Vol. XVII, N$^{\underline{o}}$ 1, Junio (2009)
Matemáticas: 35–56

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Realización de acciones de grupo en superficies de Riemann compactas de géneros 2 y 3

Martha Judith Romero Rojas
Universidad del Cauca

Recibido Oct. 5, 2008 Aceptado En. 23, 2009

Abstract

The automorphism groups of compact Riemann surfaces of genus 2 and 3 have been studied extensively. Here a realization for each automorphism group is shown, a Riemann surface via compact algebraic curves is represented and generators for each automorphism group are explicitly exhibited.

Keywords: Riemann surfaces, automorphisms.

MSC(2000): 14H37, 14H55.

Resumen

Los grupos de automorfismos de superficies de Riemann compactas de géneros 2 y 3 han sido estudiados ampliamente. Aquí se da una realización para cada grupo de automorfismos, se representa una superficie de Riemann compacta vía curvas algebraicas y se muestran explícitamente los generadores de cada grupo de automorfismos.

Palabras y frases claves: Superficies de Riemann, automorfismos.

1 Introducción

Se dice que un grupo finito G actúa en género $\mathtt{g}$ si G es isomorfo a un grupo de automorfismos de alguna superficie de Riemann compacta $\mathcal{W}$ de género $\mathtt{g}$. Estudios sobre clases especiales de grupos que actuan en superficies de Riemann compactas han sido realizados por varios autores y se conocen interesantes resultados, por ejemplo para grupos simples, grupos cíclicos, supersolubles, nilpotentes y abelianos, ver detalles (entre otros) en [4], [5], [6], [8], [13] y [17].

Sea $\mathcal{W}$ una superficie de Riemann compacta de género $\mathtt{g}$ y sea G un subgrupo no-trivial del grupo de automorfismos de $\mathcal{W}$, $Aut(\mathcal{W})$. Para cada valor fijo de $\mathtt{g}$, existe solamente un número finito de grupos G los cuales actuan en $\mathcal{W}$, debido a estudios realizados sobre grupos finitos y a un conocido resultado de Hurwitz [9] que establece que el orden de G es limitado superiormente por $84(\mathtt{g}-1)$, véase también [1]. Para valores pequeños de $\mathtt{g}$, se conoce la lista completa de todos los grupos de automorfismos de superficies de Riemann compactas, detalles de ésta pueden ser vistos en [3], [12], [14], [15], [16] y [19]. Un importante trabajo de Thomas Breuer [2], publicado en el año 2000, presenta una clasificación de todos los grupos que actuan en superficies de Riemann compactas de género $\mathtt{g}$, con $2 \leq \mathtt{g} \leq 48$.

Para $\mathtt{g} \geq 2$, sea $\mathbf{N}(\mathtt{g})$ el orden del mayor grupo de automorfismos de $\mathcal{W}$. Existen varios trabajos sobre el problema de hallar grupos G tales que su orden $|G| = \mathbf{N}(\mathsf{g}) = 84(\mathsf{g}-1)$, (grupos de Hurwitz). No existen superficies de géneros $2, 4, 5$ y 6 con tal propiedad. En [10], Klein muestra que existe una única superficie de género 3 sobre la cual actua $G = PSL(2,7)$, el grupo proyectivo lineal sobre el cuerpo de 7 elementos (nótese que $|PSL(2,7)| = 168 = 84(3-1)$).

Si $\mathbf{N}(\mathsf{g}) < 84(\mathsf{g}-1)$, entonces la determinación de $\mathbf{N}(\mathsf{g})$ concierne a dos problemas: el *Problema de existencia*: Mostrar que existe una superficie de Riemann de género g admitiendo un grupo de automorfismos de orden $\mathbf{N}(\mathsf{g})$ y el *Problema de eliminación*: Mostrar que tal superficie no admite más automorfismos.

La estructura algebraica de un grupo G dado juega un papel importante en la determinación del género de una superficie de Riemann admitiendo G. Así, el problema de hallar superficies admitiendo grupos de automorfismos de orden maximal puede ser visto como un problema grupo-teórico.

En este artículo, se representa una superficie de Riemann compacta, vía curvas algebraicas. Para esto, se parte de una superficie de Riemann contenida en $\mathbb{CP}^2$, definida por una curva algebraica irreducible y ella misma o su normalización es una superficie de Riemann compacta, para la cual se presentan explícitamente los generadores del grupo de automorfismos. Para la obtención de los resultados incluidos en este trabajo se usaron algunos recursos computacionales: En el sistema algebraico computacional GAP (Grupos, Algoritmos y Programación), que hace énfasis en teoría de grupos, se implementaron rutinas para hallar el género de una superficie cociente intermedia y para encontrar la firma con la que actua un grupo, dado el género de la superficie y el orden del grupo. Además se utilizó el programa matemático Maple, el cual contiene un paquete de curvas algebraicas que permite determinar el género de una curva algebraica. En este programa se implementó una rutina para realizar los cálculos requeridos con los automorfismos encontrados.

2 Preliminares

Definición 2.1. *Un grupo G* actua en género g *si G es módulo isomorfismos un grupo de automorfismos de alguna superficie de Riemann compacta $\mathcal{W}$ de género g. Se dice que G* actua como grupo completo en género g *si G es el grupo (completo) de automorfismos de alguna superficie de Riemann compacta $\mathcal{W}$ de género g.*

Supóngase que G actua en género g y sea $\mathcal{W}$ una superficie de Riemann compacta de género g, para la cual $G \subseteq Aut(\mathcal{W})$. Se escribe $G = \Gamma/\Lambda$ donde Γ y Λ son grupos Fuchsianos y Λ es subgrupo normal de Γ, con signatura $(\mathsf{g}; -)$. Si Γ tiene signatura $(\gamma; m_1, m_2, ..., m_r)$, se dice que G actua en género g con signatura $(\gamma; m_1, m_2, ..., m_r)$ y si $G = Aut(\mathcal{W})$, se dice que G actua, como grupo completo de automorfismos en género g con signatura $(\gamma; m_1, m_2, ..., m_r)$. Se puede dar que G actuó con diferentes signaturas en género g.

Nótese que en el caso de la signatura, $(\gamma; m_1, m_2, ..., m_r)$, la superficie cociente, tiene estructura de superficie de Riemann compacta de género γ y $\mathcal{W} \to$

$\mathcal{W}_G$ es un cubrimiento ramificado, que puede ser caracterizado por la signatura o firma $(\gamma; m_1, m_2, ..., m_r)$. Los enteros $m_1, m_2, ..., m_r$ involucrados satisfacen la fórmula de Riemann-Hurwitz:

$$2\mathtt{g} - 2 = \mid G \mid \left[2\gamma - 2 + \sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right)\right]$$

de la cual se obtiene la cota de Hurwitz:

$$\mid G \mid \leq 84(\mathtt{g} - 1).$$

Definición 2.2. *Un $2\gamma + r$ arreglo:*

$$(a_1, a_2, ..., a_\gamma, b_1, b_2, ..., b_\gamma, c_1, c_2, ..., c_r)$$

de elementos de G se dice un $(\gamma; m_1, m_2, ..., m_r)$-vector generador si satisface:

- $G = \langle a_1, a_2, ..., a_\gamma, b_1, b_2, ..., b_\gamma, c_1, c_2, ..., c_r\rangle$
- *orden* $(c_i) = m_i$ *y*
- $\prod_{i=1}^{\gamma}[a_i, b_i]\prod_{j=1}^{r} c_j = 1.$

Teorema 2.3 (Teorema de Riemann de existencia)**.** *Un grupo finito G actua en la superficie $\mathcal{W}$, de género $\mathtt{g}$, con firma $(\gamma; m_1, m_2, ..., m_r)$ si y sólo si:*

- *La ecuación de Riemann-Hurwitz se satisface, y*
- *G tiene un $(\gamma; m_1, m_2, ..., m_r)$-vector generador.*

3 Acciones de grupos en superficies de Riemann compactas

En esta sección se incluirá la clasificación completa de la acción de grupos finitos, módulo equivalencia topológica, en superficies de Riemann compactas de género 2 y 3. Dicha clasificación requiere algunos resultados que se presentan a continuación.

Acciones equivalentes

El teorema 2.3 garantiza, bajo ciertas condiciones, la existencia de una superficie de Riemann compacta con acción de un grupo finito G, sin embargo se requiere saber cuando estas acciones son equivalentes. En este sentido se presenta la definición de acciones equivalentes:

Definición 3.1. ***Acciones Equivalentes*** *Sea* $\mathcal{W}$ *una superficie orientable de género* g*,* $Hom^+(\mathcal{W})$ *su grupo de homeomorfismos preservando orientación y* G *un grupo finito. Se dice que* G *actua (efectivamente) en* $\mathcal{W}$ *si existe un monomorfismo* $\varepsilon : G \to Hom^+(\mathcal{W})$*.*

Si $\varepsilon' : G \to Hom^+(\mathcal{W})$ *es otra acción, entonces se dice que* $\varepsilon, \varepsilon'$ *son (topológicamente) equivalentes si existe un* $\omega \in Aut(G)$ *y un* $h \in Hom^+(\mathcal{W})$ *tal que:*

$$\varepsilon'(g) = h\varepsilon(\omega(g))h^{-1} \tag{1}$$

Toda acción de G en $\mathcal{W}$ puede ser construida por medio de un par de grupos Fuchsianos $K \lhd G^* \subset PSL(2,\mathbb{R})$ actuando discontinuamente en el semiplano superior complejo $\mathbb{H}$ (el cubrimiento universal de $\mathcal{W}$, $\mathsf{g}(\mathcal{W}) \geq 2$) y un epimorfismo $\eta : G^* \to G$ con núcleo K. El grupo K es libre de torsión e isomorfo a $\pi_1(\mathcal{W})$. La función η se construye a partir de ε y un homeomorfismo de $\mathbb{H}/K \to \mathcal{W}$. Se sabe que G^* tiene la presentación:

$$G^* \cong \left\langle \alpha_i, \beta_i, \rho_j : 1 \leq i \leq \gamma, 1 \leq j \leq r, \prod_{i=1}^{\gamma}[\alpha_i, \beta_i] \prod_{j=1}^{r} \rho_j = \rho_1^{m1} = ... = \rho_r^{mr} = 1 \right\rangle \tag{2}$$

identificando los α_i, β_i, γ_j con sus imágenes en G^*, se sabe que:

$$|\rho_j| = m_j. \tag{3}$$

Si definimos los elementos:

$$a_i = \eta(\alpha_i), b_i = \eta(\beta_i), 1 \leq i \leq \gamma, c_j = \eta(\rho_j), 1 \leq j \leq r.$$

Estos elementos generan G,

$$\prod_{i=1}^{\gamma}[a_i, b_i] \prod_{j=1}^{r} c_j = 1$$

y

$$|c_j| = m_j,$$

dado que $Ker(\eta)$ es libre de torsión y se satisfacen las fórmulas 2 y 3.

