Matemáticas: Enseñanza Universitaria
ISSN: 0120-6788
reviserm@univalle.edu.co
Escuela Regional de Matemáticas
Colombia

Perdomo, Oscar
Gráficas de funciones sobre variedades
Matemáticas: Enseñanza Universitaria, vol. XII, núm. 1, junio, 2004, pp. 21-26
Escuela Regional de Matemáticas
Cali, Colombia

Vol. XII, № 1, Junio de 2004
Matemáticas: 21–26

**Matemáticas:
Enseñanza Universitaria**

Gráficas de funciones sobre variedades

Oscar Perdomo

Resumen

Dadas una variedad riemanniana compacta n dimensional (M, g) y una función diferenciable $F : M \to \mathbb{R}^k$ consideraremos la variedad $\tilde{M} = \{(x, F(x)) \in M \times \mathbb{R}^k : x \in M\} = \mathrm{graf}(F)$ con la métrica riemanniana inducida por la métrica producto en $M \times \mathbb{R}^k$. En este artículo demostraremos que para cualquier métrica riemanniana $\overline{g}$ en M existe una función diferenciable $F : M \to \mathbb{R}^k$ tal que la variedad gráfica de F, $\mathrm{graf}(F)$, es isométrica a la variedad $(M, C\ \overline{g})$ para alguna constante C. Luego, daremos una fórmula que relaciona el tensor curvatura de la variedad $\tilde{M}$ con el tensor curvatura de (M, g) y las derivadas de F.

1. Introducción

Sea (M, g) una variedad riemanniana compacta n dimensional. En 1956 Nash demostró que para cualquier métrica $\overline{g}$ en M existe un encaje $\phi : M \to \mathbb{R}^N$ tal que $(M, \overline{g})$ es isométrica a $\phi(M)$ con la métrica inducida por $\mathbb{R}^N$, (ver [2]). Este resultado mostró que toda variedad riemanniana se puede ver como una subvariedad de un espacio euclidiano. Nosotros empezaremos este artículo demostrando que este teorema de Nash implica que, salvo una constante, toda métrica $\overline{g}$ en M, se puede ver como la métrica inducida por la gráfica de una función, es decir, la variedad $(M, C\,\overline{g})$ es isométrica a la variedad $\mathrm{graf}(F)$ para alguna función $F : M \to \mathbb{R}^k$ y alguna constante C. De aquí se deduce que si queremos considerar métricas riemannianas arbitrarias en M, no se pierde generalidad al suponer que esta métrica proviene de la gráfica de una función $F : M \to \mathbb{R}^k$. Luego continuaremos el artículo calculando el tensor curvatura de la variedad $\tilde{M}$ en términos del tensor curvatura de (M, g) y las derivadas de F.

La ventaja de estudiar variedades riemannianas como gráficas de funciones en lugar de estudiarlas como subvariedades de $\mathbb{R}^N$ radica en que al ver la métrica $\overline{g}$ como una métrica inducida por la gráfica de una función ya se tiene un punto de partida, la métrica inicial sobre M, es decir, la métrica g. Usando esta idea, el autor demostró en [3] que si M es el producto de dos superficies cerradas donde g es la métrica producto, entonces, es imposible que la variedad graf(f) tenga curvatura seccional positiva en el caso de una función real $f : M \to \mathbb{R}$.

2. Preliminares

En esta sección fijaremos alguna notación, daremos algunas definiciones y enunciaremos algunos resultados elementales. Todos estos conceptos se encuentran explicados de una manera detallada en las primeras páginas de [1]. Sean M una variedad diferenciable, $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y X, Y, Z campos vectoriales en M. Denotaremos por $X(f)$ la derivada direccional de f en la dirección X. Nótese que $X(f)(p) = df_p(X_p)$ donde $df_p : T_pM \to \mathbb{R}$ es la diferencial de la función f. Denotaremos por $[X, Y]$ el vector corchete de X con Y. Nótese que $[X, Y](f) = XY(f) - YX(f)$. Dada una métrica riemanniana g sobre M, denotaremos por ∇ la conexión de Levi Civita asociada con g. Esta conexión queda determinada de manera única por g ya que

$$\begin{aligned} g(\nabla_Y X, Z) =& \frac{1}{2}\big\{Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\ & - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X) - g([X,Y],Z)\big\} \end{aligned} \tag{1}$$

Una vez se tiene la conexión de Levi Civita, se define el tensor de curvatura de la siguiente manera,

