Matemáticas: Enseñanza Universitaria
ISSN: 0120-6788
reviserm@univalle.edu.co
Escuela Regional de Matemáticas
Colombia

Recalde, Luis Cornelio
La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico
Matemáticas: Enseñanza Universitaria, vol. XII, núm. 1, junio, 2004, pp. 51-72
Escuela Regional de Matemáticas
Cali, Colombia

Vol. XII, Nº 1, Junio de 2004
Educación e Historia: 51–72

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico

Luis Cornelio Recalde

Resumen

Se abordan en este artículo dos nociones fundamentales en el desarrollo de las matemáticas como lo son número e infinito. Específicamente, se intenta establecer el estatuto ontológico de los llamados números infinitos: los infinitesimales y los transfinitos. ¿Merecen estos entes la categoría de números? Para abordar este interrogante se hace una revisión de los cambios conceptuales que históricamente se fueron dando en el concepto de número. Para ello se rememoran las definiciones de Euclides, se especifican los tratamientos infinitesimales en Newton y Leibniz, se describen los transfinitos de Cantor y, finalmente, se estudia la importancia histórica del análisis no estándar planteado por Abraham Robinson. El objetivo central del documento es mostrar que si bien la fundamentación de los números reales, base de la fundamentación del análisis clásico, se dio a partir de la legalización del concepto de límite, la fundamentación del análisis no estándar se soporta sobre la lógica de primer orden.

1. El concepto de número para los antiguos

Desde la antigüedad clásica se discute reiteradamente el estatuto de los números y la legitimidad del infinito actual, controversia en la cual Aristóteles constituye la primera autoridad histórica. Para este filósofo griego el infinito no es algo acabado, sino aquello por fuera de lo cual siempre hay algo: una especie de despensa inagotable de la que se pueda extraer sin cesar nuevas cosas. Es un infinito potencial. "Una cantidad es infinita si siempre se puede tomar una parte fuera de la que ya ha sido tomada", dice Aristóteles en la *Física* ([2], p. 138), al mismo tiempo que plantea dos tipos de infinito: por adición y por divisibilidad. El primero se presenta en el proceso de contar, pues aunque para él no existe un conjunto infinito de números como un todo, siempre se puede obtener un número más grande que otro agregándole una unidad. El segundo tipo de infinito aparece en el proceso de división de magnitudes. Por ejemplo se puede dividir un segmento en subsegmentos que a su vez se pueden dividir en otros más pequeños y así sucesivamente.

Euclides, plegado a la concepción de Aristóteles, incorpora la definición de número en el libro VII de los *Elementos*:

> 1. Unidad es aquello en virtud de lo cual cada cosa que existe se llama uno.
> 2. Número es una pluralidad compuesta de unidades. ([13], p. 829)

Definición que no da lugar al conjunto infinito de los números [naturales] tomado como un todo, y que nosotros representamos por $\mathbb{N}$. Los números [naturales], para Euclides, son infinitos en el sentido potencial aristotélico.

Por más de veinte siglos los matemáticos intentaron eludir la autoridad de Euclides, quien había establecido abismos insalvables entre los números y las magnitudes. Los objetos de cada una de estas teorías tenían diferencias ontológicas que impedían presentarlos unificadamente. Mientras el concepto de número se desarrollaba en el proceso de contar, las magnitudes cobraban sentido en el establecimiento de una teoría de la medida, especialmente en lo concerniente a las cuadraturas (dada una figura rectilínea, encontrar un cuadrado equivalente) y cubaturas (dada una figura volumétrica, encontrar un cubo equivalente). Sin embargo, la resolución de ecuaciones y la extensión de la multiplicación a los segmentos iba imponiendo un acercamiento entre número y magnitud; conjunción que sólo fue posible hasta el siglo XIX con la construcción del cuerpo de números reales por parte de Cantor y Dedekind.

Durante el período que va de Euclides a Cantor se dan cambios conceptuales que permiten extender cada vez más el universo de los números aunque de una manera informal. Las transformaciones se dan no sólo atendiendo a la operatividad, sino también a la representación geométrica. En este sentido es significativo el aporte de Descartes al definir, en su *Geometría*, la multiplicación, la división y la raíz cuadrada de segmentos. Las cantidades adquieren la categoría de número en la medida que se incorporen algoritmos que permitan sumarlas, multiplicarlas y representarlas geométricamente. Éstos son los aspectos por los cuales, las cantidades negativas, las fracciones y las raíces inexactas empiezan a tener un comportamiento numérico. Pero estos procesos se aceptan a condición de que respeten el principio regulador de las magnitudes incorporado por Euclides en el libro V de los *Elementos*:

> Definición 4: se dice que dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que una supere la otra. ([13], p. 787)

A través de este enunciado, Euclides excluye las magnitudes infinitamente grandes y las magnitudes infinitamente pequeñas. Se conoce también como "principio de Eudoxo", pues habría sido este matemático de Cnido, quien primero lo usó de manera similar en sus tratados. En el libro X de los *Elementos* Euclides presenta un versión equivalente pero en forma de proposición.

> Proposición 1: dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitud dadas. ([13], p. 861)

Enunciado incorporado por Arquímedes en *De la cuadratura de la parábola* como postulado y que constituye la base fundamental de su famoso método exhaustivo. El método exhaustivo se reconoce como una de las raíces del cálculo moderno; en él se prefigura el concepto del límite como salida conceptual que permite encapsular los procesos infinitos para obtener resultados específicos. El método exhaustivo involucra, de manera soterrada, un tratamiento infinitesimal, constituyéndose en el primer paso hacia la adopción del infinito como concepto matemático.

La definición V. 4 o, su equivalente, la proposición X.1, se conoce como el "principio de Arquímedes". Históricamente se le consideró como soporte ontológico de cualquier sistema númerico. Justamente, se apelaba a este principio para no concederles el estatuto numérico a las cantidades infinitamente grandes y a los infinitesimales.

2. Lo infinitamente pequeño en Newton y Leibniz

Durante más de 1500 años los matemáticos trataron de fundamentar el uso de indivisibles, infinitesimales o de cantidades infinitamente pequeñas. Contradicciones aparecían por doquier. Específicamente se discutía el uso de las cantidades evanescentes por parte de Newton y el uso de los diferenciales por parte de Leibniz.