La relación de equivalencia de acciones induce una relación de equivalencia entre vectores generadores.

Sean ε, ε', ω, h, como en (1), η, η' : $G^* \to G$ las funciones descritas anteriormente. La función h se levanta a un automorfismo preservando orientación h^* de $\mathbb{H}$ tal que $h^*G(h^*)^{-1}$, produciendo un automorfismo $\phi : G^* \to G^*$ definido por:

$$\phi(g) = h^*g(h^*)^{-1}. \tag{4}$$

Así, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G^* \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\phi"'] & G \arrow[d, "\omega"] \\ G^* \arrow[r, "\eta'"] & G \end{tikzcd}$$

de donde resulta:

$$\eta\prime = \omega \circ \eta \circ \phi^{-1} \tag{5}$$

Sea $\mathcal{B}$ el subgrupo de $Aut(G^*)$ inducido por los homeomorfismos que preservan orientación como en la fórmula 4. El grupo $Aut(G) \times \mathcal{B}$ actua en el conjunto:

$$\{\eta : G^* \to G, \eta \text{ sobreyectiva }, Ker(\eta) \text{ libre de torsion}\}$$

por la fórmula 5 y entonces actua en el vector generador de G, $(\gamma; m_1, m_2, ..., m_r)$. De donde se obtiene:

Teorema 3.2. *Dos vectores generadores del grupo finito G definen la misma clase de equivalencia de G-acciones si y sólo si el vector generador pertenece a la misma clase $Aut(G) \times \mathcal{B}$.*

Algunos resultados importantes para la clasificación de acciones de grupos en superficies de Riemann son citados a continuación:

Teorema 3.3. *Sea p un número primo, $p > 3$. El número de superficies de Riemann compactas, no equivalentes topológicamente con acción de $\mathbb{Z}_p$, primo con cociente de signatura $(0; p, p, p)$ es:*

$$\frac{p+5}{6} \;\; \boldsymbol{si} \;\; p \equiv 1(3)$$

$$o$$

$$\frac{p+1}{6} \;\; \boldsymbol{si} \;\; p \equiv -1(3)$$

Este resultado dice que para $p \geq 7$, hay al menos dos superficie de Riemann compactas (no equivalentes) con acción de $\mathbb{Z}_p$ y firma $(0; p, p, p)$. Estas superficies se denominan *Superficies de Lefschetz.*

Los resultados precedentes son usados para determinar los grupos que actuan en superficies de Riemann compactas de géneros 2 y 3. Por ejemplo:

1. **En género dos**. Sea G, tal que $|G| = 6$. Usando la ecuación de Riemann-Hurwitz se consiguen, para la firma, las posibilidades listadas en la tabla. En este caso se da también el grupo correspondiente.

Firma	Grupo
$(0;3,6,6)$	$\mathbb{Z}_6$
$(0;2,2,2,6)$	*no*
$(0;2,2,3,3)$	$\mathbf{S}_3, \mathbb{Z}_6$

En el primer caso, la firma $(0;3,6,6)$, es realizada por la acción del grupo $\mathbb{Z}_6 = < x >$, y se tienen dos posibilidades para elegir el vector generador: (x^4, x, x) y (x^2, x^{-1}, x^{-1}). Y dado que el grupo de automorfismos de $\mathbb{Z}_6$, es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, y sus elementos son de la forma $\Phi_i(x) = x^i$, $i = 1, 5$, es claro que:

$$(x^4, x, x) \xrightarrow{\Phi_5} (x^2, x^{-1}, x^{-1}),$$

de tal forma que las acciones son equivalentes.

La segunda firma es imposible de ser realizada por un grupo de orden seis.

En el tercer caso, se tiene la firma (0;2,2,3,3), que es realizada por la acción de los dos grupos de orden 6, $\mathbb{Z}_6 = < x >$ y $\mathbf{S}_3$. En efecto: Sea $G = \mathbb{Z}_6 = < x >$ se tiene el vector generador (x^3, x^3, x^2, x^4), que es la única posibilidad para elegir el vector generador.

Sea $G = \mathbf{S}_3 =< x, y : x^3 = y^2 = 1, xyxy = 1 >$. se tienen las siguientes posibilidades para vectores generadores:

a	**b**	**c**	**d**
$xy,$	y	$x,$	x
$y,$	x^2y	$x,$	x
$y,$	$xy,$	$x^{-1},$	x^{-1}
$y,$	$x^2y,$	$x^{-1},$	x^{-1}
$y,$	$y,$	$x,$	x^{-1}
$xy,$	$xy,$	$x,$	x^{-1}
$x^2y,$	$x^2y,$	$x,$	x^{-1}

sin embargo, se pueden reducir algunas de dichas posibilidades puesto que son equivalentes, esto es, existe un automorfismo de $\mathbf{S}_3$, que lleva un vector en otro. En particular se usaran automorfismos internos, que serán denotados por Φ_g, $g \in \mathbf{S}_3$, a saber: $\Phi_g(x) = gxg^{-1}$, para todo $x \in \mathbf{S}_3$. Así:

$$(xy, y, x, x) \begin{cases} \xrightarrow{\Phi_x} (y, x^2y, x, x) \\ \xrightarrow{\Phi_{x^2y}} (y, xy, x^{-1}, x^{-1}) \\ \xrightarrow{\Phi_y} (y, x^2y, x^{-1}, x^{-1}) \end{cases}$$

$$(y, y, x, x^{-1}) \begin{cases} \xrightarrow{\Phi_{x^2}} (xy, xy, x, x^{-1}) \\ \xrightarrow{\Phi_x} (x^2y, x^2y, x, x^{-1}) \end{cases}$$

Finalmente, se tienen dos posibilidades, (xy, y, x, x) y (y, y, x, x^{-1}) y puede ser probado que son equivalentes.

2. **En género 3**

   (a) Sea $G = \mathbb{Z}_7$, $|G| = 7$. Por la fórmula de Riemann-Hurwitz, se obtiene la firma $(0; 7, 7, 7)$ y si se considera $G =< x >$ se tienen $(6 * 5 = 30)$ posibilidades para elegir el vector generador, aunque en varios casos se obtienen vectores equivalentes, para simplificar, considérese el grupo de automorfismos de $\mathbb{Z}_7$, $Aut(\mathbb{Z}_7) \simeq \mathbb{Z}_6$, cuyos elementos son $\Phi_i(x) = x^i$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, así, si se eligen como vectores generadores:

$$(x, x, x^5) \begin{cases} \xrightarrow{\Phi_2} (x^2, x^2, x^3) \\ \xrightarrow{\Phi_3} (x^3, x^3, x) \\ \xrightarrow{\Phi_4} (x^4, x^4, x^6) \\ \xrightarrow{\Phi_5} (x^5, x^5, x^4) \\ \xrightarrow{\Phi_6} (x^6, x^6, x^2) \end{cases}$$

$$(x, x^2, x^4) \left\{ \xrightarrow{\Phi_3} (x^3, x^6, x^5) \right.$$

   Módulo automorfismos se tienen dos vectores generadores (x, x, x^5) y (x, x^2, x^4), los cuales corresponden a dos superficies que no son topológicamente equivalentes, según el teorema 3.3.

   (b) Sea G , tal que $|G| = 24$. Analizando las soluciones de la fórmula de Riemann-Hurwitz y usando la estructura de los grupos de orden 24 se obtiene la siguiente tabla:

Firma	**Grupo**
$(0; 3, 4, 4)$	$\mathbf{S}_4$
$(0; 3, 3, 6)$	$SL(2, 3)$
$(0; 2, 4, 12)$	D_{12}
$(0; 2, 2, 2, 3)$	$\mathbf{S}_4$

   para la firma (0;3,4,4). Recuérdese que en este caso, se está pensando en un vector generador (a, b, c), tal que $|a| = 3$, $|b| = 4$, $|c| = 4$, $|abc| = 1$. Particularmente el grupo $G \cong \langle a, b, c\rangle$ no tiene subgrupo de Sylow S normal para el primo $p = 2$, puesto que si $S \lhd G$, se tiene que b, $c \in S$, y $|G| = 8$. No tiene un subgrupo de Sylow normal para el primo $p = 3$, pues de lo contrario se toma $P = \langle a\rangle$ y se tiene que $G \cong \langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle$, así $|G| = 12$. De tal forma que G no tiene subgrupos de Sylow normales, luego es isomorfo a $\mathbf{S}_4$.

De acuerdo al articulo [3] de S. M. Broughton la lista completa de todos los grupos que actuan en superficies de Riemann de géneros 2 y 3 están consignados en las

Tabla 1: Acción de Grupos Finitos en Superficies de género 2.

