *negación de Ockham* satisface las siguientes identidades:

$$\sim (a \wedge b) = \sim a \vee \sim b, \quad \sim (a \vee b) = \sim a \wedge \sim b, \quad \sim 0 = 1, \quad \sim 1 = 0$$

El estudio de las álgebras de Ockham lo inicia Berman en [3]; para un estudio sistemático de estas álgebras ver [4]. El retículo de las subvariedades de las álgebras de Ockham tiene una estructura mucho mas compleja que el de las subvariedades de los retículos distributivos pseudo-complementados. Importantes subvariedades de álgebras de Ockham son las álgebras Booleanas, las álgebras de Kleene, las álgebras de Morgan y las álgebras de Stone. Esta última subvariedad está determinada por las identidades

$$x \wedge \sim x = 0, \qquad \sim\sim\sim x = \sim x,$$

es decir, si la negación de Ockham satisface estas dos identidades se convierte en un pseudo-complemento.

3 Espacios de Ockham que corresponden a álgebras de Stone

En esta sección describimos brevemente la dualidad de Priestley para retículos distributivos acotados y su especialización en álgebras de Ockham en general y en álgebras de Stone en particular.

Un conjunto X con un orden parcial $\leq$ y una topología τ será llamado *espacio topológico ordenado* y se denotará por $\mathbf{X} = (X, \tau, \leq)$. $Y \subseteq X$ se dice *decreciente*, si $y, x \in X$, $x \leq y$, y $y \in Y$ implican $x \in Y$. Análogamente se define conjunto *creciente*. Se llamará *clopen* a un subconjunto de $\mathbf{X}$ que es abierto y cerrado a la vez. $\boldsymbol{X}$ se dirá de *orden totalmente desconectado* si $\forall x, y \in X$ con $x \nleq y$, existe U clopen decreciente tal que $y \in U$, $x \notin U$. Un espacio topológico ordenado totalmente desconectado y compacto se llama *espacio de Priestley*.

Dado un retículo distributivo y acotado denote por X_L al conjunto de sus ideales primos. Para cada $a \in L$, defina $X_a := \{P \in X_L : a \notin P\}$. Entonces

$$\mathbf{X}_L = (X_L, \tau, \subseteq)$$

donde τ es la topología sobre X_L con base $\mathcal{B} := \{X_b \cap (X \setminus X_c) : b, c \in L\}$ resulta ser un espacio de Priestley y se le llama el *espacio dual* de $\mathbf{L}$.

Recíprocamente, sea $\mathbf{X}$ un espacio de Priestley. Denote por L_X el conjunto de sus clopens decrecientes. Entonces

$$\mathbf{L}_X = (L_X, \cup, \cap, \emptyset, X)$$

resulta ser un retículo distributivo acotado al que se le llama *retículo dual* de $\mathbf{X}$. El teorema de la dualidad de Priestley establece por un lado que la aplicación

$$\mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{L}_{X_L}, \quad a \mapsto X_a$$

es un isomorfismo de retículos distributivos acotados; es decir, $\mathbf{L}$ es isomorfo al retículo de los clopen decrecientes de su espacio dual. Y recíprocamente, si X es un espacio de Priestley, la aplicación

$$\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}_{L_X}, \quad x \mapsto \{a \in L_X : x \notin a\}$$

es simultáneamente un homeomorfismo y un isomorfismo de orden. En otras palabras, los espacios topológicos $\mathbf{X}$ y $\mathbf{X}_{L_X}$ son esencialmente iguales como conjuntos ordenados y también como espacios topológicos.

La dualidad de las álgebras de Ockham se monta sobre la dualidad de Priestley de la siguiente manera: Un *espacio de Ockham* es un par $(\mathbf{X}, g)$ constituido por un espacio de Priestley $\mathbf{X}$ y una función continua $g : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ que invierte el orden ($x \leq y$ implica $g(y) \leq g(x)$). El teorema de la dualidad entre las álgebras de Ockham y los espacios de Ockham es como sigue: si $(\mathbf{L}, \sim)$ es una álgebra de Ockham, $(\mathbf{X}_L, g)$ con g dada por la fórmula

$$g(P) = \{x \in L : \sim x \notin P\}$$

es un espacio de Ockham. Recíprocamente, si $(\mathbf{X}, g)$ es un espacio de Ockham, $(\mathbf{L}_X, \sim)$ con $\sim$ dado por la prescripción

$$\sim a = X \setminus g^{-1}(a)$$

es una álgebra de Ockham. La teoría de la dualidad entre álgebras y espacios de Ockham debida a Urquhart (ver [13]) establece, en símbolos, que

$$(\mathbf{L}, \sim) \simeq (\mathbf{L}_{X_L}, \sim) \quad \text{y} \quad (\mathbf{X}, g) \simeq (\mathbf{X}_{L_X}, g).$$

En otras palabras las dos álgebras de Ockham en la izquierda y los dos espacios de Ockham en la derecha son esencialmente iguales. De hecho, en lo que sigue y esperando que esto no cause confusión, identificaremos a a, elemento de una álgebra de Ockham $(\mathbf{L}, \sim)$ con el conjunto $X_a = \{P \in X_L : a \notin P\}$ de ideales primos de $\mathbf{L}$ y a x, elemento de un espacio de Ockham $(\mathbf{X}, g)$ con el conjunto $\{a \in L_X : x \notin a\}$ de clopen decrecientes de $\mathbf{X}$.