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Ya que R es un tensor, el valor de $R(X,Y)Z$ en un punto p_0 sólo depende de los valores de X, Y, Z en p_0. Por esta razón tiene sentido hablar de $R(x,y)z$ cuando x, y, z son sólo vectores en $T_{p_0}M$ y no campos vectoriales. Denotaremos el hessiano de f como el tensor dado por

$$\mathrm{Hess}(f)(X,Y) = XY(f) - \nabla_X Y(f).$$

Nótese que el hessiano depende de la métrica riemanniana y que debido a la simetría de la conexión de Levi Civita, se tiene que

$$\mathrm{Hess}(f)(X,Y) = \mathrm{Hess}(f)(Y,X).$$

Si $F : M \to \mathbb{R}^k$ es la función dada por $F(p) = (f_1(p), \ldots, f_k(p))$, entonces definimos el hessiano de F por

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}(F)(X,Y) &= (\mathrm{Hess}(f_1)(X,Y), \ldots, \mathrm{Hess}(f_k)(X,Y)) \\ &= XY(F) - \nabla_X Y(F) \end{aligned}$$

3. Teoremas Principales

Sea (M, g) una variedad riemanniana. Si $F : M \to \mathbb{R}^k$ es una función diferenciable, entonces la función $\phi : M \to M \times \mathbb{R}^k$ definida por $\phi(p) = (p, F(p))$ es un encaje de M en $M \times \mathbb{R}^k$. Dotemos a $M \times \mathbb{R}^k$ con la métrica producto $g \times g_0$ donde $g_0(u, v) = \langle u, v\rangle$ es el producto interno estándar $\mathbb{R}^k$ y denotemos por $\overline{g}$ la métrica riemanniana inducida por el encaje ϕ. De esta manera se tiene que la variedad riemanniana $(M, \overline{g})$ es isométrica a la gráfica de F, $\phi(M)$. Usando la definición de la métrica producto $g \times g_0$ obtenemos que

$$\overline{g}(X, Y) = g(X, Y) + \langle X(F), Y(F)\rangle \text{ para todo campo vectorial } Y, X \in M.$$

En esta ecuación, $X(F)(p)$ es el vector $(X(f_1)(p), \ldots, (X(f_k)(p))$.

En esta sección demostraremos los siguientes teoremas.

Teorema 1. *Sea (M, g) una variedad riemanniana compacta. Para toda métrica riemanniana $\overline{g}$ en M existen una función diferenciable $F : M \to \mathbb{R}^k$ y un número real positivo C tales que la métrica riemanniana $C\,\overline{g}$ es isométrica a la métrica en M inducida por el encaje $\phi(p) = (p, F(p))$ de M en $M \times \mathbb{R}^k$.*

Este teorema nos indica que, salvo una constante, toda métrica en M se puede ver como la métrica sobre la graf(F) para cierta función $F : M \to \mathbb{R}^k$.

El siguiente teorema nos muestra la relación entre el tensor curvatura asociado a la métrica inicial de una variedad y el tensor curvatura asociado a la métrica de la graf(F).

Teorema 2. *Sean (M, g) una variedad riemanniana compacta y $F : M \to \mathbb{R}^k$ una función diferenciable. Si definimos la métrica $\overline{g}$ mediante la fórmula $\overline{g}(v, w) = g(v, w) + \langle v(F), w(F)\rangle$ para todo par de vectores tangentes v y w, entonces para todo $p_0 \in M$*

$$\begin{aligned}\overline{g}(\bar{R}(w, y)x, z) &= g(R(w, y)x, z) + \langle \overline{Hess}(F)(x, w), Hess(F)(y, z)\rangle \\ &\quad -\langle \overline{Hess}(F)(x, y), Hess(z, w)\rangle\end{aligned}$$

donde $\bar{R}$ y $\overline{Hess}(F)$ denotan el tensor curvatura y el hessiano asociados con la métrica $\overline{g}$ respectivamente, y x, y, z, w son vectores en $T_{p_0}M$.

Demostración del Teorema 1. Ya que las métricas riemannianas en M son definidas positivas, tenemos que para cada $m \in M$ existe una constante $B(m)$ la cual satisface que para todo par de vectores v y w en T_mM

