



El Hombre y la Máquina

ISSN: 0121-0777

maquina@uao.edu.co

Universidad Autónoma de Occidente
Colombia

Laín Beatove, Santiago; Mahecha Tamayo, Yovanni Marcelo
Análisis de flujo turbulento cortante simple cargado con partículas
El Hombre y la Máquina, núm. 35, julio-diciembre, 2010, pp. 126-142
Universidad Autónoma de Occidente
Cali, Colombia

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=47817140013>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica
Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

Análisis de flujo turbulento cortante simple cargado con partículas



SANTIAGO LAÍN BEATOVE*
YOVANNI MARCELO MAHECHA TAMAYO**

flujo como de las partículas, de las que depende. La comparación de los resultados obtenidos en este trabajo con los numéricos de Hyland *et al.* (1999) y los teóricos de Zaichik (1997) es excelente.

Palabras clave: Turbulencia, dispersión de partículas, solución analítica

Abstract

The general solution for the dispersion of inertial particles in a turbulent simple shear flow developed by Hyland *et al.* (1999) has been implemented in the symbolic mathematics package Mathematica v. 5 (Wolfram, 1989). Such general solution has been evaluated in different situations depending on the value of the several turbulent parameters. Comparison of the obtained results with the numerical computations of Hyland *et al.* (1999) and theoretical expressions of Zaichik (1997) is excellent.

Keywords: Turbulence, particle dispersion, analytic solution

Resumen

La solución general para la dispersión de partículas inerciales en un flujo turbulento cortante simple desarrollada por Hyland *et al.* (1999) ha sido implementada en el paquete de matemática simbólica Mathematica versión 5 (Wolfram, 1989). Dicha solución general ha sido evaluada en diferentes situaciones construidas a partir de una modificación sistemática de los valores de los parámetros, tanto del

* Ph.D. en Ciencias Físicas. Docente del Departamento de Energética y Mecánica. Director del Grupo de Investigación en Mecánica de Fluidos, reconocido por Colciencias. slain@uao.edu.co

** Ingeniero Mecánico. Integrante del Grupo de Investigación en Mecánica de Fluidos de la Universidad Autónoma de Occidente.

Fecha de Recepción: agosto 04 de 2010

Fecha de aceptación: septiembre 30 de 2010

I. Introducción

La dispersión turbulenta de partículas es un término comúnmente usado para describir los fenómenos de transporte de las partículas que son distinguibles de las partículas de fase continua que exhiben movimiento turbulento. La descripción del movimiento de la fase dispersa es compleja y de gran interés en varios sistemas prácticos. Las aplicaciones que requieren la solución de este problema son tan variadas como la dispersión de partículas contaminantes pasivas en la atmósfera o sistemas de combustión con el combustible en forma de gotas o partículas. El alcance de este trabajo se limita a la discusión de flujos multifásicos con sólo dos fases diferenciadas de interés: la fase dispersa, o la fase de partículas; y la fase continua, que también se denomina fase fluida. El alcance está todavía más limitado a flujos diluidos cargados con partículas. En estos flujos el problema se simplifica debido a que las interacciones partícula-partícula, como son colisiones y coalescencia, pueden despreciarse.

La configuración considerada es la de flujo turbulento cortante simple en la cual se conocen las soluciones analíticas para la dispersión de partículas desde un punto fuente (Hyland *et al.*, 1999). En ese artículo se plantea la solución general para la función densidad de probabilidad (pdf) en el caso de N dimensiones espaciales que tiene la forma de una Gaussiana multidimensional. Dicha solución depende de varios parámetros, tales como la estructura turbulenta del fluido, la escala temporal integral de la turbulencia, el tiempo de relajación de las partículas dispersas, el gradiente de la velocidad media del fluido y del tiempo, así como de las variables del espacio de fase: posición espacial y velocidad. Hyland *et al.* (1999) evalúan las soluciones de forma numérica en diferentes situaciones ante la imposibilidad de escribir una fórmula simbólica para la función densidad de probabilidad dependiente de tantas variables. Ello significa que se construía la *solución numérica* para cada caso concreto considerado y la variación de cualquier parámetro implicaba la realización de una nueva simulación. La estrategia empleada en este trabajo es otra: dado que la potencia y velocidad de los computadores ha aumentado más de un orden de magnitud en los últimos ocho años, se ha implementado la solución analítica propuesta por Hyland *et al.* (1999) en el paquete de matemática simbólica Mathematica versión 5 (Wolfram, 1988) de forma que la solución para un problema concreto se obtiene *evaluando* la expresión general. Sin embargo, a pesar de disponer de la solución general para la pdf dependiente tanto de las variables del espacio de fase como del resto de parámetros relevantes del flujo y las partículas, ésta no se puede escribir de forma sencilla