El siguiente resultado nos permite distinguir, entre los espacios de Ockham, aquellos cuya álgebra dual resulta ser de Stone; si se considera a una álgebra de Stone como retículo distributivo pseudo-complementado, este resultado corresponde a la proposición 3 de [11].

Teorema 3.1. *Sea* $(\mathbf{X}, g)$ *un espacio de Ockham. Entonces* $(\mathbf{X}, g)$ *es el espacio dual de una álgebra de Stone (en otras palabras,* $(\mathbf{L}_X, \sim)$ *es una algebra de Stone) si y solo si dicho espacio satisface:*

(i) *para cada* $x \in X,\ g(x) \leq x$*,*

(ii) $x \leq y$ *o* $y \leq x$ *(i.e.* x *e* y *comparables) implica* $g(x) = g(y)$*.*

Demostración. Suponga que $\mathbf{L}_X$ es una álgebra de Stone. Sean $x, y \in X$ comparables, digamos, $x \leq y$. Como g invierte el orden, $g(y) \leq g(x)$. Suponga $g(x) \nleq g(y)$ y sea $a \in g(x)$ tal que $a \notin g(y)$. Se sigue que $\sim a \notin x$ y $\sim a \in y$. Como $\mathbf{L}_X$ es una álgebra de Stone, $\sim a \wedge \sim\sim a = 0 \in x$ y como x es un ideal primo y $\sim a \notin x$ entonces $\sim\sim a \in x$. De $x \leq y$ se tiene $\sim\sim a \in y$. De $\sim a \in y$ se recibe $\sim a \vee \sim\sim a = 1 \in y$ y esto es una contradicción. Luego, $g(x) \leq g(y)$. Hemos probado así que $\mathbf{X}$ satisface (**ii**). Observe ahora que si $x \in X$ es tal que si $a \in g(x)$ y $a \notin x$, como $a \wedge \sim a = 0 \in x$ entonces $\sim a \in x$ lo que significa $a \notin g(x)$, una contradicción. Esto prueba que $\mathbf{X}$ satisface (**i**).

Recíprocamente, suponga que $\mathbf{X}$ satisface **(i)** y **(ii)**. Sea $a \in L_X$ y suponga que $\sim a \wedge a \neq 0$. Sea $x \in \sim a \wedge a$ de modo que $x \in a$ y $x \in \sim a = X \setminus g^{-1}(a)$. Entonces, $x \in a$ and $x \notin g^{-1}(a)$. Pero de $g(x) \leq x$ se infiere entonces que $g(x) \in a$ (pues a es clopen decreciente), una contradicción. Para verificar $\sim a = \sim\sim\sim a$ para cada $a \in L_X$ observe primero que las condiciones **(i)** y **(ii)** implican $g^2(x) = g(x)$ para todo $x \in X$. Entonces

$$\begin{aligned}
x \in \sim\sim\sim a &\Longleftrightarrow x \notin g^{-1}(\sim\sim a)\\
&\Longleftrightarrow g(x) \notin \sim\sim a\\
&\Longleftrightarrow g(x) \in g^{-1}(\sim a)\\
&\Longleftrightarrow g^2(x) = g(x) \in \sim a\\
&\Longleftrightarrow g(x) \notin g^{-1}(a)\\
&\Longleftrightarrow g^2(x) = g(x) \notin a\\
&\Longleftrightarrow x \in \sim a.
\end{aligned}$$

□

Con un argumento sencillo que usa el Lema de Zorn se prueba fácilmente que un espacio de Priestley $\mathbf{X}$ siempre tiene elementos minimales. El conjunto de los elementos minimales de $\mathbf{X}$ lo denotaremos $\mathrm{Min}\mathbf{X}$. Se sigue del Teorema 3.1 que si $(\mathbf{X}, g)$ es un espacio de Ockham que corresponde a una álgebra de Stone entonces la imagen de g es $\mathrm{Min}\mathbf{X}$ y en consecuencia este conjunto es compacto. Además, si $u \in \mathrm{Min}\mathbf{X}$ entonces $g(u) = u$.