$$g(v, w) \leq B(m)\overline{g}(v, w) \tag{2}$$

Ya que M es compacta, existe una constante B positiva, tal que la desigualdad de arriba es cierta para todo $m \in M$. Esta constante la podemos obtener de la siguiente manera: para cada $m \in M$, diagonalizamos g con respecto al producto interno $\overline{g}$ y consideramos la función $h : M \to \mathbb{R}$ que toma el valor propio más grande en esta diagonalización. Nótese que $B(m) = h(m)$ satisface la ecuación (2) porque para todo vector de norma 1 con respecto a la métrica $\overline{g}$ se tiene que $g(v, v) \leq B(m)$. Claramente esta función es continua y como M es compacta entonces h toma un valor máximo B, el cual satisface la condición deseada. Por la definición de B tenemos que la forma bilineal $\overline{\overline{g}} = 2B\overline{g} - g$ es simétrica y definida positiva, luego $\overline{\overline{g}}$ define una métrica riemanniana en M. Por el teorema de encaje de Nash, [2], existe una función $F : M \to \mathbb{R}^k$ tal que la métrica inducida por $\mathbb{R}^k$ coincide con la métrica $\overline{\overline{g}}$ es decir, para todo $v, w \in T_pM$

$$\langle dF_m(v), dF_m(w)\rangle = \overline{\overline{g}}(v, w) = 2B\overline{g}(v, w) - g(v, w).$$

Verifiquemos que la función $F : M \to \mathbb{R}^k$ y $C = 2B$ satisfacen las condiciones del teorema. Si tomamos el encaje $\phi : M \to M \times \mathbb{R}^k$ definido por $\phi(p) = (p, F(p))$, entonces para cada par de vectores v, w en T_mM tenemos que

$$\begin{aligned} \langle d\phi_m(v), d\phi(w)\rangle &= g(v, w) + \langle dF_m(v), dF_m(w)\rangle \\ &= g(v, w) + 2B\overline{g}(v, w) - g(v, w) = C\ \overline{g}(v, w). \end{aligned}$$

En la primera igualdad de las expresiones arriba hemos usado la definición de métrica riemanniana producto. Esto termina la demostración. □

Demostración del Teorema 2. Supongamos que X, Y, Z y W son campos vectoriales definidos en una vecindad U de p_0 tales que $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$ para todo $p \in U$ y tales que

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X Y(p_0) &= \overline{\nabla}_X Z(p_0) = \overline{\nabla}_X W(p_0) = \overline{\nabla}_Y Z(p_0) \\ &= \overline{\nabla}_Y W(p_0) = \overline{\nabla}_Z W(p_0) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Estas condiciones las podemos obtener usando coordenadas normales con respecto a la métrica $\overline{g}$ alrededor del punto p_0. Note que estas condiciones implican que $\overline{\mathrm{Hess}}(F)(x, y) = XY(F)$. Usando la ecuación (1) y la definición de $\overline{g}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\overline{g}(\overline{\nabla}_Y X, Z) =& \frac{1}{2}(X\overline{g}(Y,Z) + Y\overline{g}(X,Z) - Z\overline{g}(X,Y))\\ =& g(\nabla_Y X, Z) + \frac{1}{2}\Big(X\langle Y(F), Z(F)\rangle\\ &+ Y\langle X(F), Z(F)\rangle - Z\langle X(F), Y(F)\rangle\Big)\\ =& g(\nabla_Y X, Z) + \frac{1}{2}\langle Z(F), YX(F) + YX(F)\rangle\\ =& g(\nabla_Y X, Z) + \langle Z(F), YX(F)\rangle\end{aligned} \tag{3}$$

En el segundo y tercer paso de estas igualdades hemos usado el hecho de que $XZ(F) = ZX(F)$ y $YZ(F) = ZY(F)$ ya que $[X,Y] = [X,Z] = [Y,Z] = 0$.

Nótese que ambas partes de la igualdad (3) son funciones definidas en M con valor real. Si calculamos la derivada en la dirección del campo vectorial W de la expresión en la parte izquierda de la ecuación (3) y evaluamos en p_0 obtendremos,

$$\begin{aligned}W(\overline{g}(\overline{\nabla}_Y X, Z))(p_0) &= \overline{g}(\overline{\nabla}_W\overline{\nabla}_Y X(p_0), Z(p_0)) + \overline{g}(\overline{\nabla}_Y X(p_0), \overline{\nabla}_W Z(p_0))\\ &= \overline{g}(\overline{\nabla}_W\overline{\nabla}_Y X(p_0), Z(p_0))\end{aligned} \tag{4}$$

Calculando la derivada en la dirección W de la expresión en la parte derecha de la ecuación (3) y evaluamos en p_0 obtendremos,

$$\begin{aligned}W(g(\nabla_Y X, Z)+&\langle Z(F), YX(F)\rangle) =\\ =& g(\nabla_W\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Y X, \nabla_W Z)\\ &+ \langle WZ(F), YX(F)\rangle + \langle Z(F), WYX(F)\rangle\\ =& g(\nabla_W\nabla_Y X, Z) - \langle XY(F), \nabla_W Z(F)\rangle\\ &+ \langle WZ(F), YX(F)\rangle + \langle Z(F), WYX(F)\rangle\end{aligned} \tag{5}$$

En la segunda igualdad hemos usado el hecho de que

$$\begin{aligned}g(\nabla_X Y(p_0), \nabla_W Z(p_0))+&\langle XY(F), \nabla_W Z(F)\rangle =\\ &= \overline{g}(\overline{\nabla}_X Y(p_0), \nabla_W Z(p_0)) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Ya que $\overline{\nabla}_X Y(p_0) = \mathbf{0}$ y la ecuación (3) es cierta.