en un documento pues es larguísima (varios cientos de páginas cuando se trató de exportar a un documento de texto).

En este trabajo se evalúan las expresiones simbólicas, en el caso de flujo turbulento cortante simple, que representan propiedades de la fase de partículas (pdf, concentración, velocidades medias y fluctuantes, tensor de dispersión) y se comparan con los resultados presentados en Hyland *et al.* (1999) y con los resultados asintóticos de Zaichik (1997), válidos para tiempos grandes comparados tanto con la escala temporal integral de la turbulencia del fluido como con el tiempo de relajación de la partícula.

II. RESUMEN DE LA APROXIMACIÓN ANALÍTICA

Las ecuaciones de evolución de la función de densidad de probabilidad (pdf, por sus siglas en inglés) han demostrado su utilidad en el estudio del comportamiento de los sistemas estocásticos. Ejemplos de su uso son tanto el movimiento Browniano como la teoría cinética de gases. También han sido utilizadas en los últimos años en el modelado de la turbulencia, combustión y dispersión atmosférica. En todos los casos las variables independientes son las variables del espacio de fase del sistema y la ecuación para la pdf describe el transporte de la densidad promedio en el espacio de fase en función de aquellas variables; la solución de la ecuación es la pdf del sistema en cualquier estado, conforme el sistema evoluciona aleatoriamente en el tiempo.

Como en la teoría cinética, las ecuaciones del medio continuo que describen la fase dispersa de partículas se obtienen integrando la ecuación para la pdf, convenientemente multiplicada por las potencias apropiadas de la velocidad, sobre todos los estados de velocidad de las partículas en un punto particular del espacio de fase.

Las ecuaciones cinéticas para la pdf son todas ecuaciones de Liouville “promediadas” y como tales pueden derivarse de las ecuaciones dinámicas subyacentes del sistema. Por consiguiente, si el sistema se describe mediante el vector de estado $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$, cuyo movimiento viene determinado por un sistema de N ecuaciones diferenciales,

$$\dot{q}_i(t) = K_i[q_1, q_2, \dots, q_N, t] \quad (1)$$

con un conjunto apropiado de condiciones iniciales, la ecuación de Liouville para la densidad en el espacio de fase $W(\mathbf{q}, t)$ se escribe

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial (K_i W)}{\partial q_i} = 0$$

Debido a que el sistema es estocástico, algunas (no necesariamente todas) de las funciones Ki serán aleatorias y se busca encontrar el valor promedio w de W sobre todas las realizaciones de las Ki , $i = 1, \dots, N$. Convenientemente normalizada, $w(\mathbf{q}, t)$ es entonces la pdf del vector de estado \mathbf{q} . Esto puede obtenerse promediando la ecuación de Liouville sobre todas Ki por lo que dividiendo cada Ki en un valor medio ($\bar{K}i$) y una parte fluctuante (Ki'), se obtiene (aplicando una notación más compacta)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{K}} w = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \langle \mathbf{K}' W \rangle$$

en el cual $\bar{\mathbf{K}}$ y \mathbf{K}' son vectores columna. La clase de ecuaciones para la pdf considerada, es aquella para la cual el término $(\bar{\mathbf{K}}' W)$ viene dado por

$$\langle \mathbf{K}' W \rangle = - \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{D} w + \Gamma w \right\} \quad (2)$$

donde los tensores de dispersión en el espacio de fase están dados más explícitamente por