A pesar de que las cantidades infinitamente pequeñas, usadas por parte de Newton y Leibniz, involucraban el infinito actual, ninguno de los dos intentaba revelarse; todo lo contrario, ellos buscaron ser congruentes con la tradición del infinito aristotélico. La salida de Newton fue a través del método de las primeras y últimas razones, que expuso en su libro *Elementos matemáticos de la filosofía natural*. Leibniz, a su vez, intenta una fundamentación teórica sólida a través de la noción de triángulo característico, retomado de los trabajos de Pascal.

Ninguna de estas dos salidas resolvía los problemas de fundamentación. La crítica más fuerte provenía de Berkeley. En su libro *El Analista*, publicado en 1734, Berkeley desnudaba los problemas de rigor del cálculo.

En este texto plantea serios reparos al uso de aquellos aspectos ligados a la palabra infinito, específicamente al infinito en acto. Para Berkeley los infinitesimales y los infinitesimales de los infinitesimales llevaban a inconsistencia.

La contradicción a la que se refiere Berkeley tiene relación con el "principio de Arquímedes", el cual no se cumple para los infinitesimales. Para Berkeley los matemáticos no eran coherentes, pues al comienzo usaban los infinitesimales en los denominadores por ser diferentes de cero, pero al final, cuando aparecían como sumandos, simplemente los hacían iguales a cero por tener un valor despreciable. Berkeley los denominaba jocosamente "los fantasmas de las cantidades evanescentes".

Al respecto, son famosos los debates, acaecidos entre 1700 y 1706, en la Académie des Sciences de París sobre la validez de los procesos del nuevo cálculo. El debate se tornó candente con la aparición del libro *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*, en el cual el Marqués de l'Hospital intentaba formalizar el concepto intuitivo y la operatividad de los infinitesimales.

¿Cuál era la posición de Leibniz en torno a este debate? Sabemos que a pesar de la confianza que ponía en los resultados, dudaba de su rigurosidad. En sus manuscritos se deja entrever sus esfuerzos por encontrar una salida: a veces trata los infinitesimales como magnitudes no arquimedianas, en ocasiones los utiliza intuitivamente como entes potenciales; alude reiteradamente al método exhaustivo e intenta postular la sustitución de las relaciones entre infinitesimales y cantidades finitas; introduce nociones cercanas al concepto de límite incorporando una manera propia de ver lo continuo. Su testamento intelectual, escrito en septiembre de 1716, poco antes de morir, resume su posición:

> En cuanto al cálculo de los infinitesimales yo no estoy del todo satisfecho con las expresiones del señor Herman en su respuesta al señor Nieuwentijt, ni de otros amigos. También M. Naudé tiene razón de hacer oposición. Cuando discutía en Francia con el Abat Gallois, el padre Gouge y otros, les manifesté que no creía que hubiera magnitudes verdaderamente infinitas ni verdaderamente infinitesimales: que sólo eran ficciones, pero ficciones útiles para abreviar y hablar universalmente. Pero como el señor Marqués de L'Hospital creía que por ello yo traicionaba la causa, me rogaron que no dijera nada, aparte de lo que había dicho en un lugar de las Actas de Lepzing; con placer accedí a ese ruego. (Tomado de [22], p. 263)

De esta forma, para Leibniz los esfuerzos se debían redoblar en asegurar la confiabilidad del uso de las cantidades infinitesimales y no en demostrar su existencia.

3. Cauchy y las cantidades infinitas

La primera salida conceptual propiamente dicha a los infinitesimales aparece en el *Curso de Análisis* de Augustín-Louis Cauchy de 1821, mediante la institucionalización del concepto de límite.

Desde el punto de vista de la búsqueda de rigor, el aporte más importante de Cauchy consistió en haber escogido las definiciones y los procesos de demostración que libraran al análisis de todo referente geométrico. Cauchy cimenta su programa fundamentador sobre los conceptos de número, cantidad, límite y función. A través del límite incorpora las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes, el concepto de función continua y la convergencia de series. Fue precisamente Cauchy el primero en introducir una definición de límite que prefigura su tratamiento en términos de inecuaciones; lo acertado de esta escogencia de lenguaje en el cálculo, se pondría luego de presente en lo que se ha denominado el movimiento de aritmetización del análisis del siglo XIX. En este sentido los trabajos de Cauchy son muy importantes, pues conforman el marco necesario para la completa rigorización del análisis por la escuela de Weierstrass.

En los preliminares del *Curso de Análisis*, Cauchy presenta los presupuestos teóricos que le servirán de base a su programa teórico. En primer lugar, establece diferencias entre número y cantidad. Cauchy aclara que tomará los números en el sentido empleado en aritmética, como referentes de la medida absoluta de las magnitudes, los cuales cumplen el "principio de Arquímedes". Aplica el apelativo *cantidad* a los *reales positivos* o *negativos*, en otras palabras, los números precedidos de signos. A continuación, Cauchy define cantidad variable, uno de los conceptos para entonces más problemáticos: una cantidad variable, para Cauchy, es aquella que recibe sucesivamente varios valores diferentes los unos de los otros. El concepto de cantidad variable le permite introducir su definición de límite:

> Cuando los valores que va tomando sucesivamente una variable particular, se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acaban por diferir de él tan poco como queramos, entonces este último valor, recibe el nombre de límite de todos los anteriores. ([8], p. 76)

Al igual que Euler, Cauchy inicia su *Curso de Análisis* presentando su definición de función:

> Cuando las cantidades variables están de tal modo relacionadas entre sí que, dado el valor de una de ellas, es posible concluir los valores de todas las demás, expresamos ordinariamente diversas cantidades por medio de una de ellas, la cual toma entonces el nombre de variable independiente, y a las otras cantidades expresadas por medio de la variable las llamamos funciones de esta variable ([8], p. 77)

En seguida, Cauchy entiende que debe relacionar las nociones de límite e infinito. Para ello su trabajo de fundamentación debe pasar por darle ciudadanía matemática al infinito. En este sentido, el capítulo 2 inicia con la incorporación de definiciones para lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande.

> Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente, de manera que desciende por debajo de cualquier número dado, esta variable deviene lo que suele llamar un infinitamente pequeño o una cantidad infinitamente pequeña. Una variable de esta especie tiene al cero por límite. ([8], p. 76)
>
> Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable crecen más y más, de manera que ascienden por encima de cualquier número dado, esta variable tiene por límite al infinito positivo, indicado por el signo ∞, si se trata de una variable positiva, y al infinito negativo, indicado por la notación $-\infty$, si se trata de una variable negativa. ([8], p. 76)

La aplicación de estos conceptos en la definición de las funciones continuas produjeron algunas contradicciones, las cuales fueron contrarrestadas en la escuela de Weierstrass con la definición de límite que evitaba la noción confusa de "aproximación indefinida" a través del uso de los epsilon-delta $(\epsilon - \delta)$, como la conocemos actualmente:

Definición: la función f tiende al límite L en x_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

Esta definición dió lugar a una nueva perspectiva respecto a la naturaleza del continuo que reñía con la tradición aristotélica; a través de ella se partía del presupuesto de que la constitución íntima del continuo eran los indivisibles puntos sin la presencia de las cantidades infinitamente pequeñas. Los corrosivos infinitesimales parecían haber sido expulsados del reino de las matemáticas hacia los confines de la metafísica. Justo de esta época datan los primeros trabajos de Georg Cantor, quien adopta el continuo weierstrassiano.

4. La fundamentación de los números reales

Tanto Cantor como Dedekind entendieron que los racionales constituían la materia prima indispensable para la construcción de la totalidad del conjunto de los números reales. Dado que los racionales se podían establecer rigurosamente a partir de los naturales, la dificultad provenía de los irracionales, cuya identidad numérica estaba en entredicho. La gran idea de Cantor y Dedekind fue formalizar y generalizar el proceso de aproximación de algunos irracionales típicos a partir de los racionales. Dedekind lo hace a partir del concepto de cortadura, mientras Cantor hace lo propio a través de la noción de sucesión fundamental.

Dedekind entiende que para fundamentar el dominio de números reales era menester producir una teoría rigurosa del continuo. Para ello, parte de un presupuesto conceptual que riñe con la tradición aristotélica, al visualizar la recta como un agregado de puntos.

El hecho de tomar la línea recta como formada por puntos, al igual que Bolzano, le permite a Dedekind identificar cualquier "cortadura" producida en ésta por un punto particular, el cual se anexa a una de las partes. Desde esta visión no hay ningún problema, pero si no se toma la recta formada por puntos como postulado primario, no se puede realizar directamente esta "operación", porque sencillamente tales entes (los puntos) no constituyen la naturaleza íntima de la recta.

Para Dedekind los números reales forman un dominio de una sola dimensión, que cumple las siguientes leyes ([11]):

1. Si $\alpha > \beta$ y $\beta > \tau$, entonces $\alpha > \tau$; en este caso se dirá que el número β está entre α y τ.

2. Si α y τ son números diferentes cualesquiera, entonces existen infinitos números entre α y τ.

3. Si α es un número cualquiera, entonces todos los números del sistema R son de dos clases U_1 y U_2, cada una de las cuales contiene infinitos números individuales. La primera clase U_1 comprende los números α_1, que son menores que α. La segunda U_2 comprende todos los números α_2 que son mayores que α. El número puede asignarse a la primera o a la segunda clase y es respectivamente el

mayor o el menor. En cada caso la separación del sistema R en dos clases U_1 y U_2, es tal que, cada número de la primera clase U_1 es menor que cada número de la segunda clase U_2 y decimos que esta separación es producida por el número.

El dominio R posee también continuidad, lo cual significa que cumple el siguiente teorema:

4. Si el sistema R de todos los números reales se divide en dos clases U_1 y U_2 tal que cada número α_1, de la clase U_1 es menor que cada número α_2 de la clase U_2, entonces existe uno y sólo un número que puede producir esta separación.

La propiedad (4) es la que realmente caracteriza el dominio de los reales y muestra la diferencia fundamental entre este conjunto y el conjunto de los racionales que satisface las tres primeras propiedades pero no la última.

Para Cantor lo más importante era desarrollar una teoría satisfactoria de los números irracionales, evitando caer en el círculo vicioso de definir los números reales como límites de sucesiones convergentes sin haber definido de antemano un conjunto al cual pertenezcan dichos límites.

Cantor señala de manera explícita las objeciones a los intentos previos de definir números irracionales en términos de series infinitas. En este sentido, se propone desarrollar una teoría de los irracionales sin presuponer su existencia. Para ello toma como punto de partida los números racionales. Cantor empieza por definir una sucesión fundamental:

La sucesión infinita $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ se llama una sucesión fundamental si existe un entero N tal que para cualquier valor positivo real ϵ, se cumple que:

$|a_{n+m} - a_n| < \epsilon$, para todo m y todo n mayores que N.

Si una sucesión $\{a_n\}$ satisface la anterior condición, Cantor dice que que la "sucesión infinita $\{a_n\}$ tiene un límite definido b". Ésta era estrictamente una convención para significar, no que la sucesión alcanza el límite actual b, o que se presumía que b fuese el límite, sino únicamente que cada una de tales sucesiones $\{a_n\}$ tenía asociado un símbolo definido b. Cantor fue bien explícito en usar la palabra "símbolo" para describir el papel de b.

Luego definió relaciones de orden entre sucesiones. Sean las sucesiones $\{a_n\}$ asociada con b_1, $\{b_n\}$ asociada con b_2.

i. $b_1 = b_2$, si para todo número racional $\epsilon > 0$, existe un número natural N, tal que $|a_n - b_n| < \epsilon$, para todo $n \geq N$

ii. $b_1 > b_2$, si existe un número racional $\epsilon > 0$ y un número natural N, tal que $a_n - b_n > \epsilon$, para todo $n \geq M$.

Un número racional p se identifica con la sucesión constante $\{p\}$ y además, como se puede comparar esta sucesión con cualquier otra sucesión $\{a_n\}$ la cual tiene asociada el símbolo b, se tendrá que $p = b$, $p < b$ ó $p > b$.