3.1 Endomorfismos de álgebras de Stone

Sea $(\mathbf{X}, g)$ un espacio de Ockham. Un *endomorfismo* de $(\mathbf{X}, g)$ es una función $\alpha : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ monótona (es decir, $x \leq y$ implica $\alpha(x) \leq \alpha(y)$) y continua que conmuta con g (es decir, $\alpha \circ g = g \circ \alpha$). Con la composición ordinaria de funciones, el conjunto de los endomorfismos de $(\mathbf{X}, g)$ tiene estructura de monoide. A dicho monoide lo denotaremos $\mathrm{End}(\mathbf{X}, g)$.

Dado $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbf{X}, g)$, defina $\widetilde{\alpha} : \mathbf{L}_X \longrightarrow \mathbf{L}_X$ por medio de la prescripción $\widetilde{\alpha}(a) = \alpha^{-1}(a)$. Es rutina verificar que $\widetilde{\alpha}$ está bien definida y resulta ser un homomorfismo entre álgebras de Ockham; esto es, $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{End}(\mathbf{L}_X, \sim)$. A $\widetilde{\alpha}$ se le suele llamar la *aplicación dual* de α. Recíprocamente, si $(\mathbf{L}, \sim)$ es una álgebra de Ockham y $f \in \mathrm{End}(\mathbf{L}, \sim)$, la aplicación $\widetilde{f} : (\mathbf{X}_L, g) \longrightarrow (\mathbf{X}_L, g)$ definida por la fórmula $\widetilde{f}(x) = f^{-1}(x)$ resulta ser un endomorfismo de $(\mathbf{X}_L, g)$; es decir, $\widetilde{f} \in \mathrm{End}(\mathbf{X}_L, g)$. $\widetilde{f}$ se llama la *aplicación dual* de f. Las siguientes igualdades se verifican fácilmente:

- $\widetilde{f} = \widetilde{h} \Longrightarrow f = h$,
- $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta} \Longrightarrow \alpha = \beta$,
- $\widetilde{\mathrm{id}}_L = \mathrm{id}_{X_L}$, $\widetilde{\mathrm{id}}_X = \mathrm{id}_{L_X}$,
- $\widetilde{fh} = \widetilde{h}\widetilde{f}$,
- $\widetilde{\alpha\beta} = \widetilde{\beta}\widetilde{\alpha}$,
- $f = \widetilde{\widetilde{f}}$ y $\alpha = \widetilde{\widetilde{\alpha}}$.

La igualdad $f = \widetilde{\widetilde{f}}$ significa exactamente que, bajo el isomorfismo entre $\mathbf{L}$ y $\mathbf{L}_{X_L}$ establecido previamente, a $f(a)$ le corresponde $\widetilde{\widetilde{f}}(X_a)$, en otras palabras, $X_{f(a)} = \widetilde{\widetilde{f}}(X_a)$

Las anteriores igualdades dicen esencialmente que los monoides $\mathrm{End}(\mathbf{L}, \sim)$ y $\mathrm{End}(\mathbf{X}_L, g)$ son anti-isomorfos; más precisamente, la asignación $f \mapsto \widetilde{f}$ establece una aplicación uno a uno y sobre de $\mathrm{End}(\mathbf{L}, \sim)$ sobre $\mathrm{End}(\mathbf{X}_L, g)$ que preserva la composición pero invirtiendo el orden de los factores. Como consecuencia podemos ahora enunciar el siguiente resultado que, por supuesto, es válido en general para álgebras de Ockham.

Teorema 3.2. *Sean $(\mathbf{L}_1, ^*)$ y $(\mathbf{L}_2, ^*)$ álgebras de Stone. Entonces $End(\mathbf{L}_1, ^*) \simeq End(\mathbf{L}_2, ^*)$ si y solo si $End(\mathbf{X}_{L_1}, g) \simeq End(\mathbf{X}_{L_2}, g)$.*

4 Endomorfismos de uno y dos valores

Sea $(\mathbf{X}, g)$ un espacio de Ockham cuya álgebra dual es de Stone y sea $u \in \mathrm{Min}\mathbf{X}$. Entonces la función de valor constante u a la cual denotaremos por κ_u es un endomorfismo de $(\mathbf{X}, g)$; es decir, es monótona (obvio); continua (dado $V \subseteq X$ abierto hay solamente dos posibilidades: una, que $u \notin V$, en cuyo caso $\kappa_u^{-1}(V) = \emptyset$; la otra, que $u \in V$ en cuyo caso, $\kappa_u^{-1}(V) = X$. En cualquier caso, $\kappa_u^{-1}(V)$ resulta ser abierto de $\mathbf{X}$) y conmuta con g ($g(\kappa_u(x)) = g(u) = u = \kappa_u(g(x))$ ya que u es minimal). Observe que las funciones de valor constante (valor que necesariamente debe ser minimal) corresponden a los endomorfismos de dos valores (necesariamente 0 y 1) de su álgebra dual. Cabe observar aquí el siguiente hecho que se sigue fácilmente de la primera condición en el Teorema 3.1: si $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbf{X}, g)$ entonces $\alpha(\mathrm{Min}\mathbf{X}) \subseteq \mathrm{Min}\mathbf{X}$.

