Vol. XIX, N$^{\underline{o}}$ 2, Diciembre (2011)
Matemáticas: 49–53

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Sobre la topología del haz tangente a la esfera

Michell Andrés Gómez Leiva
Pontificia Universidad Javeriana, Cali

Luis Miguel Solarte Bejarano
Pontificia Universidad Javeriana, Cali

Recibido Ago. 19, 2010 Aceptado Oct. 20, 2011

Abstract

In this article we will use intersection theory over Thom spaces to prove that TS^2 is not diffeomorphic to $S^2 \times \mathbb{R}^2$. This result does not impose over the diffeomorphism the condition of preserving fibers.

Keywords: Vector bundle, Thom space, intersection theory, suspension.

MSC(2000): 76M10, 76D03

Resumen

En este artículo usaremos teoría de intersección sobre espacios de Thom para demostrar que TS^2 no es difeomorfo a $S^2 \times \mathbb{R}^2$. Este resultado no impone sobre el difeomorfismo la condición de preservar las fibras.

Palabras y frases claves: Haz vectorial, espacio de Thom, teoría de intersección, suspensión.

1 Introducción

Muchas variedades interesantes se presentan como el espacio total de un haz fibrado, un ejemplo relevante son las famosas esferas exóticas de Milnor.

En este artículo nos proponemos estudiar algunos aspectos de la toplogía del haz tangente a la esfera, un objeto familiar en topología diferencial pero que como variedad propiamente dicha ha recibido poca atención pues se trata de una variedad no compacta a diferencia, por ejemplo, de los haces fibrados principales que son usados para construir las mencionadas esferas de Milnor.

El resultado principal que demostraremos es que el espacio total TS^2 no es difeomorfo a $S^2 \times \mathbb{R}^2$. Este resultado es más fuerte que la mera trivialidad del haz que exige al difeomorfismo preservar las fibras, una condición poco natural si se ve desde el punto de vista puramente topológico, de hecho existen haces fibrados no triviales cuyo espacio total es difeomorfo a un producto $M \times \mathbb{R}^k$ (ver [1]).

En nuestro artículo nos hemos valido de la caja de herramientas de topología diferencial usando los elementos que tienen un sabor más geométrico dejando de lado las técnicas más abstractas de topología algebraica que predominan en el estudio de haces. Un elemento destacable es el espacio de Thom que nos ha permitido llegar a los resultados sin usar elementos como grupos de homología, los cuales son ineludibles cuando se intentan otros enfoques, favoreciendo así al lector poco familiarizado con la maquinaria de topología algebraica.

2 Compactificando la banda de Möbius y el cilindro

Las compactificaciones juegan un papel importante en topología y son fundamentales para entender las variedades abiertas. El siguiente ejemplo muestra de forma sencilla las técnicas usadas en este artículo y esperamos que sirva como una guía iluminadora en situaciones más abstractas.

La banda de Möbius abierta es el espacio $M = S^1 \times \mathbb{R}/\sim$ donde la relación de equivalencia $\sim$ identifica los puntos $(0,t)$ y $(1,-t)$. Estamos pensando S^1 como $[0,1]$ con los extremos identificados.

La banda de Möbius y el cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ son haces localmente iguales, para distinguirlos debemos usar invariantes globales. Introduciremos el espacio de Thom y teoría de intersección con este propósito.

El espacio de Thom asociado a un haz vectorial E y que denotaremos E^T, consiste en colapsar los vectores de norma mayor o igual a uno a un punto (ver [4]). Cuando la base es una variedad compacta, el espacio de Thom es la compactificación a un punto del espacio total, así que el lector no familiarizado con la teoría de haces puede asumir esto como la definición.

En el caso de la banda de Möbius, su espacio de Thom es el espacio proyectivo RP^2 y para el cilindro el espacio de Thom es la 2-esfera con los polos identificados lo que produce una singularidad. El hecho de que el espacio de Thom es una variedad para la banda de Möbius pero no para el cilindro es suficiente para distinguir estos espacios, no obstante en el caso general es difícil saber cuándo el espacio de Thom es una variedad, se sabe por ejemplo que el espacio de Thom del haz trivial $M \times \mathbb{R}^k$ es la k-suspensión de $M \cup \{\bullet\}$, denotada $\sum^k M \cup \{\bullet\}$, que siempre tiene una singularidad en forma de cono (ver [2]), aquí $\bullet$ es un punto que no pertenece a M.