$$\mathbf{D} = \langle \Delta \mathbf{q}(\mathbf{q}, t | 0) \mathbf{K}'(\mathbf{q}, t) \rangle$$

$$\Gamma = \left\langle \Delta \mathbf{q}(\mathbf{q}, t | 0) \frac{\partial \mathbf{K}'(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}} \right\rangle$$

donde $\Delta \mathbf{q}(\mathbf{q}, t | 0)$ denota los cambios de posición en el espacio de fase en un intervalo de tiempo $[0, t]$ para el sistema, comenzando desde su estado inicial y llegando al estado \mathbf{q} en un tiempo t . Γ es cero si $\mathbf{K}'(\mathbf{q}(t), t)$ es un proceso aleatorio homogéneo y estacionario. En este caso \mathbf{D} es constante en el espacio de fase y función únicamente del tiempo. En el caso particular que interesa aquí, cuando $\mathbf{K}'(t)$ es homogénea, estacionaria y gaussiana, el término de difusión por gradientes en (2) modela $(\mathbf{K}' W)$ exactamente.

El interés de este estudio se centra en los efectos mecánicos producidos por el flujo portador sobre la fase de partículas. Por conveniencia se supone que la fase dispersa es monodispersa y diluida con el fin de poder ignorar las colisiones entre las partículas. Además, se asume que las partículas suspendidas son suficientemente grandes como para poder ignorar el movimiento Browniano. En estas condiciones, el movimiento de la partícula viene gobernado exclusivamente por las fuerzas aerodinámicas, las cuales se asume que dependen de la velocidad relativa entre la partícula y el flujo portante local. De este modo el espacio de fase viene caracterizado por $\mathbf{q} = [\mathbf{x}, \mathbf{v}]$, donde \mathbf{x} es la posición y \mathbf{v} es la velocidad de la partícula.

En las condiciones de bajo número de Reynolds y partículas pequeñas pero mucho más densas que el fluido, la ecuación general de movimiento para una esfera pequeña rígida inmersa en un flujo turbulento en un medio infinito, se expresa como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v},$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \beta \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})$$

Donde $\dot{\mathbf{v}}$ representa la fuerza de resistencia aerodinámica, β es el inverso del tiempo de relajación de la partícula el cual depende tanto de la densidad y diámetro de la partícula como de la densidad y viscosidad del fluido.

En la notación de la ecuación (1)

$$(\bar{\mathbf{K}})^T = [\mathbf{v}, \beta \cdot (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{v})], \quad (\mathbf{K}')^T = [0, \beta \cdot \mathbf{u}'],$$

donde $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ son las velocidades media y fluctuante de la velocidad del fluido $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Subdividiendo los tensores de dispersión \mathbf{D} y Γ en subtensores \mathbf{D}_{ij} y Γ_i donde $i = 1, 2$ denota el conjunto de componentes \mathbf{x}, \mathbf{v} y $j = 1, 2$ el subconjunto de \mathbf{K}' asociado con \mathbf{x}, \mathbf{v} , entonces \mathbf{D} y Γ son de la forma

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{22} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ \Gamma_2 \end{pmatrix}.$$

La ecuación cinética para la pdf $w(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ queda como

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \beta \cdot [\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{v}] w$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{D}_{22} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{D}_{12} + \Gamma_2 \right) w \quad (3)$$

A continuación se resumirá el método de solución para la ecuación cinética de la pdf en dimensión N en un dominio infinito para el cual \mathbf{D} es tan solo función de t , y $\bar{\mathbf{K}}$ es lineal en las variables del espacio de fase. En el caso de la dispersión de partículas en flujos turbulentos se tratará el caso en que el flujo medio depende linealmente de la posición \mathbf{x} . Se describirá en detalle la forma de la solución de la dispersión de partículas en el flujo cortante simple bajo la acción de la fuerza de resistencia. Los resultados obtenidos se compararán con los obtenidos por Zaichik (1997) en el límite asintótico $t \rightarrow \infty$.