Igualando las ecuaciones (4) y (5) obtenemos que

$$\begin{aligned}\overline{g}(\overline{\nabla}_W\overline{\nabla}_Y X(p_0), Z(p_0)) =& g(\nabla_W\nabla_Y X, Z) - \langle XY(F), \nabla_W Z(F)\rangle\\ &+ \langle WZ(F), YX(F)\rangle + \langle Z(F), WYX(F)\rangle\end{aligned} \tag{6}$$

Cambiando Y y W en la ecuación (6) obtenemos que

$$\begin{aligned}\overline{g}(\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_W X(p_0), Z(p_0)) =& g(\nabla_Y\nabla_W X, Z) - \langle XW(F), \nabla_Y Z(F)\rangle\\ &+ \langle YZ(F), WX(F)\rangle + \langle Z(F), YWX(F)\rangle\end{aligned} \tag{7}$$

Restando la ecuación (6) de la ecuación (7) y evaluando en p_0 obtenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\bar{R}(w,y)x,z) &= g(R(w,y)x,z) - \langle XW(F), \nabla_Y Z(F)\rangle \\
&\quad + \langle XY(F), \nabla_W Z(F)\rangle + \langle Z(F), YWX(F)\rangle \\
&\quad - \langle Z(F), WYX(F)\rangle - \langle WZ(F), YX(F)\rangle \\
&\quad + \langle YZ(F), WX(F)\rangle \\
&= g(R(w,y)x,z) \\
&\quad - \langle XW(F), YZ(F) - YZ(F) + \nabla_Y Z(F)\rangle \\
&\quad + \langle XY(F), WZ(F) - ZW(F) + \nabla_W Z(F)\rangle \\
&\quad + \langle Z(F), [Y,W](X(F))\rangle \\
&\quad - \langle \overline{\mathrm{Hess}}(F)(w,z), \overline{\mathrm{Hess}}(F)(y,x)\rangle \\
&\quad + \langle \overline{\mathrm{Hess}}(F)(y,z), \overline{\mathrm{Hess}}(F)(w,x)\rangle \\
&= g(R(w,y)x,z) \\
&\quad - \langle \overline{\mathrm{Hess}}(F)(x,w), \overline{\mathrm{Hess}}(y,z) - \mathrm{Hess}(F)(y,z)\rangle \\
&\quad + \langle \overline{\mathrm{Hess}}(F)(x,y), \overline{\mathrm{Hess}}(F)(w,z) - \mathrm{Hess}(z,w)\rangle \\
&\quad - \langle \overline{\mathrm{Hess}}(F)(w,z), \overline{\mathrm{Hess}}(F)(y,x)\rangle \\
&\quad + \langle \overline{\mathrm{Hess}}(F)(y,z), \overline{\mathrm{Hess}}(F)(w,x)\rangle \\
&= g(R(w,y)x,z) + \langle \overline{\mathrm{Hess}}(F)(x,w), \mathrm{Hess}(F)(y,z)\rangle \\
&\quad - \langle \overline{\mathrm{Hess}}(F)(x,y), \mathrm{Hess}(z,w)\rangle
\end{aligned}$$

Esta igualdad termina la demostración. □

Agradecimientos. Agradezco a Colciencias y a la Universidad del Valle su apoyo económico. También agradezco al profesor Ji Ping Sha de la Universidad de Indiana por sus ayuda al generalizar el Teorema 2 a valores de k mayores que 1. Inicialmente sólo tenía una demostración para gráficas de funciones con valores reales.

Referencias

[1] Do Carmo, M. *Riemannian Geometry*, Birkhauser, 1992.

[2] Nash, J. F. *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **63** (1956), pp 20-63.

[3] Perdomo, O. *Metrics on products of surfaces with non positive sectional curvature*, Preprint.

Dirección del autor: Oscar Perdomo, Universidad del Valle, Cali - Colombia, osperdom@univalle.edu.co.