Usando teoría de intersección podemos distinguir estos dos espacios sin necesidad de diferenciarlos por la singularidad. Las vecindades del punto singular son el complemento de los conjuntos compactos, luego si tomamos las curvas inicialmente en un conjunto compacto, al compactificar el espacio estas curvas no contendrán el punto singular y su imagen por medio de un homeomorfismo tampoco contendrá puntos singulares. En el espacio de Thom de un cilindro dos curvas inicialmente contenidas en un conjunto compacto se cortan tal como lo harían en una esfera es decir en un número par de puntos, ya que estan curvas no contienen el punto singular. En contraste en la banda de Möbius la curva $(t,0)$ y el segmento de recta que une los puntos $(0,1/2)$ y el punto $(1,-1/2)$ se intersectan en un solo punto. Por lo tanto los espacios no son homeomorfos.

En este caso el plano proyectivo es no orientado y la paridad de las intersecciones funciona como un invariante, para el caso de variedades orientadas debemos refinar la forma de contar las intersecciones.

3 Rudimentos de teoría de intersección

Si P y Q son subvariedades orientadas de una variedad orientada M de dimensión $n = \dim(P) + \dim(Q)$, decimos que ellas se intersectan transversalmente si para todo $x \in P \cap Q$ se tiene que $T_xP \oplus T_xQ = T_xM$. Podemos asignar un signo $\epsilon(x)$ a cada punto de la intersección de la siguiente forma. Escogemos bases ordenadas $B = \{u_1, \ldots, u_p\}$ y $B' = \{v_1, \ldots, v_q\}$ de T_xP y T_xQ positivas (compatibles con la orientación), asignamos $\epsilon(x) = +1$ a x si la base ordenada $\{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q\}$ de T_xM es positiva y $\epsilon(x) = -1$ en caso contrario. Cuando P y Q son compactas, su intersección es finita y podemos definir el número de intersección algebraica

$$P \cdot Q = \sum_{x \in P \cap Q} \epsilon(x)$$

En el caso de una hipersuperficie $M = f^{-1}(0)$ de dimensión $n = l - k$, donde $f : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es una función suave, es posible usar los gradientes de las componentes de f para saber si una base es positiva. Específicamente, una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de T_xM es positiva si el determinante de la matriz $A(p)$ cuyas filas son $\nabla f_1(p), \ldots, \nabla f_k(p), v_1, \ldots, v_n$ es positivo.

El número de intersección algebraica tiene la propiedad importante que su valor absoluto es invariante por difeomorfismo. Otra propiedad relevante es que si P y P' son encajes homotópicos entonces $P \cdot Q = P' \cdot Q$.

Con estos elementos podemos probar el resultado central del artículo.

4 El haz tangente a la esfera

Recordemos que un vector $v \in \mathbb{R}^3$ es tangente a la esfera $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|^2 = 1\}$ en el punto p si $p \cdot v = 0$. Podemos destacar que un vector v es tangente a la esfera en p denotándolo (p, v), lo cual nos lleva a definir el haz tangente a la esfera como la subvariedad de $\mathbb{R}^6$,

$$TS^2 = \{(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6 \,:\, \|x\| = 1\,,\, x \cdot v = 0\}\,.$$

TS^2 se ve como una hipersuperficie $f^{-1}(0)$ con $f(x, v) = (\|x\|^2 - 1, x \cdot v)$ y 0 como valor regular, así que la discusión mencionada arriba es aplicable.

Teorema 1. *El espacio total del haz tangente a la esfera TS^2 no es difeomorfo a $S^2 \times \mathbb{R}^2$.*

Demostración. Si las variedades son difeomorfas entonces sus espacios de Thom asociados son homeomorfos, recordemos que por ser S^2 compacta se puede ver el espacio de Thom como la compactificación a un punto del espacio total. Analizaremos el número de intersección de esferas encajadas en cada uno de estos espacios.

Como mencionamos el espacio de Thom del haz trivial $S^2 \times \mathbb{R}^2$ es la doble suspensión $\sum^2 S^2 \cup \{\bullet\}$. Recordemos que $\sum^2 S^2 = S^4$ (ver [2]), al igual que en el ejemplo del cilindro el punto crea un torcimiento en S^4 que identifica los polos. Si removemos esta singularidad tenemos un espacio homeomorfo a S^4, por lo tanto dos esferas encajadas en el espacio de Thom $(S^2 \times \mathbb{R}^2)^T$ que no contengan al punto singular tienen intersección algebraica nula, debido a que dos encajes cualquiera de 2-esferas en S^4 son homotópicos y es posible encontrar en S^4 dos esferas encajadas que no se intersectan. Esto nos indica que para mostrar que TS^2 no es difeomorfo a $S^2 \times \mathbb{R}^2$ sólo debemos encontrar dos esferas encajadas con intersección no nula.