Proposición 4.1. *Sean $(\mathbf{X}_1, g)$ y $(\mathbf{X}_2, g)$ espacios de Ockham cuyas álgebras duales son de Stone y sea $\Phi : End(\mathbf{X}_1, g) \longrightarrow End(\mathbf{X}_2, g)$ un isomorfismo de monoides. Sea $u \in Min\mathbf{X}_1$. Entonces $\Phi(\kappa_u) = \kappa_v$ para algún $v \in Min\mathbf{X}_2$.*

Demostración. Para cualquier $\beta \in \mathrm{End}(X_1, g)$, se tiene que $\kappa_u\beta = \kappa_u$ luego $\Phi(\kappa_u\beta) = \Phi(\kappa_u)\Phi(\beta) = \Phi(\kappa_u)$ y ya que Φ es sobre se puede decir que $\Phi(\kappa_u)\gamma = \Phi(\kappa_u)$ para cualquier $\gamma \in \mathrm{End}(X_2, g)$; en particular, para $z \in \mathrm{Min}\mathbf{X}_2$ se tiene que

$$\Phi(\kappa_u)(z) = \Phi(\kappa_u)\kappa_z(y) = \Phi(\kappa_u)(y) \quad \forall y \in X_2,$$

lo cual significa que $\Phi(\kappa_u)$ tiene un valor constante que, teniendo en cuenta el hecho observado justo antes de esta proposición, es minimal. □

Pasamos a estudiar ahora los endomorfismos de dos valores. Sea $(\mathbf{X}, g)$ un espacio de Ockham cuya álgebra dual es de Stone. Fijemos un elemento $x_0 \in X \setminus \mathrm{Min}X$. Para cada $z \in \mathrm{Min}X$, ya que obviamente $x_0 \not\leq z$, existe un clopen decreciente U_z tal que $z \in U_z$ pero $x_0 \notin U_z$. Como $\mathrm{Min}\mathbf{X}$ es compacto, existen $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathrm{Min}X$ tales que $\mathrm{Min}\mathbf{X} \subseteq U_0 = U_{z_1} \cup \cdots \cup U_{z_k}$. Con estos ingredientes podemos definir la función $\varphi : X \longrightarrow X$ mediante la receta:

$$\varphi(t) = \begin{cases} g(x_0) & \text{si } t \in U_0, \\ x_0 & \text{si } t \notin U_0. \end{cases}$$

Proposición 4.2. *$\varphi \in End(\mathbf{X}, g)$, $\varphi\varphi = \varphi$ y $\varphi(x_0) = x_0$.*

Demostración. Sea Z un subconjunto cerrado de $\mathbf{X}$. Se tiene entonces que

$$\varphi^{-1}(Z) = \begin{cases} U_0 & \text{si } g(x_0) \in Z,\ x_0 \notin Z, \\ X \setminus U_0 & \text{si } g(x_0) \notin Z,\ x_0 \in Z, \\ \emptyset & \text{si } g(x_0) \notin Z,\ x_0 \notin Z, \\ X & \text{si } g(x_0) \in Z,\ x_0 \in Z. \end{cases}$$

La continuidad se sigue de inmediato porque U_0 es clopen. Veamos ahora que φ conmuta con g: suponga primero que $t \in U_0$; entonces $g(\varphi(t)) = g(g(x_0)) = g(x_0)$ y, por el otro lado, como $g(t) \leq t$ y U_0 es decreciente entonces $g(t) \in U_0$ y por tanto $\varphi(g(t)) = g(x_0)$. En el otro caso, i.e., $t \notin U_0$, $g(\varphi(t)) = g(x_0)$ y, por otro lado, $\varphi(g(t))) = g(x_0)$ pues $g(t) \in \mathrm{Min}X \subseteq U_0$. Para la monotonicidad supongamos que $t_1 \leq t_2$ en $\mathbf{X}$. Si $t_1 \in U_0$ y $t_2 \in U_0$, entonces $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = g(x_0)$. Si

$t_1 \in U_0$ y $t_2 \notin U_0$, entonces $\varphi(t_1) = g(x_0) < x_0 = \varphi(t_2)$. Si $t_1 \notin U_0$ y $t_2 \notin U_0$, entonces $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = x_0$. El caso $t_1 \notin U_0$ y $t_2 \in U_0$ no ocurre ya que U_0 es decreciente. Finalmente, ya que $x_0 \notin U_0$, $\varphi(x_0) = x_0$ y de esto se sigue de inmediato la idempotencia de φ. □