III. Solución general N-dimensional

Como se ha mencionado en la introducción, se considera la clase de ecuaciones en derivadas parciales (PDE's) de la forma:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + a_i(\mathbf{x}) \frac{\partial w}{\partial x_i} + b_{ij}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = c(t)w \quad (4)$$

Donde $w = w(\mathbf{x}, t)$, con $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, y t son las variables independientes. Las funciones b_{ij} y c son funciones únicamente de t mientras que a_i es una función lineal en \mathbf{x} . La PDE (4) se reescribe como:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \gamma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_j w) + D_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \quad (5)$$

donde los elementos de γ y \mathbf{D} son funciones solamente de t . Por ejemplo, en una dimensión:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{pmatrix}$$

La solución a la ecuación (4) viene dada por Hyland *et al.* (1999).

$$w(\mathbf{x}, t) = \frac{(\det \sigma(t))^{-1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}^{-1}(t))(x_i - M_i)(x_j - M_j)\right) \quad (6)$$

donde los elementos de \mathbf{M} y σ son funciones que satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dM_i}{dt} = -\gamma_{ij} M_j \quad (7)$$

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = -\gamma_{in} \sigma_{nj} - \gamma_{jn} \sigma_{ni} + 2D_{ij} \quad (8)$$

Las ecuaciones (7) y (8) podrán resolverse una vez que se especifiquen las condiciones iniciales, las cuales se pueden obtener de la de w . Por ejemplo, si la condición inicial para $w(\mathbf{x}, t)$ es una fuente puntual \mathbf{x}'

$$w(\mathbf{x}, t = 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (9)$$

entonces $M_i(0) = x'_i$ y $\sigma_{ij}(0) = 0$.

Notemos que puesto que (4) es lineal, la superposición de soluciones con condiciones iniciales dadas por (9) es la solución para condiciones iniciales generales.

La solución general en N dimensiones (6) es una gaussiana con media \mathbf{M} y matriz de covarianzas σ , las cuales se determinan del conjunto de ecuaciones diferenciales (7) y (8).

IV. Solución en dos dimensiones espaciales

Consideremos la forma general de la ecuación cinética para pdf en dos dimensiones

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + v_i \frac{\partial w}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial v_i} (\beta_{ij} v_j w) + \frac{\partial}{\partial v_i} (F_i w) \\ = \frac{\partial}{\partial v_i} \left\{ \frac{\partial}{\partial v_j} (\mu_{ji} w) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda_{ji} w) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

donde $w(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ es la densidad promedio en el espacio de fase, siendo \mathbf{x} y \mathbf{v} la posición y velocidad de la partícula en un tiempo t , respectivamente. El tiempo de respuesta de la partícula para los cambios de velocidad en dirección i -ésima debido a los cambios en la velocidad del fluido en la dirección j -ésima es β_{ij}^{-1} y \mathbf{F} representa la media de la fuerza aerodinámica. Los elementos de los tensores μ y λ son funciones derivables conocidas.

Consideremos el caso especial donde no se presentan fuerzas externas y tan sólo la fuerza de resistencia, en régimen de Stokes, actúa sobre la partícula. En este caso el promedio de la fuerza aerodinámica puede expresarse como:

$$\mathbf{F} = \beta \bar{\mathbf{u}} = \beta (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$$

y la componente fluctuante \mathbf{f}

$$\mathbf{f} = \beta \mathbf{u}' = (f_1, f_2) = \beta (u'_1, u'_2)$$

donde $\bar{\mathbf{u}}$ es la velocidad media del flujo portador y $\beta^{-1} = \beta I$ es el tiempo de respuesta de la partícula. Desde ahora nos restringiremos al caso de flujo cortante simple en el que las componentes de $\bar{\mathbf{u}}$ son $\bar{u}_1 = \alpha x_2$ y $\bar{u}_2 = 0$, donde α (gradiente cortante) es una constante. Así (10) se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = -v_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} - \alpha \beta x_2 \frac{\partial w}{\partial v_1} + \beta \frac{\partial (v_1 w)}{\partial v_1} \\ + \beta \frac{\partial (v_2 w)}{\partial v_2} + \mu_{11}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial v_1^2} + (\mu_{12}(t) + \mu_{21}(t)) \\ \times \frac{\partial^2 w}{\partial v_1 \partial v_2} + \mu_{22}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial v_2^2} + \lambda_{11}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial v_1 \partial x_1} \\ + \lambda_{21}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial v_1 \partial x_2} + \lambda_{12}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial v_2 \partial x_1} + \lambda_{22}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial v_2 \partial x_2} \end{aligned} \quad (11)$$

Las expresiones explícitas para los tensores μ y λ se presentan en el Apéndice 1 (Hyland *et al.*, 1999).

