



Matemáticas: Enseñanza Universitaria

ISSN: 0120-6788

reviserm@univalle.edu.co

Escuela Regional de Matemáticas

Colombia

Castaño, Jorge I.; Díaz, Walter

Solución aproximada para un problema vectorial mediante desarrollos de Fourier
Matemáticas: Enseñanza Universitaria, vol. XV, núm. 1, junio, 2007, pp. 77-84

Escuela Regional de Matemáticas

Cali, Colombia

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=46815107>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

Solución aproximada para un problema vectorial mediante desarrollos de Fer

Jorge I. Castaño

Walter Díaz

Recibido Jun. 12, 2006

Aceptado Sept. 5, 2006

Abstract

In this paper, our aim is to find numerical analytical solutions to initial value problems using Fer developments. These problems are closely related to a kind of vector initial value problems.

Keywords: vector initial value problems, exact solutions, Fer development.

MSC(2000): 35C10, 35A20

Resumen

En este artículo se propone encontrar, mediante el uso de los desarrollos de Fer, soluciones analíticas numéricas para problemas de valor inicial, relacionados con los problemas vectoriales de valores iniciales.

Palabras y frases claves: problemas vectoriales de valores iniciales, solución exacta, desarrollo de Fer.

1 Introducción

Los problemas vectoriales de valores iniciales ya han sido estudiados por diversos autores como [5] y [6]. En este artículo se encontrará una solución aproximada continua de la solución teórica exacta $y_0(t)$ del problema (1) utilizando el método de los desarrollos de Fer, el cual consiste en representar la solución aproximada como un producto de funciones exponenciales matriciales.

Los desarrollos de Fer fueron obtenidos originalmente en la década del 50 para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales no autónomos. En estudios posteriores han sido aplicados para la resolución de la ecuación diferencial de un operador lineal $A(t)$ en mecánica cuántica y la correspondiente al operador no lineal en mecánica clásica [3], recientemente ha sido utilizado para resolver ecuaciones diferenciales lineales y no lineales [10].

El método en mención tiene la ventaja de exigir un mínimo de condiciones a los coeficientes matriciales, tan sólo se exige continuidad en ellos, frente a otros métodos que exigen condiciones mucho más fuertes como diferenciabilidad y analiticidad, entre otros. Con respecto a las desventajas que pueda presentar el método, se destaca el elevado coste computacional, dada la aparición de funciones exponenciales.

Muchos problemas físicos son modelados en forma vectorial con valores iniciales. Ejemplos de tales sistemas aparecen en problemas de difusión (ver p.e., [1] y [7]), y en mecánica (ver p.e., [2]).

En este artículo se considera el problema vectorial de valores iniciales del tipo:

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= A(t)y_0(t) + f(t) \\ y_0(0) &= y_0 \quad \text{con } 0 \leq t \leq b, \end{aligned} \quad (1)$$

donde $A(t)$ es una función continua que toma valores en $\mathbb{C}^{r \times r}$, $f(t)$ y $y(t)$ son funciones con valores en $\mathbb{C}^r$.

2 Notación y preliminares

Adoptaremos los siguientes resultados y notaciones: El conjunto de todos los valores propios de una matriz M en $\mathbb{C}^{r \times r}$ lo denotaremos por $\sigma(M)$ y el radio espectral de M , denotado por $\rho(M)$, es el máximo elemento del conjunto

$$\{|z| ; z \in \sigma(M)\}. \quad (2)$$

La norma logarítmica de la matriz cuadrada M , la definiremos por:

$$\mu(M) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{\|I + hM\| - 1}{h}, \quad (3)$$

donde I es la matriz identidad en $\mathbb{C}^{r \times r}$. Además

$$\begin{aligned} |\mu(M)| &\leq \|M\| \\ \mu(\alpha M) &= \alpha \mu(M) \quad \text{para } \alpha \geq 0 \\ \mu(M) &= \max \left\{ z ; z \in \sigma \left(\frac{M + M^H}{2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

con M^H la transpuesta conjugada de M .