Observe que la aplicación dual de φ es un homomorfismo de tres valore: $0, 1$ y el tercero es un elemento denso, es decir, con pseudo-complemento 0. Ahora, para $x \in X \setminus \mathrm{Min}X$ arbitrario defina $\varphi_x : X \longrightarrow X$ por medio de la receta

$$\varphi_x(t) = \begin{cases} g(x) & \text{si } t \in U_0, \\ x & \text{si } t \notin U_0. \end{cases}$$

Se ve de inmediato que, al igual que φ (la verificación de tal hecho es la misma), $\varphi_x \in \mathrm{End}(\mathbf{X}, g)$. Además,

$$\varphi_x\varphi = \varphi_x, \quad \varphi_{x_0} = \varphi \ \text{ y } \ \varphi_x(x_0) = x. \tag{1}$$

Proposición 4.3. *Sean $(\mathbf{X}_1, g)$ y $(\mathbf{X}_2, g)$ y Φ justo como en la Proposición 4.1. Para $x \in X_1 \setminus MinX_1$ considere el endomorfismo φ_x definido previamente. Entonces existe $y \in X_2 \setminus MinX_2$ tal que la imagen de $\Phi(\varphi_x)$ es un endomorfismo ρ_y de dos valores $g(y), y$. Además, si $x \neq x_1 \in X_1 \setminus MinX_1$ y $\Phi(\varphi_{x_1}) = \rho_{y_1}$ entonces $y \neq y_1$.*

Demostración. Observe primero que para $u \in \mathrm{Min}X_1$ se tiene $\varphi_x\kappa_u = \kappa_{g(x)}$. Note además que $\Phi(\varphi_x)$ tiene mas de dos valores; ciertamente, debido a la observación hecha justo antes de la Proposición 4.1, tiene un valor digamos $v \in \mathrm{Min}X_2$. Suponga que ese es el único valor, es decir, suponga que $\Phi(\varphi_x) = \kappa_v$; pero esto implica que $\varphi_x = \Phi^{-1}(\kappa_v)$ lo cual es una contradicción pues, debido a la Proposición 4.1, resultaría que φ_x es constante. Afirmamos ahora que $\Phi(\varphi_x)$ tiene un único valor minimal; para esto fijemos $u \in \mathrm{Min}X_2$. Por la Proposición 4.1, existe $v \in \mathrm{Min}X_1$ y $z \in \mathrm{Min}X_2$ tales que $\Phi^{-1}(\kappa_u) = \kappa_v$ y $\Phi(\kappa_{g(x)}) = \kappa_z$. Tenemos entonces para todo $y \in X_2$ lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi_x)(u) &= \Phi(\varphi_x)\kappa_u(y) \\ &= \Phi(\varphi_x\Phi^{-1}(\kappa_u))(y) \\ &= \Phi(\varphi_x\kappa_v)(y) \\ &= \Phi(\kappa_{g(x)})(y), \\ &= \kappa_z(y) = z. \end{aligned}$$

Lo anterior prueba que z es el único valor minimal de $\Phi(\varphi_x)$. Suponga ahora que $\Phi(\varphi_x)$ tien dos valores no minimales $y_1 \neq y_2$ en $X_2 \setminus \mathrm{Min}X_2$ y sean $v_1 \neq v_2$ en $X_2 \setminus \mathrm{Min}X_2$ (necesariamente) tales que $\Phi(\varphi_x)(v_1) = y_1$ y $\Phi(\varphi_x)(v_2) = y_2$. Note que por el argumento precedente se tiene necesariamente que $g(y_1) = g(y_2) = z$. Entonces podemos escribir

$$\Phi(\varphi_x)\varphi_{v_i}(t) = \varphi_{y_i}(t), \quad \forall\, t \in X_2, \ \ i = 1, 2,$$

donde las φ_{v_i} se definen en $\mathbf{X}_2$ como se explico antes. Ponga $\psi_{xv_i} = \varphi_x \Phi^{-1}(\varphi_{v_i})$, $i = 1, 2$; así, $\Phi(\psi_{xv_i}) = \varphi_{y_i}$. Observe que la imagen de ψ_{xv_i} es $\{g(x), x\}$ o $\{g(x)\}$ y que $\psi_{xv_1}\psi_{xv_2} = \psi_{xv_2}$. Por tanto, $\varphi_{y_1}\varphi_{y_2} = \varphi_{y_2}$ de donde $y_1 = y_2$ (ya que los valores de $\varphi_{y_1}\varphi_{y_2}$ son z, y_1 y los de φ_{y_2} son z, y_2).