La ecuación anterior se reescribe en la forma (5)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \gamma_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\xi_j w) + D_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \quad (12)$$

Donde ξ_1, ξ_2, ξ_3 , y ξ_4 representan x_1, x_2, v_1 y v_2 respectivamente. Comparando esta ecuación con la expresión (11) se concluye

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\alpha\beta & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_{11}/2 & \lambda_{12}/2 \\ 0 & 0 & \lambda_{21}/2 & \lambda_{22}/2 \\ \lambda_{11}/2 & \lambda_{21}/2 & \lambda_{11} & (\lambda_{12} + \lambda_{21})/2 \\ \lambda_{12}/2 & \lambda_{22}/2 & (\lambda_{12} + \lambda_{21})/2 & \lambda_{22} \end{pmatrix}$$

De las ecuaciones (7) y (8) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= M_3, & \frac{dM_2}{dt} &= M_4 \\ \frac{dM_3}{dt} &= \alpha\beta M_2 - \beta M_3, & \frac{dM_4}{dt} &= -\beta M_4, \\ \text{y} \\ \frac{d\sigma_{11}}{dt} &= 2\sigma_{13}, \\ \frac{d\sigma_{12}}{dt} &= \sigma_{23} + \sigma_{14}, \\ \frac{d\sigma_{13}}{dt} &= \alpha\beta\sigma_{12} - \beta\sigma_{13} + \sigma_{33} + \lambda_{11}, \\ \frac{d\sigma_{14}}{dt} &= -\beta\sigma_{14} - \sigma_{34} + \lambda_{12}, \\ \frac{d\sigma_{22}}{dt} &= 2\sigma_{24}, \\ \frac{d\sigma_{23}}{dt} &= \alpha\beta\sigma_{22} - \beta\sigma_{23} + \sigma_{34} + \lambda_{21}, \\ \frac{d\sigma_{24}}{dt} &= -\beta\sigma_{24} + \sigma_{44} + \lambda_{22}, \\ \frac{d\sigma_{33}}{dt} &= 2\alpha\beta\sigma_{23} - 2\beta\sigma_{33} + 2\mu_{11}, \\ \frac{d\sigma_{34}}{dt} &= \alpha\beta\sigma_{24} - 2\beta\sigma_{34} + \mu_{12} + \mu_{21}, \\ \frac{d\sigma_{44}}{dt} &= -2\beta\sigma_{44} + 2\lambda_{22}. \end{aligned} \quad (13)$$

La solución general de estos dos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas se puede

encontrar explícitamente. Para ello se deben especificar las condiciones iniciales para \mathbf{M} y σ . Como ya se ha comentado se supone que las partículas se inyectan en un punto, el cual, por conveniencia, se toma como el $(0, 0, 0, 0)$ en el espacio de fase. Esto implica que las condiciones iniciales para \mathbf{M} y σ son 0. Por consiguiente $\mathbf{M} \equiv 0$ para todo instante de tiempo y sólo se debe calcular σ . Una vez se encuentren los valores para σ , la solución es simplemente

$$w(x_1, x_2, v_1, v_2, t) = \frac{(\det \sigma(t))^{-1/2}}{(2\pi)} \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_{ij}^{-1}(t) \xi_i \xi_j\right) \quad (14)$$

que no es sino la particularización a dos dimensiones de la solución general (6). En (14) $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \equiv (x_1, x_2, v_1, v_2)$. Además, el determinante y el inverso de la matriz σ deben ser evaluados.