El conjunto de estos símbolos es un nuevo sistema B, que al ser dotado de una estructura de cuerpo ordenado constituye el conjunto de los números reales. Los símbolos de B sólo adquieren sentido numérico cuando son puestos en correspondencia uno a uno con los puntos de la línea recta A. Ello no ofrece dificultades para los números racionales. En el caso de los irracionales, Cantor sabía que dado un punto sobre la línea, si éste no tiene una relación racional con la unidad entonces podría ser aproximado por una sucesión de puntos racionales

$$a_{1,}a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

cada uno de los cuales corresponde a un elemento en A. La sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión fundamental que se aproxima tanto como se quiera al punto dado. Cantor expresaba esta condición como sigue: "la distancia del punto a ser determinado al origen "o" es igual a b, donde b es el número correspondiente a la sucesión $\{a_n\}$". Dado que cada elemento de A tiene un único correspondiente en B, la unicidad de la representación de los puntos de la recta en B estaba garantizada. Pero Cantor no pudo garantizar la correspondencia inversa: que a cada elemento b de B le correspondiera un punto de la recta. Para esto tuvo que invocar el siguiente axioma:

> A cada número le corresponde un punto en la línea recta,
> cuya coordenada es igual al número. (tomado de [14], p. 238)

Tomadas como conjuntos numéricos, se puede demostrar que las construcciones de Dedekind y Cantor son equivalentes; además cumplen con el "principio de Arquímedes". Modernamente decimos que el conjunto de números reales forman un campo arquimediano, totalmente ordenado.

5. Los números infinitamente grandes: transfinitos

Durante el período que va de 1879 a 1897, Cantor establece los elementos conceptuales básicos que le permitirán la instauración de los ordinales y cardinales transfinitos. Estos aspectos giran alrededor de las nociones de conjunto derivado y de potencia.

En primer lugar, Cantor aprovecha el teorema de Bolzano-Weierstrass para clasificar los conjuntos infinitos de puntos en intervalos acotados. De hecho, el teorema como tal ya establece una aceptación del infinito actual, al tomar un conjunto infinito de puntos como un todo en un intervalo finito. El concepto de punto de acumulación constituye el soporte de la teoría de conjuntos de Cantor. Con base en él, Cantor define los conjuntos derivados.

Dado un conjunto arbitrario P, Cantor establece las siguientes convenciones:

1. Se denomina P' el conjunto de puntos de acumulación de P o primer derivado;
2. Se denomina P'' el conjunto de puntos de acumulación de P' o segundo derivado; y así sucesivamente ...
3. P^n es el conjunto de puntos de acumulación de P^{n-1} o enésimo derivado.

En seguida, Cantor define los conjuntos de puntos de primera especie, como aquellos para los cuales existe un n tal que $P^n = \emptyset$. En el caso que $P^n \neq \emptyset$ para todo n, los denominó de segunda especie.

A continuación Cantor define el concepto de potencia como medio para comparar conjuntos de acuerdo con el número de elementos.

> Se dice que dos conjuntos M y N son de la misma potencia si a todo elemento de M corresponde un elemento de N, y recíprocamente, a todo elemento de N corresponde un elemento de M. (tomada de [14], p. 246)

Cantor denomina conjuntos numerables a los conjuntos cuya potencia es igual a la potencia del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Los continuos, conjuntos no numerables, tendrían la potencia de los números reales.

El terreno estaba preparado para que en 1882, en su manuscrito *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Cantor le diera carta de legitimidad a los números transfinitos.

Sin embargo, los números transfinitos aparecen por primera vez en un corto artículo de 1880 en el cual Cantor enuncia el transfondo de la construcción de los números infinitos a través de los conjuntos derivados de segunda especie. Allí expresa que su teoría es:

> [...] una generación dialéctica de conceptos que continua siempre adelante, y está así libre de cualquier ambigüedad. (Tomado de [14], p. 247)

Esa generación dialéctica partía de la propiedad de los conjuntos P de segunda especie mediante el siguiente planteamiento:

Si $P^n \neq \emptyset$, para todo n, se puede definir $P^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^n$. Si $P^\infty \neq \emptyset$ es infinito se puede definir la cadena:

$$P^\infty, P^{\infty+1}, P^{\infty+2}, \ldots, P^{\infty+\infty}, \ldots$$

A estas alturas los símbolos infinitos eran tomados por Cantor sólo como "símbolos de referencia" que le servían para el estudio de conjuntos de segunda especie. Sin embargo, no tardó mucho tiempo en comprender que la designación de los conjuntos a partir de P^∞ exigía la ampliación el universo de los números de contar más allá de los naturales. La mesa estaba servida para la incorporación de los números infinitos.

Los transfinitos con una identidad numérica aparecen por primera vez en 1882 en su manuscrito *Grundlagen* o *Fundamentos de una teoría general de conjuntos*. Los *Grundlagen* estructuraban la teoría sobre la noción de infinito actual. Desde el comienzo Cantor plantea las diferencias entre el infinito actual y el infinito potencial.

Cantor era consciente de que la incorporación práctica del infinito actual en sus trabajos le permitía extender el concepto de número más allá de los niveles existentes. Ahora se trataba de formalizarlos: "definiré a continuación los números enteros reales infinitos, a los que me vi conducido durante los últimos años sin caer en la cuenta de que eran números concretos con un significado real" (tomado de [14], p. 251). Cantor entonces, define dos principios de generación

Primer principio: Este principio consiste en producir nuevos ordinales mediante la adición sucesiva de unidades.

Segundo principio: Cuando se tenga una sucesión ilimitada de números, se define un nuevo número como el mínimo número mayor que cualquier componente de la sucesión.

El segundo principio permite definir el número transfinito ω como el primer número que sigue a la sucesión completa de los números naturales $\{n\}$. Teniendo este número ω, Cantor aplica el primer principio y obtiene la secuencia:

$$\omega, \omega + 1, \omega + 2, \cdots .$$

Luego, el segundo principio le permite definir el elemento máximo de esta sucesión 2ω. Al continuar de esta forma combinando los dos principios, obtiene cadenas como:

$$\omega 2 + 1, \omega 2 + 2, \omega 2 + 3, \cdots, \omega 2 + n, \cdots ,$$

Tomando los naturales como la primera clase de números y a partir del transfinito ω la segunda clase, Cantor se dio cuenta que debía poner cierto tipo de cotas que permitieran diferenciar las distintas clases. A este respecto escribe:

> Definimos por tanto la segunda clase de números (II) como la colección de todos los números (en una sucesión creciente determinada) que pueden formarse por medio de los dos principios de generación:
>
> $$\omega, \omega+1, \ldots, \upsilon_0\omega^{\mu} + \upsilon_1\omega^{\mu-1} + \ldots + \upsilon_{\mu}, \omega^{\omega}, \ldots, \alpha, \ldots,$$
>
> con la condición de que todos los números que preceden a α (del 1 en adelante) constituyen un conjunto de potencia equivalente a la de la primera clase de números (I). (tomado de [14], p. 253)

El concepto fundamental empleado para diferenciar las clases, es el de potencia. Cantor probó incluso no solo que las potencias de las clases de números I y II son diferentes, sino que la potencia de los números de clase II es precisamente la que sigue a la potencia de los números de clase I.