Grupo	$\mid G \mid$	Firma	Presentación	Vector Generador
$\mathbb{Z}_2$	2	(2^6)	$\langle x : x^2 = 1\rangle$	(x, x, x, x, x, x)
$\mathbb{Z}_2$	2	$(1; 2^2)$	$\langle x : x^2 = 1\rangle$	$(1, 1, x, x)$
$\mathbb{Z}_3$	3	(3^4)	$\langle x : x^3 = 1\rangle$	(x, x, x^{-1}, x^{-1})
$\mathbb{Z}_4$	4	$(2^2, 4^2)$	$\langle x : x^4 = 1\rangle$	(x^2, x^2, x, x^{-1})
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	4	(2^5)	$\langle x, y : x^2 = y^2 = [x, y] = 1\rangle$	(x, x, x, y, xy)
$\mathbb{Z}_5$	5	$(5, 5, 5)$	$\langle x : x^5 = 1\rangle$	(x, x, x^3)
$\mathbb{Z}_6$	6	$(3, 6, 6)$	$\langle x : x^6 = 1\rangle$	(x^4, x, x)
$\mathbb{Z}_6$	6	$(2^2, 3^2)$	$\langle x : x^6 = 1\rangle$	(x^3, x^3, x^2, x^4)
D_3	6	$(2^2, 3^2)$	$\langle x, y : x^2 = y^3 = 1, xyx^{-1} = y^{-1}\rangle$	(x, x, y, y^{-1})
$\mathbb{Z}_8$	8	$(2, 8, 8)$	$\langle x : x^8 = 1\rangle$	(x^4, x^3, x)
Q_8	8	$(4, 4, 4)$	$\langle x, y : x^4 = y^4 = 1, x^2 = y^2, xyx^{-1} = y^{-1}\rangle$	(x, y, xy)
D_4	8	$(2^3, 4)$	$\langle x, y : x^2 = y^4 = 1, xyx^{-1} = y^{-1}\rangle$	(x, xy, y^2, y)
$\mathbb{Z}_{10}$	10	$(2, 5, 10)$	$\langle x : x^{10} = 1\rangle$	(x^5, x^4, x)
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	12	$(2, 6, 6)$	$\langle x, y : x^2 = y^6 = [x, y] = 1\rangle$	(x, xy, y^{-1})
$D_{4,3,1}$	12	$(3, 4, 4)$	$\langle x, y : x^4 = y^3 = 1, xyx^{-1} = y^{-1}\rangle$	$(y, (xy)^{-1}, x)$
D_6	12	$(2^3, 3)$	$\langle x, y : x^2 = y^6 = 1, xyx^{-1} = y^{-1}\rangle$	(x, xy, y^3, y^2)
$D_{2,8,3}$	16	$(2, 4, 8)$	$\langle x, y : x^2 = y^8 = 1, xyx^{-1} = y^3\rangle$	$(x, (yx)^{-1}, y)$
$\mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$	24	$(2, 4, 6)$	$\langle x, y, z, w : x^2 = y^2 = z^2 = w^3 =$ $[y, z] = [y, w] = [z, w] = 1,$ $xyx^{-1} = y, xzx^{-1} = zy, xwx^{-1} = w^{-1}\rangle$	$(x, (zwx)^{-1}, zw)$
$SL_2(3)$	24	$(3, 3, 4)$	$\left\langle x, y : x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$	$(x, (yx)^{-1}, y)$
$GL_2(3)$	48	$(2, 3, 8)$	$\left\langle x, y : x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$	$(x, y, (xy)^{-1})$

tablas 1 y 2. Nótese que en la tabla 1 la presentación de los grupos SL(2,3) y GL(2,3) están dadas módulo 3 y en la tabla 2 las presentaciones de los grupos $PSL(2, 7)$ y $SL(2, 3)$ están dadas módulo 7 y módulo 3, respectivamente. Por conveniencia en la notación cuando el género de la superficie cociente es cero, se escribirá la firma: $(m_1, m_2, ..., m_r)$ en lugar de $(0; m_1, m_2, ..., m_r)$ y también firmas tales como $(2, 2, 2, 3, 3)$ se abreviarán escribiendo $(2^3, 3^2)$. La próxima sección será dedicada a la realización de los grupos que aparecen en dichas tablas.

4 Realización de acciones de grupos finitos en superficies de género pequeño

Esta sección empezará con la presentación de un par de ejemplos detallados de la realización de la acción de grupo en una superficie de Riemann compacta.

4.1 Ejemplos

1. Sea $\mathcal{W}$ la normalización de

$$\widetilde{\mathcal{W}} = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : y^2z^3 - x(x^2 - z^2)(x - az)(x - a^{-1}z) = 0\},$$

entonces para cada $a \in \mathbb{C}$, $a \notin \{0, 1, -1\}$, $\mathcal{W}$ es una superficie de Riemann compacta de género 2, esto muestra un ejemplo de una familia de superficies de Riemann compactas con acción del grupo diedral $\mathbf{D}_4$.

Para hallar los automorfismos de la superficie, se considera el automorfismo ϕ definido por:

$$\phi([x, y, z]) = [x, -y, z]$$

Tabla 2: Acción de Grupos Finitos en Superficies de género 3.

Grupo	$\mid G \mid$	**Firma**	**Presentación**	**Vector Generador**
$\mathbb{Z}_2$	2	(2^8)	$\langle x : x^2 = 1 \rangle$	(x, x, x, x, x, x, x, x)
$\mathbb{Z}_2$	2	$(1; 2^4)$	$\langle x : x^2 = 1 \rangle$	$(1, 1, x, x, x, x)$
$\mathbb{Z}_2$	2	$(2; -)$	$\langle x : x^2 = 1 \rangle$	$(x, 1, 1, 1)$
$\mathbb{Z}_3$	3	(3^5)	$\langle x : x^3 = 1 \rangle$	(x, x, x, x, x^{-1})
$\mathbb{Z}_3$	3	$(1; 3^2)$	$\langle x : x^3 = 1 \rangle$	$(1, 1, x, x^{-1})$
$\mathbb{Z}_4$	4	(4^4)	$\langle x : x^4 = 1 \rangle$	(x, x, x, x)
$\mathbb{Z}_4$	4	$(2^3, 4^2)$	$\langle x : x^4 = 1 \rangle$	(x^2, x^2, x^2, x, x)
$\mathbb{Z}_4$	4	$(1; 2^2)$	$\langle x : x^4 = 1 \rangle$	$(x, 1, x^2, x^2)$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	4	(2^6)	$\langle x, y : x^2 = y^2 = [x, y] = 1 \rangle$	(x, x, y, y, xy, xy)
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	4	$(1; 2^2)$	$\langle x, y : x^2 = y^2 = [x, y] = 1 \rangle$	$(y, 1, x, x)$
$\mathbb{Z}_6$	6	$(2^2, 6^2)$	$\langle x : x^6 = 1 \rangle$	(x^3, x^3, x, x^{-1})
$\mathbb{Z}_6$	6	$(2, 3^2, 6)$	$\langle x : x^6 = 1 \rangle$	(x^3, x^4, x^4, x)
$\mathbb{S}_3$	6	$(2^4, 3)$	$\langle x, y : x^2 = y^3 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	(x, x, x, xy^{-1}, y)
S_3	6	$(1; 3)$	$\langle x, y : x^2 = y^3 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	(x, xy, y)
$\mathbb{Z}_7$	7	$(7, 7, 7)$	$\langle x : x^7 = 1 \rangle$	(x, x, x^5)
$\mathbb{Z}_7$	7	$(7, 7, 7)$	$\langle x : x^7 = 1 \rangle$	(x, x^2, x^4)
$\mathbb{Z}_8$	8	$(4, 8, 8)$	$\langle x : x^8 = 1 \rangle$	(x^6, x, x)
$\mathbb{Z}_8$	8	$(4, 8, 8)$	$\langle x : x^8 = 1 \rangle$	(x^2, x, x^5)
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	8	$(2^2, 4^2)$	$\langle x, y : x^2 = y^4 = [x, y] = 1 \rangle$	(x, x, y^{-1}, y)
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	8	(2^5)	$\langle x : x^2 = 1 \rangle \times \langle y : y^2 = 1 \rangle \times \langle z : z^2 = 1 \rangle$	(x, y, z, yz)
D_4	8	$(2^2, 4^2)$	$\langle x, y : x^2 = y^4 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	(x, x, y^{-1}, y)
D_4	8	(2^5)	$\langle x, y : x^2 = y^4 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	(x, x, xy, xy^3, y^2)
D_4	8	$(1; 2)$	$\langle x, y : x^2 = y^4 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	(x, xy, y^2)
Q_8	8	$(1; 2)$	$\langle x, y : x^4 = y^4 = 1, x^2 = y^2, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	(x, y, x^2)
$\mathbb{Z}_9$	9	$(3, 9, 9)$	$\langle x : x^9 = 1 \rangle$	(x^3, x^5, x)
$\mathbb{Z}_{12}$	12	$(2, 12, 12)$	$\langle x, x^{12} = 1 \rangle$	(x^6, x^5, x)
$\mathbb{Z}_{12}$	12	$(3, 4, 12)$	$\langle x, x^{12} = 1 \rangle$	(x^8, x^3, x)
$D_{4,3,1}$	12	$(4, 4, 6)$	$\langle x, y : x^4 = y^3 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	(x, xy^{-1}, x^2y)
D_6	12	$(2^3, 6)$	$\langle x, y : x^2 = y^6 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	(x, xy^2, y^3, y)
A_4	12	$(2^2, 3^2)$	$\langle x, y : x = (1, 2)(3, 4), y = (1, 2, 3) \rangle$	(x, x, y, y^{-1})
$\mathbb{Z}_{14}$	14	$(2, 7, 14)$	$\langle x : x^{14} = 1 \rangle$	(x^7, x^6, x)
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$	16	$(2, 8, 8)$	$\langle x, y : x^2 = y^8 = [x, y] = 1 \rangle$	(x, xy^{-1}, y)
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	16	$(4, 4, 4)$	$\langle x, y : x^4 = y^4 = [x, y] = 1 \rangle$	$(x, y, (xy)^{-1})$
$D_{2,8,5}$	16	$(2, 8, 8)$	$\langle x, y : x^2 = y^8 = 1, xyx^{-1} = y^5 \rangle$	(x, xy^{-1}, y)
$D_{4,4,-1}$	16	$(4, 4, 4)$	$\langle x, y : x^4 = y^4 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$	$(x, (yx)^{-1}, y)$
$\mathbb{Z}_2 \times D_4$	16	$(2^3, 4)$	$\langle x : x^2 = 1 \rangle \times \langle y, z : y^2 = z^4 = 1, yzy^{-1} + z^{-1} \rangle$	(x, y, yxz^{-1}, z)
$\mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$	16	$(2^3, 4)$	$\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^4 = [y, z] = 1, [x, z] = 1,$ $xyx^{-1} = yz^2 \rangle$	$(x, xzy, y, z^{-1}),$ (x, xyz, z^2, z^2, xy)
$D_{3,7,2}$	21	$(3, 3, 7)$	$\langle x, y : x^3 = y^7 = 1, xyx^{-1} = y^2 \rangle$	$(x, (yx)^{-1}, y)$
$D_{2,12,5}$	24	$(2, 4, 12)$	$\langle x, y : x^2 = y^{12} = 1, xyx^{-1} = y^5 \rangle$	$(x, (yx)^{-1}, y)$
$\mathbb{Z}_2 \times A_4$	24	$(2, 6, 6)$	$\langle x : x^2 = 1 \rangle \times \langle x, y : x = (1, 2)(3, 4), y = (1, 2, 3) \rangle$	$(y, xz, x(yz)^{-1})$
$SL_2(3)$	24	$(3, 3, 6)$	$\left\langle x, y : x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$	$(x, y, (xy)^{-1})$
S_4	24	$(3, 4, 4)$	$\langle x, y : x = (1, 2, 3, 4), y = (1, 4, 3, 2) \rangle$	$((xy)^{-1}, x, y)$
S_4	24	$(2^3, 3)$	$\langle x, y, z : x = (1, 2), y = (2, 3), z = (3, 4) \rangle$	$(x, y, yxzy, yz)$
$\mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8)$	32	$(2, 4, 8)$	$\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^8 = [y, z] = 1, [x, y] = 1,$ $xzx^{-1} = yz^3 \rangle$	(x, xz, z^{-1})
$\mathbb{Z}_2 \ltimes D_{2,8,5}$	32	$(2, 4, 8)$	$\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^8 yzy^{-1} = z^5,$ $xyx^{-1} = yz^4 = xzx^{-1} = yz^3 \rangle$	(x, xz, z^{-1})
$\mathbb{Z}_2 \times S_4$	48	$(2, 4, 6)$	$\langle x : x^2 = 1 \rangle \times \langle y, z : y = (1, 2), z = (2, 3, 4) \rangle$	$(xy, (zy)^{-1}, xz)$
$\mathbb{Z}_3 \ltimes (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$	48	$(3, 3, 4)$	$\langle x, y, z : x^3 = y^4 = z^4 = [y, z] = 1, xyx^{-1} = z,$ $xzx^{-1} = (yz)^{-1} \rangle$	$(x, (xy)^{-1}, y)$
$S_3 \ltimes (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$	96	$(2, 3, 8)$	$\langle x, y, z, w : x^3 = y^4 = z^4 = w^4 = 1, [y, z] = 1xyx^{-1} = y^{-1},$ $xzx^{-1} = w, xwx^{-1} = z, yzy^{-1} = w, ywy^{-1} = (zw)^{-1} \rangle$	(xy^{-1}, yw, xz^{-1})
$PSL_2(7)$	168	$(2, 3, 7)$	$\left\langle x, y : x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$	$(x, y, (xy)^{-1})$