En este trabajo, tanto la resolución del sistema de ecuaciones (13) como la inversa y el determinante de la matriz σ se han obtenido analíticamente utilizando el paquete de matemática simbólica Mathematica, lo cual permite la construcción de la pdf w como función explícita de todas las variables relevantes. Asimismo las expresiones analíticas de las diferentes variables promediadas, tales como la densidad, velocidad media y esfuerzos de Reynolds para las partículas, se han obtenido con el mismo paquete. Dichas expresiones se presentan en el siguiente epígrafe.

V. Valores medios de las variables de las partículas

Siguiendo a Hyland et al. (1999), en dos dimensiones la pdf w en el espacio de fase viene dada por (14) y se puede reescribir en la forma

$$w(x_1, x_2, v_1, v_2, t) = A e^{-av_1^2 - bv_1v_2 - cv_2^2 - dv_1 - ev_2 - f}$$

donde a, b, c, d , y f son funciones de x_1, x_2 y t . A es función solo del tiempo. También se asume que $ac \neq 0$, y $4ac \neq b^2$.

Densidad másica promedio

La densidad de masa promedio $\rho(\mathbf{x}, t)$, se obtiene como

$$\begin{aligned} \langle \rho(\mathbf{x}, t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1, x_2, v_1, v_2, t) dv_1 dv_2 \\ &= \frac{2\pi A}{\sqrt{4ac - b^2}} \exp(-f + \frac{d^2}{4a} + \frac{(2ae - bd)^2}{4a(4ac - b^2)}) \end{aligned}$$

Campo de velocidad media de las partículas

La velocidad media de la partícula, $\bar{v}=(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ esta definida por

$$\bar{v}_1(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\langle \rho(x, t) \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_1 w(x_1, x_2, v_1, v_2, t) dv_1 dv_2 \quad (15a)$$

$$= \frac{be - 2ae}{4ac - b^2}.$$

Igualmente para $\bar{v}_2=(\mathbf{x}, t)$

$$\bar{v}_2(\mathbf{x}, t) = \frac{bd - 2ae}{4ac - b^2}. \quad (15b)$$

Esfuerzos de Reynolds de las partículas

La velocidad fluctuante de la partícula está dada por $v'=(v-\bar{v})$, donde \bar{v} es la velocidad media de la partícula. Por consiguiente, los esfuerzos de Reynolds de la partícula se encuentran como $\overline{v'_i v'_j} = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j$. Las componentes de $\overline{v'_i v'_j}$ son:

$$\overline{v_i v_j} = \frac{1}{\langle \rho(x, t) \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_i v_j w(x_1, x_2, v_1, v_2, t) dv_1 dv_2. \quad (16)$$

Por ejemplo

$$\begin{aligned} \overline{v_1 v_1} &= \frac{1}{\langle \rho(x, t) \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_1 v_1 w(x_1, x_2, v_1, v_2, t) dv_1 dv_2 \\ &= \frac{1}{2a} + \frac{b^2}{2a(4ac - b^2)} + \frac{(be - 2cd)^2}{(4ac - b^2)^2} \end{aligned}$$

usando esta ecuación, (15a,b) y la definición de esfuerzos de Reynolds de la partícula, éstos son

$$\overline{v'_1 v'_1} = \frac{2c}{4ac - b^2} \quad (17a)$$

Similarmente

$$\overline{v'_1 v'_2} = \frac{-b}{4ac - b^2} \quad (17b)$$

y

$$\overline{v'_2 v'_2} = \frac{2a}{4ac - b^2} \quad (17c)$$

VI. Resultados

Tensores de dispersión en el espacio de fase μ y λ

En esta sección se mostrarán los resultados obtenidos evaluando las soluciones analíticas del flujo cortante

simple cargado con partículas. Se analizará tanto el efecto de variar los parámetros del fluido como de las partículas. En el caso de los tensores μ y λ se estudiará su dependencia de los diferentes parámetros en función del tiempo t . Las componentes de dichos tensores son funciones que dependen de siete parámetros $(t, a, \beta, \tau, u'_1, u'_2, u'_1 u'_2)$ y se muestran en el Apéndice 1. De su inspección se puede comprobar que las cuatro componentes de ambos tensores, $\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{22}$, y $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}$ y λ_{22} son diferentes. τ representa la escala temporal integral de la turbulencia del flujo, la cual constituye la escala temporal de referencia y en este trabajo se ha tomado igual a la unidad, i.e., $\tau=1$. La turbulencia del flujo se supone conocida, la cual, siguiendo la estrategia de Hyland et al. (1999) se ha tomado como $u'_1 u'_1 = u'_2 u'_2 = 1$ mientras que el valor de $u'_1 u'_2$ es variable. Obsérvese que $u'_1 u'_2$ debe cumplir la relación