Si $P(t)$ es una matriz regular y diferenciable, entonces derivando en la relación $P(t)P^{-1}(t) = I$, se deduce que

$$(P^{-1}(t))' = -P(t)^{-1}P'(t)P^{-1}(t). \quad (5)$$

Si P y Q son dos matrices de $\mathbb{C}^{r \times r}$, se llamara conmutador de P y Q a la expresión

$$[P, Q] = PQ - QP. \quad (6)$$

Adoptaremos también el lema de Banach: Si A es una matriz invertible y se cumple que:

$$\|B - A\| < (\|A^{-1}\|)^{-1}, \quad (7)$$

entonces B también es invertible y

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \|B^{-1}\| \|B - A\|.$$

Teniendo en cuenta entonces la desigualdad

$$\|B^{-1}\| < \|A^{-1} - B^{-1}\| + \|A^{-1}\|,$$

se puede escribir finalmente

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}\| \|B - A\|} \|B - A\|. \quad (8)$$

3 Solución del problema

Dado el problema (1), la solución teórica puede expresarse como:

$$y_0(t) = U(t) y_0 + U(t) \int_0^t U^{-1}(s) f(s) ds, \quad (9)$$

donde $U(t)$ es la solución teórica exacta del problema matricial

$$U'(t) = A(t)U(t), \quad U(0) = I. \quad (10)$$

La correspondiente solución aproximada viene dada por

$$\tilde{y}_0(t) = \tilde{U}(t)y_0 + \tilde{U}(t) \int_0^t \tilde{U}^{-1}(s) f(s) ds, \quad (11)$$

donde $\tilde{U}(t)$ es la solución aproximada de (10).

De [4] se tiene que la solución $\tilde{U}(t)$ aproximada de (10) es tal que

$$U(t) = \tilde{U}_n(t)U_n(t) \quad (12)$$

$$U'_n(t) = A_n(t)U_n(t), \quad U_n(0) = I \quad (13)$$

$$\tilde{U}_n(t) = e^{F_1(t)} e^{F_2(t)} \dots e^{F_n(t)}, \quad (14)$$

donde,

$$F_n(t) = \int_0^t A_{n-1}(s) ds, \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

$$A_n(t) = \int_0^t \left\{ \int_0^u e^{-(1-s)F_n(t)} [A_{n-1}(t), F_n(t)] e^{(1-s)F_n(t)} ds \right\} du, \quad (16)$$

con $A_0(t) = A(t)$, y donde dicha relación recursiva tiene las siguientes cotas

$$\|A_n(t)\| \leq k_n(t) \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Llamando

$$K_n(t) = \int_0^t k_n(s) ds \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

entonces nuevamente de [4], se tiene que

$$\|F_{n+1}(t)\| \leq \int_0^t \|A_n(s)\| ds \leq K_n(t), \quad (19)$$

y además el desarrollo (12)-(16) es válido para aquellos valores de t tales que

$$\int_0^t \|A(s)\| ds \leq K_0(t) \leq \Psi = 0,8604065, \quad (20)$$

con $K_0(t) \geq K_1(t) \geq \dots \geq K_n(t) \geq \dots$, $0 \leq t \leq b$ y $K_n(t) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, siendo $[0, \delta]$ el intervalo donde se satisface (20). Además de [4],

$$\|U(t) - \tilde{U}(t)\| \leq e^{K_0(\delta)} e^{K_n(\delta)} K_n(\delta) = M\alpha_n, \quad (21)$$

donde $\alpha_n = e^{K_n(\delta)} K_n(\delta)$ y $M = e^{K_0(\delta)}$ con $0 \leq t \leq \delta$.

Así, dado $\epsilon > 0$, como $\alpha_n \rightarrow 0$, basta tomar n tal que se cumpla (21) para garantizar que $\tilde{U}(t)$ es una solución aproximada del problema matricial (10). Puesto que necesitamos el valor de $U(t)$ en b , mientras que, en general, puede ocurrir que $\delta < b$, adoptaremos la siguiente estrategia basada en una partición del intervalo $[0, b]$ para evitar este posible inconveniente.