En una extensa carta del 5 de noviembre de 1882 a Dedekind, Cantor le plantea la necesidad del principio de limitación a través del concepto de potencia. Además le explica algo que resulta muy importante para entender el procedimiento mental utilizado: ha decidido darle el tratamiento de números reales de segunda especie a los objetos $\omega,\ \omega+1,\ \ldots$ que había llamado simplemente símbolos de infinidad, porque entre ellos se podía establecer una cierta extensión de los números finitos.

Sin embargo, estos números no cumplían las mismas propiedades de los números finitos; por ejemplo no cumplían la ley conmutativa: sea

$$\begin{aligned} \omega &= (a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots), \\ 1+\omega &= (1, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots) \end{aligned}$$

diferente a la secuencia

$$\begin{aligned} \omega+1 &= (a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, 1), \\ 2\omega &= (a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots) \end{aligned}$$

diferente a la secuencia

$$(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots) = \omega 2.$$

El hecho de que ω y $\omega+1$ fueran dos números ordinales distintos, pero con igual cardinalidad llevó a Cantor a establecer una diferencia importante entre los números finitos y los transfinitos. En los números finitos no hay diferencia entre su ordinal y su cardinal, mientras que en los transfinitos hay diferencias sustanciales. Esta distinción proviene para Cantor de la diferencia conceptual entre “Zahl” y “Anzahl”. El término Zahl se refiere a un conjunto sin importar el orden. Anzahl toma en cuenta el orden.

Partiendo de esta diferencia, Cantor define en su trabajo *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (*Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinitos*), los cardinales transfinitos. Los *Beiträge* es un libro en el cual Cantor busca sistematizar y fundamentar su teoría de números transfinitos. Es allí donde introduce por primera vez el símbolo alef para la representación de los cardinales transfinitos.

En el apartado §1 de los *Beiträge,* después de su bien conocida definición, según la cual un conjunto (Menge) es una “colección cualquiera M de objetos definidos y distinguidos de nuestra percepción o nuestro pensamiento” ([7], p. 85), Cantor introduce la definición de número cardinal:

> Damos el nombre de “potencia” o “número cardinal” de M a aquel concepto general, que surge de la facultad activa de nuestro pensamiento, acerca del conjunto M cuando hacemos abstracción de la naturaleza de sus diversos elementos m y del orden en el cual son dados. ([7], p. 86)

En el apartado §2 de los *Beiträge*, Cantor relaciona los cardinales de acuerdo a su tamaño: Los conjuntos A y B tienen la misma cardinalidad o el mismo número cardinal, que modernamente se designa como $|A| = |B|$, si existe una bisección de A a B (Cantor escribe $\overline{\overline{A}}$ en lugar de $|A|$; las dos barras denotan el doble proceso de abstracción implícito en los cardinales). En este sentido, todo conjunto infinito numerable tiene la cardinalidad del conjunto $\mathbb{N}$, de todos los ordinales de la primera clase (I), que Cantor denota como $\aleph_0$ (alef cero). Para Cantor, $|A| < |B|$ si existe una inyección de A en B, pero no existe una inyección de B en A. Para probar que $|A| = |B|$ se demuestra que $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$; enunciado conocido como “teorema de Cantor-Schröder-Bernstein” pues fue demostrado también, de manera independiente, por Felix Bernstein y E. Schröder.

A partir del teorema de Cantor-Schröder-Bernstein no es complicado demostrar que el conjunto $2^{\mathbb{N}}$, de infinitas sucesiones de ceros y unos, tiene la misma cardinalidad $|\mathbb{R}|$ de los números reales. Ello significa que $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, donde $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es el conjunto de partes de $\mathbb{N}$. Como

Cantor ya ha demostrado antes que el conjunto de los números reales no es numerable, se tiene la desigualdad: $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. Por otro lado, Cantor retoma el hecho (demostrado por él mismo en 1882, como se dijo antes) de que el conjunto de números ordinales de la primera clase (I) tiene una potencia menor que el conjunto de ordinales de la segunda clase (II). Denotando por $\aleph_1$, a la potencia del conjunto de ordinales de la segunda clase (II) se tendrá que $\aleph_0 < \aleph_1$; además Cantor ha demostrado que $\aleph_1$ es el cardinal transfinito siguiente a $\aleph_0$.

Aunque Cantor no lo desarrolla en los *Beiträge*, establece los elementos teóricos necesarios para el establecimiento de la secuencia inagotable de los cardinales transfinitos:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots, \aleph_{\aleph_\omega}, \ldots$$

Uno de los aspectos que más atormentó a Cantor fue determinar el cardinal transfinito que correspondía a la potencia del continuo. Cantor conjeturó que correspondía a $\aleph_1$. En este sentido enunció dos versiones de la denominada *Hipótesis del Continuo* que se detallan a continuación.

Versión de 1878: todo conjunto no numerable de números reales tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$.

Versión de 1883: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Concretamente, la Hipótesis del Continuo indica que si $X \subseteq \mathbb{R}$, entonces, $|X|$ es finito, ó $|X| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ ó $|X| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. La determinación de $|\mathbb{R}|$ corresponde al primero de los famosos problemas planteados en 1900 por David Hilbert a la comunidad matemática del siglo XX. En 1939, Kurt Gödel demostró que la Hipótesis del Continuo no puede ser refutada en ZFE, es decir en la axiomática de Zermelo-Fraenkel (ZF) más el axioma de elección. En 1963, Paul Cohen, demostró la independencia de la Hipótesis del Continuo en ZFE. Mediante el método del "forcing", Cohen muestra la existencia de un modelo para ZFE, en el cual se puede admitir cualquier valor $\aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots, \aleph_{\aleph_\omega}$ para $2^{\aleph_0}$.