Para probar la segunda afirmación, ponga $\Phi(\varphi) = \rho$ y observe que debido a (1), $\rho_y \rho = \rho_y$ e igualmente, $\rho_{y_1}\rho = \rho_{y_1}$. Sean $g(y_0), y_0$ los valores de ρ y sea $V_0 = \rho^{-1}(g(y_0))$ (observe que V_0 es clopen decreciente). Entonces necesariamente ρ_y toma el valor y precisamente en $X_2 \setminus V_0$ y ρ_{y_1} toma el valor y_1 allí mismo. Entonces

$$y = y_1 \Longrightarrow \rho_y = \rho_{y_1} \Longrightarrow \varphi_x = \varphi_{x_1} \Longrightarrow x = x_1.$$

□

5 Teorema central

Ya estamos casi listos para la prueba del resultado central. Solo necesitamos dos lemas más para tener el camino completamente despejado.

Lema 5.1. *Sea $(\mathbf{X}, g)$ un espacio de Ockham cuya álgebra dual es de Stone. Sean $y \in X$ y $z \in Min\mathbf{X}$ tales que $z \not\leq y$. Entonces existe $\alpha \in End(\mathbf{X})$ tal que $\alpha(z) \neq \alpha(y)$ y $\{\alpha(z), \alpha(y)\} \subseteq Min\mathbf{X}$.*

Demostración. Observe primero que como X es un espacio de Priestley, $\{g(y)\}$ es cerrado y por tanto $g^{-1}(\{g(y)\}) = g(y)^{\uparrow} = \{v \in X : v \geq g(y)\}$ es compacto. Note que si $x \in g(y)^{\uparrow}$, $z \not\leq x$ ($z \leq x$ implica $g(x) = g(z) = z$. Por otro lado, $g(y) \leq x$ implica $g(y) = g(x)$. Entonces $y \geq g(y) = g(z) = z$, da una contradicción). Se sigue pues por el clásico argumento de compacidad que existe un clopen decreciente Z tal que $g(y)^{\uparrow} \subseteq Z$ y $z \notin Z$. Defina la función buscada $\alpha : X \longrightarrow X$ por medio de la prescripción

$$\alpha(t) = \begin{cases} z & \text{si } t \notin Z, \\ g(y) & \text{si } t \in Z. \end{cases}$$

Es rutina verificar que α, así definida, es la aplicación deseada. □

Lema 5.2. *Sea $(\mathbf{X}, g)$ un espacio de Ockham cuya álgebra dual es de Stone. Sean $y \in X$ y $x \notin Min\mathbf{X}$ tales que $x \not\leq y$. Entonces existe $\alpha \in End(\mathbf{X})$ tal que $\alpha(x) \not\leq \alpha(y)$.*

Demostración. Claramente, si $z \in \mathrm{Min}\mathbf{X}$ entonces $x \not\leq z$. De nuevo por compacidad, existe U clopen decreciente tal que $\{y\} \cup \mathrm{Min}\mathbf{X} \subseteq U$ y $x \notin U$. La función deseada es la dada por la receta

$$\alpha(t) = \begin{cases} x & \text{si } t \notin U, \\ g(x) & \text{si } t \in U. \end{cases}$$

Observe que $x = \alpha(x) \not\leq g(x) = \alpha(y)$. □

Teorema 5.3. *Sean* $(\mathbf{X}_1, g)$ *y* $(\mathbf{X}_2, g)$ *espacios de Ockham cuyas álgebras duales son de Stone y sea* $\Phi : End(\mathbf{X}_1, g) \longrightarrow End(\mathbf{X}_2, g)$ *un isomorfismo de monoides. Sea* $u \in Min\mathbf{X}_1$. *Entonces la relación*

$$\xi(x) = y \iff \begin{cases} \Phi(\varphi_x) = \rho_y & si\ x \notin Min(\mathbf{X}_1), \\ \Phi(\kappa_x) = \kappa_y & si\ x \in Min(\mathbf{X}_1), \end{cases}$$

donde φ_x *y* ρ_y *son como al final dela sección precedente, define simultáneamente un homeomorfismo e isomorfismo de orden de* $(\mathbf{X}_1, g)$ *sobre* $(\mathbf{X}_2, g)$.