el cual, en el caso de las superficies hiperelípticas es un elemento del centro del grupo de automorfismos, ver [7, pag. 102], así $N = \langle \phi \rangle \lhd Aut(\mathcal{W})$ y se considera la acción de N en $\mathcal{W}$, la cual produce una superficie cociente $\mathcal{W}_N$ isomorfa a $\widehat{\mathbb{C}}$ con algunos puntos distinguidos, a saber -1, 1, a, $\frac{1}{a}$, 0, ∞, tales que cualquier automorfismo de $\widehat{\mathbb{C}}$ lleva al conjunto de estos puntos sobre si mismo, esto permite encontrar el grupo de automorfismos de la superficie cociente, el cual es, en este caso, isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, explícitamente:

$$Aut(\mathcal{W}_N) = \left\langle T_1(x) = \frac{1}{x}, T_2(x) = \frac{x-a}{ax-1} \right\rangle$$

Esto establece a $\mathbf{D}_4$ como grupo de automorfismos de $\mathcal{W}$. De hecho,

$$Aut(\mathcal{W}) = \langle \phi_1, \phi_2 : \phi_1^4 = \phi_2^2 = 1, \phi_2\phi_1\phi_2 = \phi_1^{-1} \rangle,$$

donde:

$$\begin{aligned}
&\phi_1(x,y,z) = (zx^2, iyz^2, x^3),\\
&\phi_2(x,y,z) = ((x-az)(ax-z)^2, (1-a^2)^{3/2}yz^2, (ax-z)^3).
\end{aligned}$$

Ahora, para $a = 2$, se tiene que la normalización de $\widetilde{\mathcal{W}} = \{[x,y,z] \in \mathbb{CP}^2 : y^2z^3 - x(x^2-z^2)(x-2z)(x-\frac{1}{2}z) = 0\}$ es la superficie de Riemann compacta $\mathcal{W}$ y nuevamente se considera la superficie cociente $\mathcal{W}_N$ isomorfa a $\widehat{\mathbb{C}}$ con los puntos distinguidos: -1, 1, 2, $\frac{1}{2}$ 0, ∞, de esta forma el grupo de automorfismos de la superficie cociente es isomorfo a $\mathbf{D}_6$, explícitamente:

$$Aut(\mathcal{W}_N) = \left\langle T_1(x) = \frac{1}{x}, T_2(x) = \frac{x+1}{2-x} : T_1^2 = T_2^6 = 1, T_1T_2T_1 = T_2^{-1} \right\rangle$$

Entonces el grupo de automorfismos de la superficie tiene 24 elementos, más aún:

$$Aut(\mathcal{W}) \simeq (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2 = \langle \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 \rangle,$$

donde:

$$\begin{aligned}
&\phi_1(x,y,z) = (-(-2z+x)(x+z)^2, -3\sqrt{3}yz^2, (x+z)^3),\\
&\phi_2(x,y,z) = (x, -y, z),\\
&\phi_3(x,y,z) = ((2x-z)^2(x-2z), 3i\sqrt{3}yz^2, (2x-z)^3),\\
&\phi_4(x,y,z) = ((x-z)^2z, -yz^2, -(x-z)^3).
\end{aligned}$$

Así, se tiene la firma (0;2,4,6), tomando el vector (ϕ_1, ϕ_5, ϕ_6), donde:

$$\begin{aligned}
&\phi_5(x,y,z) = (zx^2, iyz^2, x^3)\\
&\phi_6(x,y,z) = ((2z-x)^2(x+z), 3\sqrt{3}iyz^2, (2z-x)^3).
\end{aligned}$$

Finalmente, si $a = i$, se tiene que la normalización de $\widetilde{\mathcal{W}} = \{[x,y,z] \in \mathbb{CP}^2 : y^2z^3 - x(x^4 - z^4) = 0\}$ es la superficie de Riemann compacta $\mathcal{W}$ y nuevamente se considera la superficie cociente $\mathcal{W}_N$ isomorfa a $\widehat{\mathbb{C}}$ con los puntos especiales: -1, 1, i, $-i$, 0, ∞, de esta forma el grupo de automorfismos de la superficie cociente es isomorfo a $\mathbf{S}_4$, explícitamente:

$$Aut(\mathcal{W}_N) = \left\langle T_1(x) = ix, T_2(x) = \frac{i(ix+i+x-1)}{ix+i-x+1}, T_3(x) = \frac{i(ix+i-x-1)}{ix+i-x+1} \right\rangle$$

Entonces el grupo de automorfismos de la superficie tiene 48 elementos, más aún:

$$Aut(\mathcal{W}) \simeq GL(2,3) = \langle \phi_1, \phi_2, \phi_3 \rangle,$$

tomando:

$$\phi_1(x,y,z) = (ix, \xi_8 y, z),$$
$$\phi_2(x,y,z) = (i(ix+iz+x-z)(ix+iz-x+z)^2, 8iyz^2, (ix+iz-x+z)^2),$$
$$\phi_3(x,y,z) = (i(-x+iz+ix-z)(x-iz+ix-z)^2, (-4+4i)\sqrt{2}yz^2, -(x-iz+ix-z)^3),$$

donde ξ_8 denota la raíz octava primitiva de la unidad. Estos automorfismos realizan la firma (2,3,8), tomando (ϕ_3, ϕ_2, ϕ_1).

2. En [20, pag. 63], Vermeulen lista los posibles grupos de automorfismos de curvas planas suaves. Los tres grupos de mayor orden ocurren para exactamente una curva, módulo isomorfismos. Estas 3 curvas son, la curva de Klein, $x^3z + yz^3 + y^3x = 0$, con 168 automorfismos, la curva de Fermat, $x^4+y^4+z^4 = 0$, con 96 automorfismos y la curva $x_v^4+y_v^4+2\sqrt{-3}x_v^2y_v^2+z_v^4 = 0$, con 48 automorfismos.

   Sea $\mathcal{W} = \{[x,y,z] \in \mathbb{CP}^2 : y^3z + z^4 = x^4\}$, $\mathcal{W}$ es una superficie de Riemann compacta de género 3 y las curvas $x_v^4 + y_v^4 + 2\sqrt{-3}x_v^2y_v^2 + z_v^4 = 0$ y $y^3z + z^4 = x^4$ son isomorfas via:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt[4]{9-6\sqrt{3}}} & \frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{9+6\sqrt{3}}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt[4]{9-6\sqrt{3}}} & \frac{1}{\sqrt[4]{9+6\sqrt{3}}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}.$$

   Así, $Aut(\mathcal{W})$ tiene 48 elementos y es isomorfo a $SL(2,3) \rtimes \mathbb{Z}_2 = \langle a,b,c\rangle \rtimes \langle d\rangle$, donde:

$$a = \begin{pmatrix} -\xi_3 & {\xi_3}^2 \\ {\xi_3}^2 & \xi_3 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$c = \begin{pmatrix} 1 & -\xi_3 \\ 0 & {\xi_3}^2 \end{pmatrix}, \; d = \begin{pmatrix} i{\xi_3}^2 & i\xi_3 \\ i\xi_3 & -i{\xi_3}^2 \end{pmatrix}$$

   cuyos órdenes son, respectivamente 4, 4, 3, 2, De este modo se tiene, $|cd| = 12$, $G = \langle c,d\rangle$ y el vector (d, c^2, cd) es un (0; 2,3,12) vector generador.

   Sea $G = SL(2,3) \rtimes \mathbb{Z}_2$. Entonces G tiene 3 clases de conjugación de elementos de orden 4, las cuales tienen 6, 1, 1 elementos respectivamente. El centro de este grupo $Z(G)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ y todo subgrupo cíclico de orden 4 es normal, sera uno de estos subgrupos el que se use para construir los automorfismos.