6. Cantor y los números infinitamente pequeños

Hacia 1891, Cantor se dio cuenta que su definición de conjunto como una colección arbitraria de elementos discernibles por nuestra intuición, daba lugar a contradicciones. La principal paradoja aparecía al tomar el conjunto C de todos los conjuntos como un conjunto, y asignarle un número cardinal α. Si tomamos partes de C, $\mathcal{P}(C)$, y designamos por β a su respectivo cardinal, por la inecuación fundamental de la teoría de conjuntos tenemos que

$$\alpha < \beta$$

Por otro lado, $\mathcal{P}(C) \subseteq C$, entonces:

$$\alpha \geq \beta,$$

que contradice lo anterior.

En 1895, Cantor se anticipa a la paradoja de Burali-Forti, planteando el siguiente razonamiento: Sea Ω la colección de todos los números ordinales. El conjunto bien ordenado Ω tiene asociado un número ordinal δ, el cual debe ser mayor que cualquier ordinal en Ω; pero $\delta \in \Omega$ y por lo tanto, $\delta < \delta$.

Estas inconsistencias obligaron a una revisión conceptual por parte de Cantor. Empezó negándole estatus de conjunto a colecciones arbitrariamente grandes como las anteriores. Para ello introdujo los dos siguientes teoremas:

> Teorema 1: El sistema de todos los números ordinales es una colección absolutamente infinita e inconsistente.
>
> Teorema 2: El sistema de los alephs es absolutamente infinito e inconsistente.

Uno de los problemas centrales de la teoría de Cantor era demostrar que la potencia de cualquier conjunto tenía que ser un alef. La colección de todos los conjuntos mostraría que el apelativo de conjunto exigía una regulación especial. No bastaba la definición ingenua incorporada, en primera instancia, por Cantor. Para evitar contradicciones, Cantor excluye aquellas agrupaciones portadoras de inconsistencia. En primer lugar, define una multitud consistente si no lleva a contradicciones. Las colecciones inconsistentes las caracterizaba de la siguiente manera:

A una colección constituida de tal forma que la "unificación" de todos sus elementos en un todo lleva a contradicción, Cantor la llamó infinito absoluto o "colección inconsistente".

En este sentido, Cantor intentaba eludir el impase diferenciando multitudes consistentes e inconsistentes, restringiendo la palabra conjunto para las consistentes. Su noción de multitud inconsistente, ligada al infinito absoluto era poco precisa y además, tenía connotaciones místicas que nada tenían que ver con estructuras y teorías matemáticas rigurosas.

Un aspecto que llama la atención de la teoría de Cantor es su rechazo a las cantidades infinitamente pequeñas, pues parecía contradecir su concepción misma del infinito actual. ¿Cuál era la razón para aceptar la existencia matemática del infinito actual en lo grande y rechazarla en lo pequeño? En carta a Weierstrass comenta:

> Los números lineales, no cero (resumiendo, números los cuales pueden ser pensados como longitudes de una línea recta, acotados y continuos), los cuales serán más pequeños que cualquier número arbitrario no existen, esto es, ellos contradicen el concepto de número lineal.

Según Cantor, los infinitesimales no tenían mucha importancia teórica pues carecían de una estructura propia como cuerpo teórico matemático. Los trabajos de Abraham Robinson, poco después de mediados del siglo XX, demostrarían otra cosa.

7. La lógica de primer orden y los números infinitos

En 1960, el matemático Abraham Robinson, usando la teoría de modelos, le abre paso a la fundamentación de los infinitesimales en lo que se ha llamado el *análisis no estándar*.

> En otoño de 1960 se me ocurrió que los conceptos y métodos de la Lógica Matemática contemporánea eran capaces de proveer un marco adecuado para el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral por medio de los números infinitamente grandes e infinitamente pequeños. ([22], p. vii)

Sin embargo, la teoría de modelos no estándar no es un invento de Robinson. El primero en introducir modelos no estándar fue el lógico noruego Thoralf Skolem. El proceso seguido por Skolem se nos antoja hoy en día natural: sea una teoría matemática determinada, por ejemplo los números naturales ordinarios y su aritmética, que llamaremos "universo estándar" y lo designaremos por $\mathcal{N}$. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje en el cual hablaremos de $\mathcal{N}$. Cualquier enunciado en $\mathcal{L}$ es una proposición concerniente a $\mathcal{N}$, la cual es falsa o verdadera. Denominemos Teo $\mathcal{N}$, al conjunto de todos los enunciados verdaderos en $\mathcal{N}$. Se dice que $\mathcal{N}$ es un modelo para Teo $\mathcal{N}$, es decir $\mathcal{N}$ es una estructura matemática, tal que todo enunciado de Teo $\mathcal{N}$, al ser interpretado como una proposición de $\mathcal{N}$ es verdadera. El asunto es que Skolem demostró que existen otros modelos para Teo $\mathcal{N}$, es decir estructuras $^*\mathcal{N}$, esencialmente diferentes de $\mathcal{N}$, y que son modelos para Teo $\mathcal{N}$, son los llamados "modelos no estándar".

El transfondo de la constitución de modelos no estándar tiene que ver con la domesticación del infinito. En particular, se necesita controlar el crecimiento y decrecimiento de los cardinales transfinitos. Para ello Leopold Löwenheim, Thoralf Skolem y Alfred Tarski incorporan dos teoremas básicos. El primer teorema permite atrapar cardinalidades descendentes:

Teorema 1. *Sea* Γ *un conjunto satisfactible de fórmulas en un lenguaje de cardinalidad* $\varkappa$*. Entonces* Γ *es satisfactible en alguna estructura de cardinalidad* $\leq \varkappa$*.*

Los primeros resultados en este sentido, fueron publicados por Löwenheim en 1915, para el caso finito. En 1920, Skolem lo extendió para lo numerable, en los que se contituyó el teorema de Löwenheim–Skolem (LS). (Versión tomada de [12], p. 197)

La forma del teorema para cardinalidades ascendentes se debe a Tarski, denominado el teorema de Löwenheim–Skolem–Tarski (LST):

Teorema 2. *Sea* Γ *un conjunto satisfactible de fórmulas en un lenguaje de cardinalidad* $\varkappa$*. Si* Γ *es satisfactible en alguna estructura de cardinalidad infinita. Entonces para todo cardinal* $\lambda \geq \varkappa$ *existe una estructura de cardinalidad* λ *en la que se satisface* Γ*. (Versión tomada de [12], p. 199)*

Desde la óptica que nos interesa, los teoremas de LS y LST, capturan el infinito en todos sus órdenes, constituyéndose en la salida lógica al problema ontológico del infinito. La aceptación de los infinitesimales y los transfinitos como números propiamente dichos empezaba a hacerse efectiva.