Consideremos los encajes $\alpha, \beta : S^2 \to TS^2$ definidos por

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) \quad \text{y} \quad \beta(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3, -x_2, x_1, 0)$$

y calculemos los signos de los puntos de intersección $\alpha(S^2) \cap \beta(S^2) = \{p = (0, 0, 1, 0, 0, 0), q = (0, 0, -1, 0, 0, 0)\}$. Las bases del plano tangentes a S^2 en p y q dadas por $\{e_1 = (0, 1, 0), e_2 = (1, 0, 0)\}$ y $\{e'_1 = (0, 1, 0), e'_2 = (-1, 0, 0)\}$ respectivamente son positivas, por tanto $\{D_p\alpha(e_1), D_p\alpha(e_2)\}$ y $\{D_q\alpha(e'_1), D_q\alpha(e'_2)\}$ son bases de $T_p\alpha(S^2)$ y $T_q\alpha(S^2)$ nuevamente positivas. De la misma forma se construyen las bases positivas correspondientes al encaje β. Teniendo en cuenta que los gradientes de las funciones que definen a TS^2 con $\nabla f_1(x, v) = (2x, 0)$ y $\nabla f_2(x, v) = (v, x)$, las matrices formadas por los gradientes y las bases de los planos tangentes a los encajes en p y q son

$$A(p) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(p) \\ \nabla f_2(p) \\ D_p\alpha(e_1) \\ D_p\alpha(e_2) \\ D_p\beta(e'_1) \\ D_p\beta(e'_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El signo de su determinante decide el número de intersección. Observemos que estas matrices sólo difieren en el signo de cuatro de sus filas lo cual implica que tienen el mismo determinante, asi que $\epsilon(p) = \epsilon(q)$ y por tanto las esferas α y β tienen intersección algebraica no nula, $|\alpha \cdot \beta| = 2$. □

5 Consideraciones finales

En este artículo hemos usado teoría de intersección para probar que TS^2 no es un producto, pero debemos destacar que el conocimiento de la forma como se intersectan las esferas es una de las propiedades más fuertes sobre la topología de TS^2. Un teorema de Freedman muestra que las 4-variedades compactas simplemente conexas estan determinadas por su forma de intersección, (consultar [3] para los detalles), que es una forma bilineal simétrica sobre el segundo grupo de homología $H^2(M, \mathbb{Z})$. En el contexto de este artículo, lo anterior corresponde a tomar dos superficies representando elementos de $H^2(M, \mathbb{Z})$ y enviarlas en su número de intersección algebraica. No podemos aplicar directamente el resultado de Freedman a TS^2 puesto que es una variedad no compacta. Al intentar con su espacio de Thom surge la dificultad que $(TS^2)^T$ no es una variedad pues tiene un punto singular, pero podemos remover la singularidad usando cirugía para obtener una 4-variedad compacta simplemente conexa cuya forma de intersección es tal que $\alpha \cdot \alpha = 2$, donde α es la esfera encajada del teorema que es un generador de $H^2(TS^2, \mathbb{Z})$, lo cual caracteriza topológicamente a $(TS^2)^T$.

La pregunta que queda en el aire es determinar cuándo el espacio de Thom es una variedad. Haciendo una generalización del ejemplo de la banda de Möbius mostrado arriba, se puede demostrar que en el caso de haces sobre superficies es necesario que la forma de intersección sea (1). Un ejemplo con estas características es el famoso haz de Hopf, en este caso el espacio de Thom tiene forma de intersección igual a la del plano proyectivo complejo CP^2 y por el teorema de Freedman las variedades son homeomorfas. Este ejemplo y el hecho que el espacio de Thom es una especie de suspensión con torcimiento, nos hacen sospechar muy en el estilo de la conjetura de la doble suspensión (ver [2]), que si el espacio de Thom es una variedad entonces necesariamente es una esfera o un espacio proyectivo.

La teoría de compactificaciones de variedades es fundamental en muchas áreas de matemáticas y física pero puede llegar a ser extremandamente técnica y compleja, la teoría de variedades de Calabi Yau da fe de esto. Pensamos que la compactificación de haces es un buen punto para empezar, pues como hemos visto muestra algunos de los problemas esenciales de la teoría, por ejemplo la aparición de singularidades.

Referencias

[1] De Sapio, R.: Embeddings of the base and bundle isomorphisms ,Topology and its Applications, Volume 130, Issue 3, 15 May 2003, Pages 221-237.

[2] Edwards, R. D.: Suspensions of homology spheres, arXiv:math/0610573v1 [math.GT], 18 oct 2006.

[3] Freedman, M. H. and Quinn, F.: Topology of 4-manifolds, Princeton Mathematical Series, vol 39, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[4] Milnor, J. and Stasheff, J.: Characteristic classes, Annals of Mathematics Studies, No. 76. Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974.

Dirección de los autores
Michell Andrés Gómez Leiva — Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas, Pontificia Universidad Javeriana, Cali - Colombia
e-mail: `michellag@javerianacali.edu.co`
Luis Miguel Solarte Bejarano — Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas, Pontificia Universidad Javeriana, Cali - Colombia
e-mail: `lsunart@gmail.com`