   Observe que $\Phi : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$, definido por $\Phi([x,y,z]) = [-ix, y, z]$ es una automorfismo de orden 4 de $\mathcal{W}$, luego $N = \langle\Phi\rangle \trianglelefteq G$. Considérese la superficie cociente $\mathcal{W}_N \cong \widehat{\mathbb{C}}$ con los puntos especiales: $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

y $\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, así bajo esta condición, se tiene $Aut(\mathcal{W}_N) \cong A_4$, con firma (0;3,4,4). Exactamente:

$$Aut(\ \mathcal{W}_N\ ) = \langle T_1, T_2, T_3 : T_3T_2T_1\rangle,$$

donde:

$$T_1(y) = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y,\ \ T_2(y) = \frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y - (1+i\sqrt{3})}{y+1},$$

$$T_3(y) = \frac{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)y - 1 + i\sqrt{3}}{y - \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Ahora, dado que $G/N \cong A_4$, se puede establecer el grupo de automorfismos de $\mathcal{W}$. Es así como se obtiene que:

$$Aut(\mathcal{W}) = \langle \phi_1, \phi_2, \phi_3 : \phi_1^2,\ \phi_2^3,\ \phi_3^{12}\ \phi_1\phi_2\phi_3\rangle,$$

donde:

$$\begin{aligned}
\phi_1([x,y,z]) &= [i\sqrt{3}x, -iy + 2iz, i(y+z)],\\
\phi_2([x,y,z]) &= [-3x, \frac{-3y}{2} - \frac{iy\sqrt{3}}{2} - 2iz\sqrt{3}, 2iz\sqrt{3}],\\
\phi_3([x,y,z]) &= [i\sqrt{3}x, -iy + 2iz, i(y+z)].
\end{aligned}$$

4.2 Realizaciones en género 2

Las superficies de género 2 son hiperelípticas y pueden ser realizadas como un cubrimiento doble de la esfera de Riemann con los puntos de Weierstrass señalados como seis valores de ramificación, imágenes de puntos de ramificación de orden 2.

El conjunto W de puntos de Weierstrass en una superficie de Riemann compacta $\mathcal{W}$ de género $\mathtt{g} \geq 2$ está formado por todos los puntos $p \in \mathcal{W}$ tales que $\mathcal{W}$ admite una función meromorfa con un único polo de orden menor que $\mathtt{g}+1$ en p. Por un resultado clásico de Hurwitz de [7, pág. 242] una superficie cerrada de género $\mathtt{g} \geq 2$ tiene por lo menos $2\mathtt{g}+2$ puntos de Weierstrass, donde el menor valor para la cota es alcanzada si y sólo si $\mathcal{W}$ es hiperelíptica. En este caso el cuerpo de funciones meromorfas de $\mathcal{W}$ es generado por dos funciones y y x que satisfacen ecuación algebraica:

$$y^2 = (x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)...(x-e_{2\mathtt{g}+2})$$

La función hiperelíptica, inducida por la variable x determina la superficie $\mathcal{W}$ como un cubrimiento doble de la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, los distintos valores de ramificación $e_1, e_2, ..., e_{2\mathtt{g}+1}$ de x son las imágenes de los puntos de Weierstrass de $\mathcal{W}$.

Grupo reducido de automorfismos

Por el teorema de Hurwitz, el grupo $Aut(\mathcal{W})$ de una superficie de Riemann compacta $\mathcal{W}$ de género $\mathtt{g} \geq 2$ es finito. Para una superficie hiperelíptica, un lema de Hurwitz, ver [7, pág. 102], o también [9], establece que si $\phi \in Aut(\mathcal{W})$ tiene más de 4 puntos fijos, entonces ϕ es la involución hiperelíptica P o la identidad. Ahora, si $\phi \in Aut(\mathcal{W})$ es cualquier automorfismo de la superficie hiperelíptica $\mathcal{W}$, entonces $\phi \circ P \circ \phi^{-1}$ tiene al menos $2\mathtt{g}+2 \geq 6$ puntos fijos, luego $\phi \circ P \circ \phi^{-1} = P$. Así, P conmuta con ϕ, de modo que cualquier automorfismo $\phi \in Aut(\mathcal{W})$ se proyecta en una transformación de Möbius $\phi_{\widehat{\mathbb{C}}} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ de la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} \simeq \mathcal{W}_{<P>}$. Cada automorfismo reducido $\phi_{\widehat{\mathbb{C}}}$ lleva el conjunto W de puntos de Weierstrass sobre si mismo, luego el grupo reducido de automorfismos $Aut(\mathcal{W}_{\langle P \rangle})'$, puede ser pensado como el grupo de simetrías de la esfera de Riemann con puntos distinguidos, los puntos de Weierstrass.

Como se sabe, toda superficie de Riemann compacta de género 2 es hiperelíptica, entonces las consideraciones antes expuestas conducen, en este caso, a una determinación completa de los grupos de automorfismos. Obsérvese que si un grupo de rotación de $\mathcal{W}_{\langle P \rangle}$ no preserva ningún eje de rotación, una órbita de largo 6 consiste en los vértices de un octaedro regular. Así, además de grupos cíclicos y grupos diedrales, la única opción restante para el grupo reducido de automorfismos $Aut(\mathcal{W}_{\langle P \rangle})$ es el grupo simétrico $\mathbf{S}_4$.

Para comenzar, se clasificarán los grupos cíclicos maximales $\langle \phi_{\widehat{\mathbb{C}}} \rangle$ del grupo reducido de automorfismos $Aut(\mathcal{W}_{\langle P \rangle})$. Dado que $\phi_{\widehat{\mathbb{C}}}$ lleva el conjunto de puntos de Weierstrass sobre sí mismo, el orden de $\langle \phi_{\widehat{\mathbb{C}}} \rangle$ es la longitud de un ciclo de S_6, esto es 2, 3, 4, 5 o 6, luego los posibles grupos cíclicos maximales son isomorfos a $\mathbb{Z}_n$, con $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

A continuación, en la tabla 3 se da una ecuación algebraica representando a una superficie hiperelíptica $\mathcal{W}$. Esta superficie de Riemann compacta de género 2 es la normalización de $\widetilde{\mathcal{W}}$, donde $\tilde{\mathcal{W}} = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : F(x, y, z) = 0\}$, para F función homogénea correspondiente a cada ecuación de la lista. En cada caso, el automorfismo ϕ inducido por $\phi_{\widehat{\mathbb{C}}}$ es de orden maximal, entonces se puede encontrar en la forma:

$$(x, y) \mapsto (\phi_{\widehat{\mathbb{C}}}(x), y').$$

Tabla 3: Curvas de género 2

Caso	**Ecuación**	$\phi : (x, y) \mapsto (\phi_{\widehat{\mathbb{C}}}(x), y')$
1	$y^2 = x(x-1)(x-a)(x-b)\left(x - \frac{b(1-a)}{1-b}\right)$	$(x, y) \mapsto \left(\frac{b(x-a)}{x-b}, \frac{(b(b-a))^{\frac{3}{2}} y}{(x-b)^3}\right)$
2	$y^2 = x(x^2-1)(x-a)(x-a^{-1})$	$(x, y) \mapsto (x, \frac{iy}{x^3})$
3	$y^2 = (x^3-a)(x^3-a^{-1})$	$(x, y) \mapsto (\xi_3 x, -y)$
4	$y^2 = x^5 - 1$	$(x, y) \mapsto (\xi_5 x, -y)$
5	$y^2 = x^6 - 1$	$(x, y) \mapsto (\xi_6 x, y)$
6	$y^2 = x(x^4 - 1)$	$(x, y) \mapsto (ix, \xi_8 y)$

Por simplicidad, las ecuaciones son normalizadas, esto es, los puntos fijos $\phi_{\widehat{\mathbb{C}}}(x)$ son 0 e infinito (∞) y las raíces se ubican simétricamente con respecto al ecuador en la esfera de Riemann. Esto es posible excepto en el caso 1. Para el caso 1, se supone que $a \notin \{0,1\}$ y $b \notin \{0,1\}$ y para los casos 2 y 3, $a \notin \{0,\ 1,\ -1\}$.

En la tabla 4 se describen los grupos maximales que actuan en las curvas correspondientes en cada caso. Nótese que en el caso 6 la presentación del grupo está dada módulo 3.

Considérese el caso particular de la superficie definida por la curva $y^2 = x^6 - 1$, cuyo grupo de automorfismos es: $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$, donde :

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} \xi_3 & 0 \\ 0 & {\xi_3}^2 \end{pmatrix}$$

cuyos órdenes son respectivamente 2, 2, 3. Así se tiene, $|\,bc\,| = 6$, $|\,abc\,| = 4$, luego el vector (a, abc, bc) es un $(0;2,4,6)$-vector generador. Por otra parte, se puede considerar la acción de $\mathbb{Z}_2 = \langle a \rangle$ y la fórmula:

$$g(\mathcal{W}_H) = |G:H|(g(;\mathcal{W}_G\ ) - 1) + 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}(|G:H| - |H\backslash G/G_j|)$$

que relaciona el género de $\mathcal{W}_G$ y $\mathcal{W}_H$, donde $H \leq G$, para obtener el género de la superficie cociente $\mathcal{W}_{\langle a \rangle}$. Así, tomando $H = \langle a \rangle$ y dado que:

$$|\langle a \rangle\backslash G/\langle a \rangle| = 7,\ |\langle a \rangle\backslash G/\langle bc \rangle| = 2 \text{ y } |\langle a \rangle\backslash G/\langle abc \rangle >| = 3$$

se tiene: $g(\mathcal{W}_{\langle a \rangle}) = 12(-1) + \frac{1}{2}(12 - 7 + 12 - 2 + 12 - 3) = 1$, es decir, $\langle a \rangle$ actua en la superficie definida por la curva $y^2 = x^6 - 1$, según la firma (1;2,2), $\langle c \rangle$ actua en esta misma curva según la firma (3^4).