Demostración. Primero observe que la relación que define ξ tiene perfecto sentido gracias a las proposiciones 4.1 y 4.3. De hecho en la Proposición 4.3 se prueba que ξ es inyectiva. Para la sobreyectividad, dado $y \in X_2 \smallsetminus \mathrm{Min}X_2$ defina ϱ_y por medio de la receta

$$\varrho(t) = \begin{cases} y & \text{si } t \notin V_0, \\ g(y) & \text{si } t \in V_0, \end{cases}$$

donde, recordemos, $V_0 = \rho^{-1}(g(y_0))$ y $\Phi(\varphi) = \rho$ siendo $y_0, g(y_0)$ los dos valores de ρ. Se observa primero que todo que $\varrho_y \rho = \varrho_y$. Ahora, por la Proposición 4.3, $\Phi^{-1}(\varrho_y)$ tiene dos valores: $x \in X_1$ y $g(x) \in \mathrm{Min}X_1$. Si ponemos $\Phi^{-1}(\varrho_y) = \tau_x$, entonces se tiene $\tau_x\varphi = \tau_x$ y de ahí obtenemos $\tau_x = \varphi_x$ de manera que $\xi(x) = y$. Es claro que si $y \in \mathrm{Min}\mathbf{X}_2$, $\xi(x) = y$, donde x es el valor constante de $\Phi^{-1}(\kappa_y)$. Observe que de la definición de ξ se sigue por una comprobación directa que

$$\Phi(\alpha)\xi = \xi\alpha \quad \forall \alpha \in \mathrm{End}(\mathbf{X}_1). \tag{2}$$

Para verificarlo consideramos dos casos: primero, $t \in \mathrm{Min}\mathbf{X}_1$. En este caso, denotando $\xi(t)$ por u tenemos

$$\Phi(\alpha)\xi(t) = \Phi(\alpha)(u) = \Phi(\alpha)\kappa_{\xi(t)}(u) = \\ \Phi(\alpha)\Phi(\kappa_t)(u) = \Phi(\alpha\kappa_t)(u) = \Phi(\kappa_{\alpha(t)})(u) = \kappa_{\xi(\alpha(t))}(u) = \xi(\alpha(t)).$$

El segundo caso es $t \notin \mathrm{Min}\mathbf{X}_1$. Consideramos dos sub-casos: el primero, $\alpha(t) \in \mathrm{Min}\mathbf{X}_1$. En este sub-caso recordamos que $\rho = \Phi(\varphi)$ tiene dos valores, digamos y_0 y $g(y_0)$, y que para todo $y \in X_2 \smallsetminus \mathrm{Min}(X_2)$, $\rho_y(y_0) = y$. Asi tenemos que

$$\Phi(\alpha)\xi(t) = \Phi(\alpha)\rho_{\xi(t)}(y_0) = \Phi(\alpha)\Phi(\varphi_t)(y_0) = \\ \Phi(\alpha\varphi_t)(y_0) = \Phi(\kappa_{\alpha(t)})(y_0) = \kappa_{\xi(\alpha(t))}(y_0) = \xi(\alpha(t)).$$

En el segundo sub-caso, $\alpha(t) \notin \mathrm{Min}\mathbf{X}_1$, tenemos

$$\Phi(\alpha)\xi(t) = \Phi(\alpha)\rho_{\xi(t)}(y_0) = \Phi(\alpha)\Phi(\varphi_t)(y_0) = \\ \Phi(\alpha\varphi_t)(y_0) = \Phi(\varphi_{\alpha(t)})(y_0) = \rho_{\xi(\alpha(t))}(y_0) = \xi(\alpha(t)).$$

De (2) se concluye fácilmente que

$$\xi(\alpha^{-1}(v)) = \Phi(\alpha)^{-1}(\xi(v)) \quad \forall \alpha \in \mathrm{End}(\mathbf{X}_1),\ \forall v \in X_1. \tag{3}$$

Veamos ahora que ξ preserva el orden. Para esto supongamos que $x_1 \leq x_2$ en $\mathbf{X}_1$. Si x_1 y x_2 son minimales no hay nada que probar. Si x_1 es minimal y x_2 no lo es, por definición de ξ, $\xi(x_1)$ es minimal. Si $\xi(x_1) \nleq \xi(x_2)$, por el Lema 5.1, existe $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbf{X}_2)$ de solo dos valores (minimales) tal que $\alpha(\xi(x_1)) \neq \alpha(\xi(x_2))$, es decir, $\Phi(\alpha')(\xi(x_1)) \neq \Phi(\alpha')(\xi(x_2))$, donde α' es la imagen inversa de α por Φ. De esto se infiere gracias a (2) que $\xi\alpha'(x_1) \neq \xi\alpha'(x_2)$. Pero $\alpha'(x_1) \leq \alpha'(x_2)$ (pues α' preserva el orden). Entonces, ya que $\alpha'(x_1) = \alpha'(x_2)$ implica $\xi\alpha'(x_1) = \xi\alpha'(x_2)$ se debe tener entonces $\alpha'(x_1) < \alpha'(x_2)$ y por tanto $\alpha'(x_2)$ no es minimal y consecuentemente tampoco lo es $\xi\alpha'(x_2)$; pero si lo es, como se vio arriba, luego estamos en una contradicción. Resta considerar el caso en que x_1 es no minimal. Si $\xi(x_1) \nleq \xi(x_2)$, por el Lema 5.2, existe $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbf{X}_2)$ de dos valores comparables tal que $\alpha(\xi(x_1)) \nleq \alpha(\xi(x_2))$. Sea, como en el caso anterior, $\alpha' \in \mathrm{End}(\mathbf{X}_1)$ tal que $\Phi(\alpha') = \alpha$. Entonces, por (2), tenemos $\xi\alpha'(x_1) \nleq \xi\alpha'(x_2)$. Pero $\alpha'(x_1) \leq \alpha'(x_2)$. Evidentemente no puede ser $\alpha'(x_1) = \alpha'(x_2)$. Pero tampoco puede ser $\alpha'(x_1) < \alpha'(x_2)$ porque entonces $\alpha'(x_1)$ sería minimal (se puede demostrar en general que la imagen por Φ^{-1} de un endomorfismo de dos valores comparables resulta ser un endomorfismo de dos valores comparables) y por la definición de ξ, así mismo seria $\xi\alpha'(x_1)$ lo cual es una contradicción.