Dividamos el intervalo $[0, b]$ de la forma $h = \frac{b}{N}$ con $h_n = nh$; $0 \leq n \leq N$, donde $h_0 = 0$ y $hN = b$ y N es un entero suficientemente grande para garantizar la convergencia del desarrollo de Fer en cada subintervalo $[h_i, h_{i+1}]$ con $0 \leq i \leq N - 1$.

Observemos que si $h_i \leq t \leq h_{i+1}$, entonces se sigue que:

$$\frac{d}{dt} U(t, h_i) = A(t)U(t, h_i); \quad U(h_i, h_i) = I \quad (22)$$

$$U(t, 0) = U(t, h_i)U(h_i, h_{i-1})\dots U(h, 0) \quad \text{con } h_i \leq t \leq h_{i+1}. \quad (23)$$

De esta forma aproximamos $U(t) = U(t, 0)$ por

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U}(t, 0) &= \tilde{U}(t, h_i)\tilde{U}(h_i, h_{i-1})\dots\tilde{U}(h, 0) \\ \tilde{U}(h_{i+1}, h_i) &= e^{F_1(h_{i+1}, h_i)} e^{F_2(h_{i+1}, h_i)} \dots e^{F_n(h_{i+1}, h_i)} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Denotemos las cantidades:

$$K_0(h_{i+1}, h_i) = \int_{ih}^{(i+1)h} \|A(s)\| ds \quad (25)$$

$$K_n(h_{i+1}, h_i) = \Psi \left(\frac{K_0(h_{i+1}, h_i)}{\Psi} \right)^{2^n}.$$

De [8] se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| U(t, 0) - \tilde{U}(t, 0) \right\| &\leq e^{K_0(t)} \sum_{j=0}^i K_n(h_{i-j+1}, h_{i-j}) \\ &\times e^{K_n(t, h_i) + K_n(h_i, h_{i-1}) + \dots + K_n(h_{i-j+1}, h_{i-j})} \end{aligned} \quad (26)$$

con $h_i \leq t \leq h_{i+1}$, $1 \leq i \leq N-1$.

Tomando $h > 0$ suficientemente pequeño de modo que se asegure que

$$\delta_1 = \frac{h \max \{ \|A(t)\|, 0 \leq t \leq b \}}{\Psi} < 1, \quad (27)$$

se tiene que

$$K_n(h_{i+1}, h_i) \leq \Psi (\delta_1)^{2^n} = \Psi (\delta_{1,n}); \quad \delta_{1,n} = (\delta_1)^{2^n}, \quad (28)$$

y además,

$$\left\| U(t, 0) - \tilde{U}(t, 0) \right\| \leq N e^{K_0(t, 0)} \Lambda_n, \quad \text{con } \Lambda_n = \delta_{1,n} e^{(1+N)\delta_{1,n}}. \quad (29)$$

Así, se trata de reemplazar en (21) α_n por $N\Lambda_n$, con lo que la condición (21) se transforma en

$$\left\| U(t) - \tilde{U}(t) \right\| \leq MN\Lambda_n,$$

donde $\Lambda_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

De (24) se tiene que $\tilde{U}(t, 0) = \tilde{U}(t, h_i) \tilde{U}(h_i, h_{i-1}) \dots \tilde{U}(h, 0)$ es la aproximación de la solución teórica exacta $U(t, 0)$ con $h_i \leq t \leq h_{i+1}$. Además de (8) se sabe que

$$\begin{aligned} \left\| U^{-1}(s) - \tilde{U}^{-1}(s) \right\| &\leq \left(1 - \|U^{-1}(s)\| \left\| U(s) - \tilde{U}(s) \right\| \right)^{-1} \times \\ &\left\| U^{-1}(s) \right\|^2 \left\| U(s) - \tilde{U}(s) \right\|, \end{aligned} \quad (30)$$

donde $U^{-1}(t)$ existe pues $U(t)$ es un producto de exponenciales.