De la misma forma, para la curva $y = x(x^4 - 1)$, en la cual actua $GL(2,3)$ se obtiene la firma con la que sus subgrupos,isomorfos a D_6, $\mathbb{Z}_8$,$\mathbb{Z}_2$, $SL(2,3)$, $\mathbb{Z}_6$, S_3, D_4, $\mathbb{Z}_8$, Q_8, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ entre otros, actuan en la misma superficie. Así, considerando

Tabla 4: Grupos de Automorfismos

Caso	**Grupo**	**Presentación**
1	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\langle x, y : x^2 = y^2 = [x,y] = 1 \rangle$
2	D_4	$\langle x, y : x^2 = y^4 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$
3	D_6	$\langle x, y : x^2 = y^6 = 1, xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$
4	$\mathbb{Z}_{10}$	$\langle x : x^{10} = 1 \rangle$
5	$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$	$\left\langle a, b, c : a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} \xi_3 & 0 \\ 0 & {\xi_3}^2 \end{pmatrix} \right\rangle$
6	$GL(2,3)$	$\left\langle x, y : x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Tabla 5: Grupos de Automorfismos

Caso	Ecuación	Firma	Grupos	Orden del grupo
1	$y^2 = y^2 = x(x-1)(x-a)(x-b)\left(x - \frac{b(1-a)}{1-b}\right)$	(2^5)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	4
2	$y^2 = x(x^2-1)(x-a)(x-a^{-1})$	$(2^3, 4)$	D_4	8
3	$y^2 = (x^3-a)(x^3-a^{-1})$	$(2^3, 3)$	D_6	12
4	$y^2 = x^5 - 1$	$(2, 5, 10)$	$\mathbb{Z}_{10}$	10
		$(5, 5, 5)$	$\mathbb{Z}_5$	5
5	$y^2 = x^6 - 1$	$(2, 4, 6)$	$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$	24
		$(2, 6, 6)$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	12
		$(3, 6, 6)$	$\mathbb{Z}_6$	6
		$(3, 4, 4)$	$\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$	12
6	$y^2 = x(x^4 - 1)$	$(2, 3, 8)$	$GL(2,3) \cong Q_8 \rtimes S_3$	48
		$(3, 3, 4)$	$SL(2,3) \cong Q_8 \rtimes \mathbb{Z}_3$	24
		$(2, 4, 8)$	$\mathbb{Z}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	16
		$(2^3, 3)$	D_6	12
		$(2^3, 4)$	D_4	8
		$(2, 8, 8)$	$\mathbb{Z}_8$	8
		$(4, 4, 4)$	Q_8	8
		$(2^2, 3^3)$	$\mathbb{Z}_6$	6
		$(2^2, 3^2)$	S_3	6
		(2^5)	$\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2$	4
		$(2^2, 4^2)$	$\mathbb{Z}_4$	4
		$(1; 2^2)$	$\mathbb{Z}_2$	2
		(2^6)	$\mathbb{Z}_2$	2

la tabla 1, y siguiendo un procedimiento similar al descrito anteriormente, se puede obtener la firma con la cual actua cada subgrupo del grupo de automorfismos de la curva y conseguir así, una lista de grupos de automorfismos para superficies de género 2, la cual se resume en la tabla 5.

A continuación se dan explícitamente los generadores de cada subgrupo que aparece en la tabla 5. Aquí, ξ_n denota la raíz n-ésima primitiva de 1. Recuérdese que $\mathcal{W}$ es la normalización de $\widetilde{\mathcal{W}} = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : F(x, y, z) = 0\}$, es decir, existe una función analítica $\sigma : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tal que $\sigma(\mathcal{W}) = \widetilde{\mathcal{W}}$ y tal que σ es uno a uno en la imagen inversa del conjunto de puntos lisos de $\widetilde{\mathcal{W}}$. De lo anterior, se tiene que, básicamente, los automorfismos se definen en $\sigma(\mathcal{W}) = \widetilde{\mathcal{W}}$, con la consideración del conjunto finito de puntos especiales, que son preimágenes, mediante σ, de puntos singulares. Así se obtiene, la tabla 6 de automorfismos de $\widetilde{\mathcal{W}}$.

Tabla 6: Automorismos

Caso	Firma	Automorfismos
1	(2^5)	$\phi_1(x, y, z) = (x, -y, z)$
		$\phi_2(x, y, z) = (x, -y, z)$
		$\phi_3(x, y, z) = (x, -y, z)$
		$\phi_4(x, y, z) = (b(x - az)(x - bz)^2, yb^{\frac{3}{2}}(b-a)^{\frac{3}{2}}z^2, (x - bz)^3)$
		$\phi_5(x, y, z) = (-b(-x + az)(x - bz)^2, -yb^{\frac{3}{2}}(b-a)^{\frac{3}{2}}z^2, (x - bz)^3)$
2	$(2^3, 4)$	$\phi_1(x, y, z) = ((x - az)(ax - z)^2, \sqrt{(1-a^2)^3}yz^2), (ax - z)^3)$
		$\phi_2(x, y, z) = (-(xa - z)(-x + az)^2, i\sqrt{(1-a^2)^3}yz^2, (-x + az)^3)$
		$\phi_3(x, y, z) = (x, -y, z)$
		$\phi_4(x, y, z) = (zx^2, iyz^2, x^3)$
3	$(2, 2, 2, 3)$	$\phi_1(x, y, z) = (zx^2, yz^2, x^3)$
		$\phi_2(x, y, z) = ({\xi_3}^2 zx^2, -yz^2, x^3)$
		$\phi_3(x, y, z) = (x, -y, z)$
		$\phi_4(x, y, z) = ({\xi_3}^2 x, y, z)$
4	$(2, 5, 10)$	$\phi_1(x, y, z) = (x, -y, z)$

continúa. . .

...continuación

Caso	**Firma**	**Automorfismos**
		$\phi_2(x,y,z)=({\xi_5}^4x,y,z)$ $\phi_3(x,y,z)=(\xi_5x,-y,z)$
	$(5,5,5)$	$\phi_1(x,y,z)=(\xi_5x,y,z)$ $\phi_2(x,y,z)=(\xi_5x,y,z)$ $\phi_3(x,y,z)=({\xi_5}^3x,y,z)$
5	$(2,4,6)$	$\phi_1(x,y,z)=(\xi_6x^2z,iz^2y,x^3)$ $\phi_2(x,y,z)=(x^2z,iz^2y,x^3)$ $\phi_1(x,y,z)=(\xi_6x,-y,z)$
	$(2,6,6)$	$\phi_1(x,y,z)=(x,-y,z)$ $\phi_2(x,y,z)=({\xi_6}^5x,y,z)$ $\phi_3(x,y,z)=({\xi_6}^5x,-y,z)$
	$(3,6,6)$	$\phi_1(x,y,z)=({\xi_6}^2x,y,z)$ $\phi_2(x,y,z)=({\xi_6}^5x,-y,z)$ $\phi_3(x,y,z)=(\xi_6x,-y,z)$
	$(3,4,4)$	$\phi_1(x,y,z)=({\xi_6}^2x,y,z)$ $\phi_2(x,y,z)=(x^2z,iz^2y,x^3)$ $\phi_3(x,y,z)=({\xi_6}^2x^2z,iz^2y,x^3)$
6	$(2,3,8)$	$\phi_1(x,y,z)=(i(-x-z+ix+iz)(x-z+ix-iz)^2,$ $8{\xi_8}^3yz^2,-(x-z+ix-iz)^3)$ $\phi_2(x,y,z)=(i(ix+iz+x-z)(ix+iz-x+z)^2,$ $8iyz^2,(ix+iz-x+z)^3)$ $\phi_3(x,y,z)=(x,\xi_8y,iz)$
	$(3,3,4)$	$\phi_1(x,y,z)=(-i(ix+iz+x-z)(ix+iz-x+z)^2,$ $-8yz^2,(ix+iz-x+z)^3)$ $\phi_2(x,y,z)=(i(ix+iz+x-z)(ix+iz-x+z)^2,$ $8iyz^2,(ix+iz-x+z)^3)$ $\phi_3(x,y,z)=(-(ix+iz-x-z)(ix-iz+x-z)^2,$ $-8iyz^2,-(ix-iz+x-z)^3)$
	$(2,4,8)$	$\phi_1(x,y,z)=(i(-x-z+ix+iz)(x-z+ix-iz)^2,$ $-8{\xi_8}^3yz^2,-(x-z+ix-iz)^3)$ $\phi_2(x,y,z)=(-(ix+iz-x-z)(ix-iz+x-z)^2,$ $-8iyz^2,-(ix-iz+x-z)^3)$ $\phi_3(x,y,z)=(-(ix+iz-x-z)(ix-iz-x-z)^2,$ $-8{\xi_8}^3yz^2,-(ix-iz-x-z)^3)$
	$(2,8,8)$	$\phi_1(x,y,z)=(i(ix+iz-x+z)(-x-z+ix-iz)^2,$ $-8yz^2,(-z+ix-iz-x)^3)$ $\phi_2(x,y,z)=(ix,\xi_8y,z)$ $\phi_3(x,y,z)=(-(ix-iz+x-z)(x+z+ix+iz)^2,$ $8\xi_8yz^2,-(x+z+ix+iz)^3)$
	$(4,4,4)$	$\phi_1(x,y,z)=(zx^2,yz^2,-x^3)$ $\phi_2(x,y,z)=(-x,iy,z)$ $\phi_3(x,y,z)=(zx^2,iyz^2,x^3)$

Para tener los automorfismos definidos en toda la superficie $\mathcal{W}$ resta definirlos en la preimagen de los puntos singulares en cada caso, así, por ejemplo en el caso 5, $\widetilde{\mathcal{W}}=\{[x,y,z]\in\mathbb{CP}^2 : y^2z^3-x^5-z^5=0\}$, tiene un punto singular, el punto $p=[0,1,0]$, y para su normalización se han agregado dos puntos $\tilde{p}$, $\tilde{\tilde{p}}$ Ahora, si se considera el automorfismo $\phi_1([x,y,z])=(x,-y,z)$, se tiene que:

$$\begin{cases} x=\lambda x \\ -y=\lambda y \\ z=\lambda z \end{cases}$$

de donde, si $xz \neq 0$, $\lambda = 1$ y luego $y = 0$, así, los puntos $(\xi_6^j, 0, 1)$ para $j = 0, 1..., 6$ son fijos por ϕ, de tal forma que se tiene ya el máximo posible de puntos fijos, por lo que $\phi(\tilde{p}) = \tilde{\tilde{p}}$ y $\phi(\tilde{\tilde{p}}) = \tilde{p}$. Si se toma ahora $\phi_2(x, y, z) = ({\xi_5}^4 x, y, z)$, entonces sus puntos fijos son: $(0, -1, 1)$, $(0, 1, 1)$, (1,1,1) En este caso, entonces todos los automorfismos de dicha superficie se describen con los ya descritos en la tabla 6:

$$\phi_1(x, y, z) = (x, -y, z),\ \phi_1(\tilde{p}) = \tilde{\tilde{p}}\ \phi_1(\tilde{\tilde{p}}) = \tilde{p}$$

$$\phi_2(x, y, z) = ({\xi_5}^4 x, y, z),\ \phi_2(\tilde{p}) = \tilde{\tilde{p}}\ \phi_2(\tilde{\tilde{p}}) = \tilde{p}$$

$$\phi_3(x, y, z) = (\xi_5 x, -y, z),\ \phi_1(\tilde{p}) = \tilde{p}\ \phi_1(\tilde{\tilde{p}}) = \tilde{\tilde{p}}\,.$$

4.3 Realizaciones en género 3

Sea $\widetilde{\mathcal{W}} = \{[x, y, z] \in \mathbb{CP}^2 : F(x, y, z) = 0\}$, donde F está dada por alguna función de la tabla 7, entonces $\mathcal{W} = \widetilde{\mathcal{W}}$, en los casos 1, 2, 3, 8, 9, y 10 o $\mathcal{W}$, la normalización de $\widetilde{\mathcal{W}}$, en los otros casos, es una superficie de Riemann Compacta de género 3 con grupo de automorfismos $Aut(\mathcal{W})$ como se indica en la tabla 8. Para el caso 1, se supone que $a, b \neq 0, 1$, para el caso 2, $a \neq 1, 0, \frac{1}{2}$.