El libro *Non-Standard Analysis* (1966) de Abraham Robinson constituye el punto culminante de este itinerario. La herramienta lógica usada por Robinson fue el teorema de "compacidad", el cual, en una versión para lenguajes numerables, aparece como un corolario del "teorema de completitud" en la tesis doctoral de Gödel en 1930. Lo profundo del teorema de compacidad es que si se tiene una colección de enunciados formulados en el lenguaje $\mathcal{L}$, y en el universo estándar toda subcolección finita es verdadera, existe un universo no estándar, en el cual la colección entera es verdadera. En versión moderna:

Teorema 3. *(b) Si todo subconjunto* Γ_0 *de* Γ *es satisfactible, entonces* Γ *es satisfactible. (Versión tomada de [12], p. 190)*

El teorema de compacidad permite la entrada de los infinitésimos mediante procesos como el siguiente. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje del universo estándar de los números reales, y sea el número i, sobre el cual se establece la siguientes colección infinita de enunciados:

$$\begin{aligned} P_1 &= 0 < i < 1/2 \\ P_1 &= 0 < i < 1/3 \\ P_1 &= 0 < i < 1/4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Cada uno de estos enunciados pueden ser expresado en el lenguaje $\mathcal{L}$. Con referencia al universo estándar de los número reales, cada colección finita de los enunciados anteriores es verdadera. Entonces, por el axioma de compacidad, será verdadera para todos los enunciados. Sin embargo, ningún número real cumple con esta propiedad, pues para cualquier real $\epsilon > 0$, existe n tal que $\epsilon > \frac{1}{n}$. Por lo tanto, el número i pertenece a un universo mucho más amplio que $\mathbb{R}$. Robinson simboliza al nuevo campo numérico, denominado *universo no estándar* de los reales, por $^*\mathbb{R}$. Este universo contiene a los números reales estándar y a los elementos infinitesimales i, que pueden ser usados de manera consistente. Más aún, también acoge a los números infinitamente grandes. De esta manera, si un número $a \in^* \mathbb{R}$ puede suceder que sea un número finito, un infinitesimal o un número infinito:

1. a es un número finito si $a \in \mathbb{R}$.
2. a es un infinitesimal si $|a| < m$, para todo m perteneciente a los reales estándar positivos (cero, por ejemplo es un infinitesimal).
3. Si a es un infinitesimal, $a \neq 0$, entonces a^{-1} es un número infinito.

De esta forma el universo $^*\mathbb{R}$ del análisis no estándar involucra a los números finitos (pertenecientes a $\mathbb{R}$), los números infinitamente pequeños y los números infinitamente grandes (inversos de los infinitesimales).

8. El universo numérico no estándar y el continuo

No es nuestro propósito aquí analizar a fondo el modelo no estándar de los números reales. Tenemos un objetivo modesto. Se trata de brindar una idea intuitiva de los cambios que se darían a nivel de las concepciones del continuo y de los sistemas numéricos, todo esto en relación con el infinito. En este sentido, es pertinente recordar que la estructura de los números reales, caracterizada como campo ordenado y completo, es un producto moderno que nos permite visualizar el continuo geométrico como un agregado de puntos. Así lo entendieron matemáticos como Weierstrass, Cantor y Dedekind, quienes se propusieron la construcción del continuo aritmético. La idea fundamental se basaba en partir de los números racionales y, a través de ellos, construir los irracionales. Hay que entender que esa necesidad se torna perentoria al comprobar que los infinitos racionales no llenan la totalidad de la recta geométrica.

La idea general, entonces, consiste en construir un conjunto numérico de tal suerte que sus elementos "llenen" completamente los puntos de la línea recta, prototipo de continuo. Sin embargo sabemos que este paso resultó ser una quimera; tanto Cantor como Dedekind, al final, debieron acudir a la autoridad de un axioma para establecer esta correspondencia.

Como vemos, los presupuestos teóricos, las técnicas utilizadas y finalmente la axiomática, llevan a un copamiento total de la recta por los elementos del conjunto numérico. Pero éste es, en el fondo, un acto discriminatorio; es una manera de expulsar los infinitesimales y los transfinitos por una vía jurídica.

Para entender un poco la extensión de Robinson analicemos un ejemplo esclarecedor. Es un hecho elemental para nosotros que el número 0.999999... y el 1, coinciden. La demostración nos parece sencilla: tomemos $x = 0{,}999999...$, $10x = 9{,}999999...$ y restémolos

$$\begin{array}{rcl} 10x & = & 9{,}999999... \\ -x & = & -0{,}999999... \\ \hline 9x & = & 9{,}0000000000... \end{array}$$

obteniendo $x = 9/9 = 1$.

En el fondo para lograr el resultado estamos utilizando el concepto de convergencia de una serie, que es una noción del continuo estándar, es decir, la serie:

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots$$

converge al límite 1, lo cual significa que la sucesión de sumas parciales $\left\{\frac{\frac{9}{10}(1-\frac{1}{10^n})}{1-\frac{1}{10}}\right\} = \left\{\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)\right\}$ tiene como límite 1, cuando n tiende a infinito, o si queremos expresarlo en lenguaje de inecuaciones:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)\left(\left|1 - \left(1 - \tfrac{1}{10^n}\right)\right| < \epsilon\right).$$

Observemos que el paso fundamental, que finalmente nos permite establecer la identificación del número 0.99999... y el número 1, es la aplicación del límite. Pero esto es un ardid teórico; el límite permite "ver" como "acabado" un proceso potencial. No hay ninguna razón ontológica para ello. Usando el mismo argumento del apartado anterior tenemos que el teorema de compacidad le abre paso a la existencia de un número i, para el cual serán verdaderos los siguientes enunciados:

$$\begin{array}{rcl} P_1 & = & 0 < i < 0{,}9 \\ P_1 & = & 0 < i < 0{,}99 \\ P_1 & = & 0 < i < 0{,}999 \\ & \vdots & \end{array}$$

De esta forma i sería tal que estaría entre 0.99999... y 1. De la misma manera se podrían obtener infinitos términos que cumplen con la misma propiedad.