Llamando $Z(t) = (U^{-1}(t))^H$ y derivando $Z(t)$ y teniendo en cuenta que $(U^{-1}(t))' = -U^{-1}(t)U'(t)U^{-1}(t)$, se tiene por (10) que

$$Z'(t) = [(U^{-1}(t))^H]' = -A^H(t)(U^{-1}(t))^H = -A^H(t)Z(t).$$

Puesto que $A(t)$ es continua en $[0, b]$, llamaremos

$$\|A(t)\| \leq k_0(t), \quad (31)$$

donde $k_0(t)$ es una función positiva o constante positiva. Denotaremos por

$$k_0 = \max \{ k_0(t); 0 \leq t \leq b \}. \quad (32)$$

Por [9] y (32) podemos escribir $\|Z(t)\| \leq e^{k_0 b}$, de donde, teniendo en cuenta que $\|(U^{-1}(t))^H\| = \|U^{-1}(t)\|$, se sigue que

$$\|(U^{-1}(t))^H\|^{-1} \geq e^{-bk_0}. \quad (33)$$

Ahora, para una matriz M se define la norma logarítmica por

$$\mu(M) = \max \left\{ z ; z \in \sigma \left(\frac{M + M^H}{2} \right) \right\}. \quad (34)$$

Para $\|Z(t)\|$ podemos tomar entonces $\|Z(t)\| \leq e^{\int_0^t \mu(-A^H(s))ds}$, con lo que la relación (33) pasa a ser

$$\|(U^{-1}(t))^H\|^{-1} \geq e^{-\int_0^t \mu(-A^H(s))ds}. \quad (35)$$

De (34) se tiene que

$$\mu(-M) = -\min \left\{ z ; z \in \sigma \left(\frac{M + M^H}{2} \right) \right\}$$

y

$$\mu(M) = \mu(M^H).$$

Para simplificar nomenclatura, denotemos

$$L_M(t) = e^{\int_0^t \max \left\{ z(s); z(s) \in \sigma \left(\frac{A(s) + A^H(s)}{2} \right) \right\} ds} = e^{\int_0^t \mu(A(s))ds} \quad (36)$$

$$L_m(t) = e^{\int_0^t \min \left\{ z(s); z(s) \in \sigma \left(\frac{A(s) + A^H(s)}{2} \right) \right\} ds}. \quad (37)$$

Pero de [9] y (32) podemos escribir

$$\|U(t)\| \leq e^{k_0 t}.$$

Haciendo uso de (36) y la norma logarítmica,

$$\|U(t)\| \leq L_M(t), \quad (38)$$

y por (35) y (37),

$$\|U^{-1}(t)\| \leq L_m^{-1}(t). \quad (39)$$

Llamando

$$\alpha^{-1} = \max \{ L_M(t), L_m^{-1}(t) \}, \quad (40)$$

y escogiendo n tal que

$$\alpha^{-1} \left(N e^{K_0(t,0)} \Lambda_n \right) < \frac{1}{1 + \xi}, \quad (41)$$

donde ξ es un número positivo, entonces $[1 - \alpha^{-1} (Ne^{K_0(t,0)} \Lambda_n)]^{-1}$ es positivo y $[1 - \alpha^{-1} (Ne^{K_0(t,0)} \Lambda_n)]^{-1} < 1 + \frac{1}{\xi}$.