Las superficies de género 3 que se están considerando en este trabajo, correspondientes a las curvas listadas en la tabla 7, son en los casos 4, 5, 6 y 7 hiperelípticas, luego para encontrar su grupo de automorfismos se siguiá el mismo procedimiento que en el caso de las superficies de género 2. Es decir se encontró el grupo de automorfismos $Aut(\mathcal{W})$, a partir del grupo de automorfismos de la superficie cociente $\mathcal{W}_{\langle p \rangle}$, donde P es la involución hiperelíptica.

Para tratar las superficies asociadas a las curvas algebraicas correspondientes a los casos restantes, se usaron resultados de [20] y [18] que dan un listado de algunas curvas algebraicas suaves con grupo de automorfismos. Una vez conocido el grupo de automorfismos con el cual se va a trabajar, se puede establecer, excepto en el caso de $PSL(2, 7)$, que cada grupo contiene un subgrupo normal, N, cuyos generadores se pueden encontrar de forma sencilla y como en el caso de género 2, este grupo actua en la superficie dada, produciendo una superficie cociente $\mathcal{W}_N$ de género cero. De esta forma, nuevamente se deben encontrar los automorfismos de la esfera con algunos puntos especiales y considerando el grupo cociente $Aut(\mathcal{W}_N)$, se obtiene todo el grupo de automorfismos $Aut(\mathcal{W})$.

La tabla 7 lista las superficies de género 3 que son la realización de las acciones listadas en la tabla 2:

Tabla 7: Curvas de género tres

Caso	**Ecuación**
1	$y^3 = x(x-1)(x-a)(x-b)$
2	$y^3 = x(x-1)(x-a)(x-(1-a))$

continúa...

...continuación

Caso	**Ecuación**
3	$y^3 = x(x^3 - 1)$
4	$y^2 = x^8 - x$
5	$y^2 = x^7 - x$
6	$y^2 = x^8 - 1$
7	$y^2 = x^8 + 14x^4 + 1$
8	$y^3 = x^4 - 1$
9	$y^4 = x^4 + 1$
10	$y^3 x + y + x^3 = 0$

Los grupos de automorfismos correspondientes a las curvas de la tabla 7 están listados en la tabla 8.

Tabla 8: Grupos de Automorfismos

Caso	**Grupo**	**Presentación**
1	$\mathbb{Z}_3$	$\langle x, x^3 = 1 \rangle$
2	$\mathbb{Z}_6$	$\langle x, x^6 = 1 \rangle$
3	$\mathbb{Z}_9$	$\langle x, x^9 = 1 \rangle$
4	$\mathbb{Z}_{14}$	$\langle x, x^{14} = 1 \rangle$
5	$S_3 \times \mathbb{Z}_4$	$\langle x, y : x^2 = y^{12} = 1, xyx^{-1} = y^5 \rangle$
6	$(\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	$\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^8 = 1,$ $[y, z] = 1, [x, y] = 1, xzx^{-1} = yz^3 \rangle$
7	$S_4 \times \mathbb{Z}_2$	$\langle x : x^2 = 1 \rangle \times < y, z : y = (1,2), z = (2,3,4) >$
8	$SL(2,3) \rtimes \mathbb{Z}_2$	$\left\langle a = \begin{pmatrix} -\xi_3 & {\xi_3}^2 \\ {\xi_3}^2 & \xi_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & -\xi_3 \\ 0 & {\xi_3}^2 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} i{\xi_3}^2 & i\xi_3 \\ i\xi_3 & -i{\xi_3}^2 \end{pmatrix} \right\rangle$
9	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes S_3$	$\langle x, y, z, w : x^3 = y^4 = z^4 = w^4 = 1, [y, z] = 1, xyx^{-1} = y^{-1},$ $xzx^{-1} = w, xwx^{-1} = z, yzy^{-1} = w, ywy^{-1} = (zw)^{-1} \rangle$
10	$PSL(2,7)$	$\left\langle x, y : x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

La tabla 9 contiene las firmas con las cuales actuan los subgrupos de cada grupo de automorfismos, incluido en la tabla anterior, para obtener la lista de grupos que actuan en género 3, con sus respectivas firmas:

Tabla 9: Automorfismos

Caso	**Ecuación**	**Firma**	**Grupos**	**Orden del grupo**
1	$y^3 = x(x-1)(x-a)(x-b)$	(3^5)	$\mathbb{Z}_3$	3
2	$y^3 = x(x-1)(x-a)(x-(1-a))$	$(2,3,3,6)$	$\mathbb{Z}_6$	6
3	$y^3 = x(x^3-1)$	$(3,3,9)$	$\mathbb{Z}_9$	9

continúa...

...continuación

Caso	**Ecuación**	**Firma**	**Automorfismos**	**Orden del grupo**
4	$y^2 = x^8 - x$	$(2,7,14)$	$\mathbb{Z}_{14}$	14
		$(7,7,7)$	$\mathbb{Z}_7$	7
5	$y^2 = x^7 - x$	$(2,4,12)$	$S_3 \times \mathbb{Z}_4$	24
		$(2,12,12)$	$\mathbb{Z}_{12}$	12
		$(4,4,6)$	$\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_4$	12
6	$y^2 = x^8 - 1$	$(2,4,8)$	$(\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	32
		$(2,8,8)$	$\mathbb{Z}_{8\times\mathbb{Z}_2}$	16
		$(4,8,8)$	$\mathbb{Z}_8$	8
		$(4,4,4)$	$\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_4$	16
7	$y^2 = x^8 + 14x^4 + 1$	$(2,4,6)$	$S_4 \times \mathbb{Z}_2$	48
		$(2,6,6)$	$A_4 \times \mathbb{Z}_2$	24
		$(3,4,4)$	$\mathbb{Z}_{12}$	12
8	$y^3 = x^4 - 1$	$(2,3,12)$	$SL(2,3) \rtimes \mathbb{Z}_2$	48
		$(3,3,6)$	$SL(2,3)$	24
		$(3,4,12)$	$\mathbb{Z}_{12}$	12
9	$y^4 = x^4 + 1$	$(2,3,8)$	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes S_3$	96
		$(3,3,4)$	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes \mathbb{Z}_3$	48
		$(2,4,8)$	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes \mathbb{Z}_2$	32
		$(4,4,4)$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	16
		$(2,8,8)$	$\mathbb{Z}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	16
		$(4,8,8)$	$\mathbb{Z}_8$	8
10	$y^3x + y + x^3 = 0$	$(2,3,7)$	$PSL(2,7)$	168
		$(3,3,7)$	$\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$	21
		$(7,7,7)$	$\mathbb{Z}_7$	7

Finalmente, se presentan explícitamente los generadores de cada subgrupo que aparece en la tabla 9. Nuevamente, ξ_n denota la raíz n-ésima primitiva de 1. Recuérdese que en los casos 4, 5, 6, 7, $\mathcal{W}$ es la normalización de $\widetilde{\mathcal{W}} = \{[x,y,z] \in \mathbb{CP}^2 : F(x,y,z) = 0\}$, es decir, existe una función analítica $\sigma : \mathcal{W} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tal que $\sigma(\mathcal{W}) = \widetilde{\mathcal{W}}$ y tal que σ es uno a uno en la imagen inversa del conjunto de puntos lisos de $\widetilde{\mathcal{W}}$. De lo anterior, se tiene que, básicamente los automorfismos se definen en $\sigma(\mathcal{W}) = \widetilde{\mathcal{W}}$, con la consideración del conjunto finito de puntos especiales, que son preimágenes, mediante σ, de puntos singulares. En los otros casos, los automorfismos son los que aparecen en la tabla 10:

Tabla 10: Automorfismos

Caso	**Firma**	**Automorfismos**
1	(3^5)	$\phi_1(x,y,z) = (x, \xi_3 y, z)$
		$\phi_2(x,y,z) = (x, \xi_3 y, z)$
		$\phi_3(x,y,z) = (x, \xi_3 y, z)$
		$\phi_4(x,y,z) = (x, \xi_3 y, z)$
		$\phi_5(x,y,z) = (x, \xi_3^2 y, z)$
2	$(2,3^2,6)$	$\phi_1(x,y,z) = (z - x, y, z)$
		$\phi_2(x,y,z) = (x, \xi_3 y, z)$
		$\phi_3(x,y,z) = (x, \xi_3 y, z)$
		$\phi_4(x,y,z) = (z - x, \xi_3 y, z)$
3	$(3,9,9)$	$\phi_1(x,y,z) = (x, \xi_9^3 y, z)$
		$\phi_2(x,y,z) = (\xi_9^6 x, \xi_9^5 y, z)$
		$\phi_3(x,y,z) = (\xi_9^3 x, \xi_9 y, z)$

continúa...