Para probar que ξ es un homeomorfismo observe que los clopen dados en los lemas 5.1 y 5.2, que son imágenes inversas por endomorfismos de dos valores (de uno de los dos valores), haciendo variar a x y y, forman una subbase para la topología de $\mathbf{X}_1$ (su unión es todo X_1). Sea $U = \alpha^{-1}(g(y))$, $y \in X_1$, uno de esos clopen. Entonces $\xi(U) = \xi(\alpha^{-1}(g(y)) = \Phi(\alpha)^{-1}(\xi(g(y)))$. Ahora tenga en cuenta que $\Phi(\alpha)$ es endomorfismo de $\mathbf{X}_2$ también de dos valores y por lo tanto $\xi(U)$, que es la imagen inversa por $\Phi(\alpha)$ de $\xi(g(y))$, es cerrado y su complemento, que es la imagen inversa por $\Phi(\alpha)$ del otro valor, es también cerrado (los espacios son Hausdorff) y por tanto $\xi(U)$ es clopen en $\mathbf{X}_2$. Se concluye que siendo ξ un isomorfismo de orden, las imágenes por ξ de los elementos de la subbase mencionada de $\mathbf{X}_1$ forman una subbase para la topología de $\mathbf{X}_2$ y por lo tanto, ξ es un homeomorfismo.

□

Teorema 5.4. *Dos álgebras de Stone con monoides de endomorfismos isomorfos son necesariamente isomorfas. En otras palabras, una álgebra de Stone queda completamente determinada por su monoide de endomorfismos.*

Demostración. Se sigue del teorema precedente y el Teorema 3.2. □

Referencias

[1] Adams, M. E. & Priestley, H.: Kleene algebras are almost universal, Bull. Austral. Math. Soc., 34(1986) 343–373.

[2] Adams, M. E., Koubek, V. & Sichler, J.: Homomorphisms and endomorphisms in the variety of pseudocomplemented distributive lattices (with applications to Heyting algebras), Trans. Amer. Math. Soc., 285(1984), 57–79.

[3] Berman, J.: Distributive lattices with an additional unary operation, Aequationes Mathematicae 16(1977), 165–171

[4] Blyth, T. S. & Varlet, J. C.: Ockham Algebras, Oxford University Press, Oxford, NewYork, Tokio, 1994.

[5] Chen C. & Grätzer, G.: Stone lattices: Construction theorems, Canad. J. Math. 21 (1969), 884–894.

[6] Lee, K. B.: Equational classes of pseudocomplemented distributive lattices, Canad. J. Math. Soc., 156(1970), 881–891.

[7] McKenzie, R. M. & Tsinakis, C.: On recovering a bounded distributive lattice from its endomorphism monoid, Houston J. Math., 7 (1981), 525–529.

[8] Magill, K. D.: The semigroup of endomorphisms of a Boolean ring, J. Aus. Math Soc., 11 (1970), 411–416.

[9] Maxon, C. J.: On semigroups of Boolean ring endomorphism, Semigroup Forum, **4** (1972), 78–82.

[10] Schein, B. M.: Ordered sets, semilattices distributive lattices and Boolean algebras with homorphic endomorphism semigroup, Fundamenta Mathematicae, LXVIII (1970), 31–50.

[11] Priestley, H.: Stone lattices: a topological approach, Fund. Math, 84 (1974), 127–143.

[12] Ribenboim, P.: Characterization of the sup-complemented in a distributive lattice with last element, Summa Brasil Math, 2(1949), 43–49.

[13] Urquhart, A.: Distributive lattices with a dual homorphic operation, Studia Logica, 38 (1979), 201–209.

Dirección de los autores
Hernando Gaitán — Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C.-Colombia
e-mail: `hgaitano@unal.edu.co`
Juan Pablo Quijano — Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C.-Colombia
e-mail: `jpquijanol@unal.edu.co`