Para Imre Lakatos , los resultados de Robinson tienen implicaciones filosóficas profundas en cuanto a la conceptualización del continuo. Según Lakatos, históricamente se pueden reconocer dos teorías rivales: el continuo Weierstrasiano y el continuo Leibniziano. El continuo de Leibniz es más “rico”, pues contiene los reales weierstrassianos, los infinitesimales y los infinitamente grandes. Éste también es el caso del continuo de Robinson.

Sin embargo, para Robinson la totalidades infinitas sólo tenían un carácter referencial, eran carentes de significado. Los infinitesimales se incorporan a las matemáticas porque constituyen una herramienta útil que permite abreviar procesos abstrusos:

> Me siento totalmente incapaz de captar la idea de una totalidad infinita en acto. A mí me parece que hay un abismo insalvable entre conjuntos o estructuras de uno, dos o cinco elementos, por una parte y estructuras infinitas por la otra... (tomado de [23])

De esta forma, la posición de Robinson es radical frente al infinito actual; su idea es aferrarse a la tradición aristotélica, y usar los infinitesimales sin un soporte ontológico. Al respecto, el mismo Robinson declara:

> Una vez más, este criterio no implica que los términos de la teoría hayan de interpretarse directamente y en detalle. Basta que tengamos unas reglas que nos digan como aplicar al mundo empírico ciertas partes relevantes de nuestra teoría. (tomado de [23])

Tenemos pues, que con la construcción de modelos no estándar, Skolem demostró algo muy profundo epistemológica y filosóficamente hablando; demostró que los modelos matemáticos no tienen naturaleza categórica y que en últimas, la escogencia de tal o cual teoría es cuestión de gustos, tradición, comodidad o requerimientos técnicos. Por supuesto que existen modelos oficiales que los matemáticos nos esforzamos por resguardar, eso es innegable, pero eso no significa que sean absolutos. De hecho, el mismo Gödel en 1973, le pronosticaría al análisis no estándar un camino promisorio, señalándolo como el análisis del futuro.

Nuestra exploración inició con la pregunta sobre la ontología de los números. Vemos que históricamente esta noción ha ido variando de acuerdo a los cambios conceptuales que se han ido dando históricamente. Hoy nuestra conceptualización sobre el número es mucho más fina, que aquella de Euclides, según la cual el número era una colección de unidades. También hemos superado aquella definición en la que muestra al número como una clase de equivalencia. La lógica nos ha mostrado un universo, que a pesar de ser mucho más rico respeta la tradición y se muestra generoso con algunos objetos que en un momento histórico fueron desechados como patologías. Al ampararse en la teoría de modelos de la lógica matemática para construir su modelo no estándar de los números reales, donde los números infinitos tienen sentido, Robinson está siguiendo el juego de la legalidad matemática. Nos está insinuando que la forma de legislar en lo matemático no es de ninguna manera absoluta.

Referencias

[1] Arbeláez, G. *Una aproximación histórico-filosófica a la demostración y el rigor matemático*, Universidad del Valle, Tesis de Maestría, Cali, 1995.

[2] Aristóteles. *Física*, Gredos, Madrid, 1998.

[3] Aristóteles. *Metafísica*, Gredos, madrid, 1998.

[4] Becker, O. *Las magnitudes y límites del pensamiento matemático*, Ediciones Rialp, Madrid, 1966.

[5] Berkeley, G. *El Analista. Discurso dirigido a un matemático infiel*. En: El Mundo de las Matemáticas, Colección Sigma, Grijalbo, Barcelona, 1994.

[6] Bolzano, B. Las Paradojas del infinito, Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, colección MATHEMA, 1991 (Primera versión en alemán: Leipzig, 1851).

[7] Cantor, G. *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*, Dover Publications, New York, 1955 (primera versión en alemán 1895)

[8] Cauchy, A. L. *Curso de Análisis*, Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, colección MATHEMA, 1994 (Primera versión en francés, 1821).

[9] Cavailles, J. *Philosophie Mathématique*, Hermann, Paris, 1962.

[10] Dauben, J. W. *Georg Cantor, His mathematics and Philosophy on the infinite*, Harvard University Press, Cambridge, 1979.

[11] Dedekind, R. *¿Qué son y para qué sirven los números?*, Alianza editorial, Madrid, 1998 (Primera edición en 1872).

[12] Enderton, H. *Una introducción matemática a la lógica*, Dirección general de publicaciones, Universidad Autónoma de México, México, 1987. (traducción del original: *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, New york, 1972).

[13] Euclides. *Elementos*. En: *Científicos griegos*, recopilación de Francisco Vera, Aguilar, Madrid, 1970.

[14] Grattan-Guinness, I. *Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910, Una introducción histórica*, Alianza editorial, Madrid, 1982.

[15] Lakatos, I. *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Alianza Editorial, Madrid, 1978.

[16] Leibniz, G. W. *Análisis Infinitesimal: Un nuevo método para los máximos y los mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene ante las cantidades fraccionarias o irracionales, y es un singular género de cálculo para estos problemas*, Editorial Tecnos, S. A., 1987.

[17] Marqués de L'Hospital. *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de Líneas curvas*, Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, colección MATHEMA, 1998 (Primera versión anónima: 1696)

[18] Moore, A. W. *The infinite*, Routledge, London and New York, 1990.

[19] Moore, G. H. *Zermelo's Axiom of Choice, its Origins, Development, and Influence*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[20] Pinter, Ch. *Set theory*, Addison Wesley, Massachusetts, 1971.

[21] Recalde, L. C. *El papel del infinito en el surgimiento de la topología conjuntista*, Universidad del Valle, Tesis de maestría, Cali, 1994.

[22] Robinson, A. *Non-Standard Analysis*, North-Holland Publishing, Amsterdam, 1974. (primera edición, 1966).

[23] Robles, J. A. *Las ideas matemáticas de George Berkeley*, Universidad Autónoma de México, México, 1993.

[24] Rucker, R. *Infinity and the mind*, Birkhäuser, Boston, 1982.

[25] Weyl, H. *Número y continuo, el infinito*. En: Mathesis, Filosofía e Historia de las matemáticas, México, vol.I, N°3, agosto de 1985.

Dirección del autor: Luis Cornelio Recalde , Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, lurecal@yahoo.com