…continuación

Caso	**Firma**	**Automorfismos**
4	$(2,7,14)$	$\phi_1(x,y,z)=(x,-y,z)$ $\phi_2(x,y,z)=({\xi_7}^2x,\xi_7y,z)$ $\phi_3(x,y,z)=({\xi_7}^2x,-\xi_7y,z)$
	$(7,7,7)$	$\phi_1(x,y,z)=({\xi_7}^4x,{\xi_7}^2y,z)$ $\phi_2(x,y,z)=(\xi_7x,{\xi_7}^4y,z)$ $\phi_3(x,y,z)=({\xi_7}^5x,{\xi_7}^6y,z)$
5	$(2,4,12)$	$\phi_1(x,y,z)=(-zx^3,yz^3,x^4)$ $\phi_2(x,y,z)=(-{\xi_6}^5zx^3,-{\xi_{12}}^5yz^3,x^4)$ $\phi_3(x,y,z)=(-\xi_6x,-\xi_{12}y,z)$
	$(2,12,12)$	$\phi_1(x,y,z)=(x,-y,z)$ $\phi_2(x,y,z)=(\xi_6x,\xi_{12}y,z)$ $\phi_3(x,y,z)=(\xi_6x,-\xi_{12}y,z)$
	$(4,4,6)$	$\phi_1(x,y,z)=(-{\xi_6}^2zx^3,-{\xi_{12}}^2yz^3,x^4)$ $\phi_2(x,y,z)=(-zx^3,Iyz^3,x^4)$ $\phi_3(x,y,z)=({\xi_6}^2x,{\xi_{12}}^2y,z)$
6	$(2,4,8)$	$\phi_1(x,y,z)=(zx^3,yz^3,x^4)$ $\phi_2(x,y,z)=(\xi_8zx^3,yz^3,x^4)$ $\phi_3(x,y,z)=({\xi_8}^3x,y,-z)$
	$(2,8,8)$	$\phi_1(x,y,z)=(-x,y,z)$ $\phi_2(x,y,z)=({\xi_8}^3x,y,-z)$ $\phi_3(x,y,z)=({\xi_8}^3x,-y,z)$
	$(4,8,8)$	$\phi_1(x,y,z)=(ix,y,z)$ $\phi_2(x,y,z)=(\xi_8x,-y,z)$ $\phi_3(x,y,z)=({\xi_8}^3x,-y,z)$
	$(4,4,4)$	$\phi_1(x,y,z)=(\xi_8zx^3,yz^3,x^4)$ $\phi_2(x,y,z)=(-ix,y,z)$ $\phi_3(x,y,z)=({\xi_8}^3zx^3,yz^3,x^4)$
7	$(2,4,6)$	$\phi_1(x,y,z)=(izx^3,-yz^3,x^4)$ $\phi_2(x,y,z)=((x-z)(x+z)^3,-4yz^3,(x+z)^4)$ $\phi_3(x,y,z)=(i(x+z)(x-z)^3,4yz^3,(x-z)^4)$
	$(2,6,6)$	$\phi_1(x,y,z)=(-zx^3,yz^3,x^4)$ $\phi_2(x,y,z)=((x+iz)(x-iz)^3,4yz^3,(x-iz)^4)$ $\phi_3(x,y,z)=(-(x-iz)(x+iz)^3,4yz^3,(x+iz)^4)$
	$(3,4,4)$	$\phi_1(x,y,z)=(i(x+z)(x-z)^3,-4yz^3,(x-z)^4)$ $\phi_2(x,y,z)=((x-z)(x+z)^3,4yz^3,(x+z)^4)$ $\phi_3(x,y,z)=(-ix,-y,z)$
8	$(2,3,12)$	$\phi_1(x,y,z)=(i\sqrt{3}x,-iy+2iz,i(y+z))$ $\phi_2(x,y,z)=(-3x,-3/2y-1/2iy\sqrt{3}-2iz\sqrt{3},$ $3/2y+1/2iy\sqrt{3}-iz\sqrt{3})$ $\phi_3(x,y,z)=(i\sqrt{3}x,-iy+2iz,i(y+z))$
	$(3,3,6)$	$\phi_1(x,y,z)=(-3x,1/2iy\sqrt{3}-3/2y-3z-iz\sqrt{3},$ $-3/2y-1/2iy\sqrt{3}+iz\sqrt{3})$ $\phi_2(x,y,z)=(i\sqrt{3}x,-{\xi_3}^2y+2{\xi_3}^2z,y+z)$ $\phi_3(x,y,z)=(x,-\xi_3y,-z)$
	$(3,4,12)$	$\phi_1(x,y,z)=(x,\xi_3y,z)$ $\phi_2(x,y,z)=(ix,y,z)$ $\phi_3(x,y,z)=(ix,\xi_3y,z)$
9	$(2,3,8)$	$\phi_1(x,y,z)=(z,y,x)$ $\phi_2(x,y,z)=(z,\xi_8x,\xi_8y)$ $\phi_3(x,y,z)=(y,x,{\xi_8}^7z)$
	$(3,3,4)$	$\phi_1(x,y,z)=(\xi_8z,x,-y)$ $\phi_2(x,y,z)=(y,z,\xi_8x)$ $\phi_3(x,y,z)=(ix,y,-z)$
	$(2,4,8)$	$\phi_1(x,y,z)=(z,y,x)$ $\phi_2(x,y,z)=(ix,y,z)$ $\phi_3(x,y,z)=(z,y,ix)$
	$(4,4,4)$	$\phi_1(x,y,z)=(x,iy,z)$

continúa…

...continuación

Caso	**Firma**	**Automorfismos**
		$\phi_2(x,y,z)=(ix,y,z)$ $\phi_3(x,y,z)=(i,iy,z)$
	$(2,8,8)$	$\phi_1(x,y,z)=(-x,y,z)$ $\phi_2(x,y,z)=(y,x,\xi_8 z)$ $\phi_3(x,y,z)=(-y,x,\xi_8 z)$
	$(4,8,8)$	$\phi_1(x,y,z)=(ix,iy,z)$ $\phi_2(x,y,z)=(y,x,\xi_8 z)$ $\phi_3(x,y,z)=(ix,iy,\xi_8 z)$
10	$(2,3,7)$	$\phi_1(x,y,z)=(ax+by+cz,bx+cy+az,cx+ay+bz)$ $\phi_2(x,y,z)=(\zeta_7 y,{\zeta_7}^2 z,{\xi_7}^3 x)$ $\phi_3(x,y,z)=(y-{\xi_7}^3 y+z{\zeta_7}^2-z{\xi_7}^3+x\zeta_7-x{\zeta_7}^2,$ $\zeta_7 y-{\zeta_7}^3 y+z\xi_7-z+x{\zeta_7}^3-x,$ ${\xi_7}^2 y-\xi_7 y+z\zeta_7-z{\xi_7}^2+x{\xi_7}^3-\xi_7 x)$
	$(3,3,7)$	$\phi_1(x,y,z)=(y,z,x)$ $\phi_2(x,y,z)=(z,\xi_7 x,{\xi_7}^3 y)$ $\phi_3(x,y,z)=(\xi_7 x,{\xi_7}^3 y,z)$
	$(7,7,7)$	$\phi_1(x,y,z)=(x,\xi_7 y,{\xi_7}^3 z)$ $\phi_2(x,y,z)=(\xi_7 x,{\xi_7}^3 y,z)$ $\phi_3(x,y,z)=(\xi_7 x,{\zeta_7}^3 y,{\xi_7}^3 z)$

En el último caso, $a=\xi_7-{\xi_7}^4$, $b=1-{\xi_7}^5$, $c={\xi_7}^3-{\xi_7}^2$ y $\zeta_7=\overline{\xi_7}$.

Referencias

[1] Accola, R.: On the number of automorphisms of a closed Riemann Surface, Transactions of the American Mathematical Society, 131 (1968), pp. 398-408.

[2] Breuer, T.: Characters an Automorphism Groups of Compact Riemann Surfaces, Cambridge University Press, 2000.

[3] Broughton, S.A.: Classifying finite group actions on surfaces of low genus, Journal of Pure and Aplied Algebra, 69 (1990), pp. 233-270.

[4] Broughton, S. Bujalance, E. Costa, A. Gamboa, J. and Gromadzki, G.: Simmetries of Riemann surfaces on which $PSL(2,q)$ acts as a Hurwitz automorphisms groups, Journal Pure and Applied Algebra, 106 (1996), pp. 113-126.

[5] Cohen, J.: On Hurwitz extensions of $PSL(2,7)$, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society ,86 (1985), pp. 395-400.

[6] Gromadzki, G. and Maclachlan, C.: Supersoluble groups of compact Riemann surfaces,Glasgow Mathematical Journal, 31 (1989), pp. 321-327.

[7] Farkas, H. and Kra, I.: Riemann Surfaces, Graduate Text in Mathemathics, V.72, Springer 1996.

[8] Harvey, W.: Cyclic groups of automorphisms of compact Riemann Surfaces, The Quarterly Journal of Mathematics, 17 (1996), pp. 86 - 97.

[9] Hurwitz, A.: Uber algebraishe Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich, Mathematische Annalen, 41 (1893), pp. 403-442.

[10] Klein, F.: Uber die Transformtionen siebenter Ordnungder elliptischen Functionen, Mathemathische Annalen, 14 (1879), pp. 428-471.

[11] Kuribayashi, A.: Automorphism groups of compact Riemann surfaces of genera three and four, Journal Pure and Applied Algebra, 65 (1990), pp. 277-292.

[12] Kuribayashi, A. and Kimura, H.: On Automorphism groups of Riemann Surfeces of genus 5 , Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, 63 (1987), 126-130.

[13] Kuribayashi, I.: On automorphisms of prime order of a Riemann surface as matrices, Manuscripta Mathematica. 44 (1983) pp. 103-108.

[14] Kuribayashi, A.: A survey of Riemann Surfaces of genus 3 throuh the Eichler Trace formula, Essays in Celebration of 100'th Anniversary of Chuo University, Cguo University, (1985), pp. 37-66.

[15] Kuribayashi, A. and Kuribayashi I.: On Automorphism Groups of Compact Riemann Surfaces of Genus 4, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences,62 (1986), 65-68.

[16] Macbeath, A.: On a curve of genus 7 , Proceedings of the London Mathematical Society, 3 (1965), pp. 527-542.

[17] Macxlachlan, C. and Talu, Y.: p-groups of symmetries of surfaces, Michigan Mathematical Journal, 45 (1998), pp. 315-330.

[18] Magaard, K., Shaska K., Shpectorov, S. and Volklein, H.: The locus of curves with prescribed automorphism group, Communications in arithmetic fundamental groups,1267 (2002), 112-141.

[19] Tucker, T.: Finite groups acting on surfaces and the genus of a group, Journal of Combinatorial Theory, 306 (1983), pp. 82-98.

[20] Vermeulen, A. M.: Weierstrass points of weight two on curves of genus three, Ph.D. Thesis, University of Amsterdam, 1983.

Dirección del autor
Martha Judith Romero Rojas — Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán-Colombia
e-mail: `mjromero@unicauca.edu.co`