Así en (30) tenemos

$$\|U^{-1}(s) - \tilde{U}^{-1}(s)\| < \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \|U^{-1}(s)\|^2 \|U(s) - \tilde{U}(s)\|. \quad (42)$$

De (9) y (11) se tiene que

$$\begin{aligned} y_0(t) - \tilde{y}_0(t) &= [U(t) - \tilde{U}(t)] y_0 - [U(t) - \tilde{U}(t)] \times \\ &\quad \left\{ \int_0^t (U^{-1}(s) - \tilde{U}^{-1}(s)) f(s) ds \right\} \\ &\quad + (U(t) - \tilde{U}(t)) \int_0^t U^{-1}(s) f(s) ds \\ &\quad + U(t) \int_0^t (U^{-1}(s) - \tilde{U}^{-1}(s)) f(s) ds. \end{aligned} \quad (43)$$

Al tomar normas en (43) y de (29), (40) y (42), se tiene:

$$\begin{aligned} \|y_0(t) - \tilde{y}_0(t)\| &\leq Ne^{K_0(t,0)} \Lambda_n \|y_0\| + Ne^{K_0(t,0)} \Lambda_n \alpha^{-1} Fb \\ &\quad + (Ne^{K_0(t,0)} \Lambda_n + \alpha^{-1}) \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \alpha^{-2} (Ne^{K_0(t,0)} \Lambda_n) Fb, \end{aligned} \quad (44)$$

donde

$$\|f(t)\| \leq F \text{ para } t \in [0, b]. \quad (45)$$

Así

$$\begin{aligned} \|y_0(t) - \tilde{y}_0(t)\| &\leq Ne^{K_0(t,0)} \Lambda_n \left[\|y_0\| + \alpha^{-1} Fb + \alpha^{-3} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) Fb \right] \\ &\quad + (Ne^{K_0(t,0)} \Lambda_n)^2 Fb \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \alpha^{-2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Sea

$$P = \|y_0\| + \alpha^{-1} Fb + \alpha^{-3} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) Fb \quad (47)$$

y

$$W = Fb \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \alpha^{-2}, \quad (48)$$

entonces

$$\|y_0(t) - \tilde{y}_0(t)\| \leq Ne^{K_0(t,0)} \Lambda_n P + (Ne^{K_0(t,0)} \Lambda_n)^2 W, \quad (49)$$

de esta manera $\tilde{y}_0(t)$ dada por (11) es una solución aproximada de la solución teórica exacta $y_0(t)$ del problema (1) cuyo error viene determinado por (49)

Referencias

- [1] A.I. Lee, J.M. Hill. On the general linear coupled system for diffusion in media with two diffusivities, J. Math. Anal. Appl. 89 pp 530-557 (1982).
- [2] B. Paul. Analytical dynamics of mechanisms Acomputer oriented overview, Mech. Mach. Theory 10, 481-507, (1975).
- [3] Casa F. Oteo J.A. and Ros J. Lie algebraic approach to Fer's expansión for classical Hamiltonian systems J. Phys. A: Math Gen 24 4037 46. (1991)
- [4] E. Ponsoda and J.I Castaño. Aproximate solution and Error Bounds for Matrix Differential Equations using Fer's Factorization. Intenational Journal of Applied Science & Computations Vol 6. Number 1. Junio 1999.
- [5] J. H. Wilkinson. The Algebraic Eigenvalue Problem. Oxford University. Press. Fairlawn, N.J. 1965.
- [6] H. B. Keller. Numerical solution of two point boundary value problems. Regional conference series in Applied Mathematics. Society for industrial and applied Mathematics. Philadelphia, pennsylvania 1903-1984.
- [7] H. Morimoto. Stability in the wave equation coupled with heat flow, Numerische Math. 4, 136-145, (1962).
- [8] S. Blanes and L. Jodar. Continuous Numerical solutions of coupled mixed partial differential systems using Fer's factorization, Jour. Com.and Appl. Math. 101(1999), 189-202.
- [9] T. M. Flett. Differential Analysis, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.
- [10] Zanna A. The method of iterated commutators for ordinary differential equations on Lie groups DAMTP tech. report 1996 NA12, University of Cambridge

Dirección de los autores: Jorge I. Castaño, Universidad Eafit, icastano@eafit.edu.co.
 — Walter Díaz, Universidad de Antioquia, wdiaz@udea.edu.co.