$$|u'_1 u'_2| \leq \sqrt{u'_1 u'_1} \sqrt{u'_2 u'_2} = 1$$

pero puede ser tanto positivo como negativo. El tiempo de relajación de la partícula esta representado por β^{-1} . Cuando se presentan valores de β muy grandes, se dirá que la partícula es “pequeña”, lo contrario ocurre para valores β pequeños y la partícula se dirá “grande”. El esfuerzo cortante está representado por $\alpha = d\bar{u}/dx_2$.

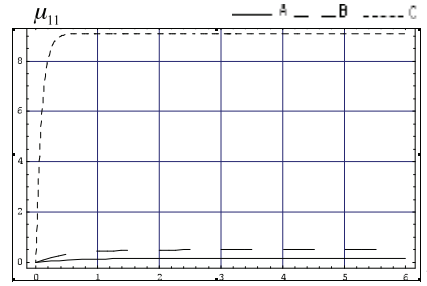
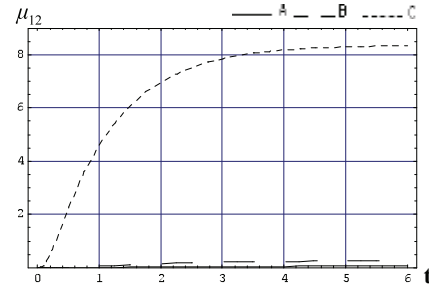
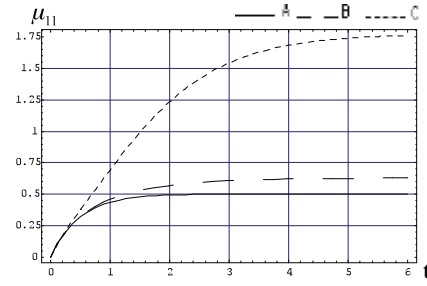
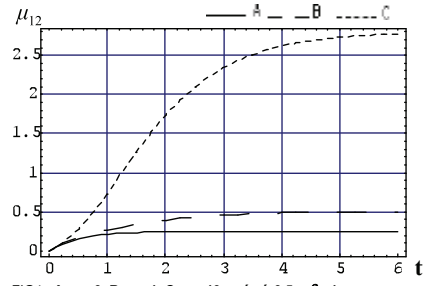
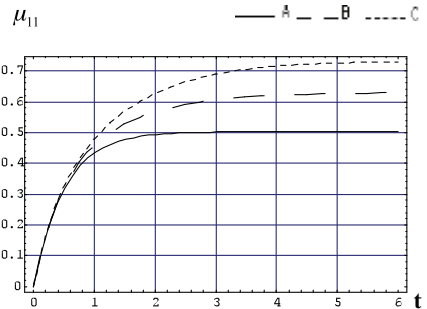
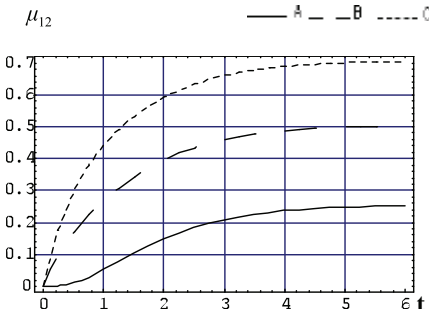
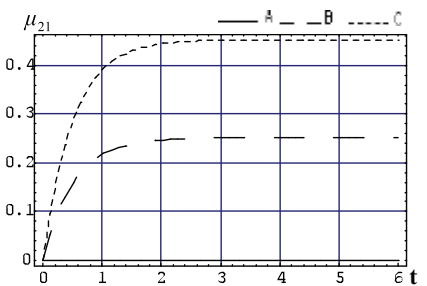
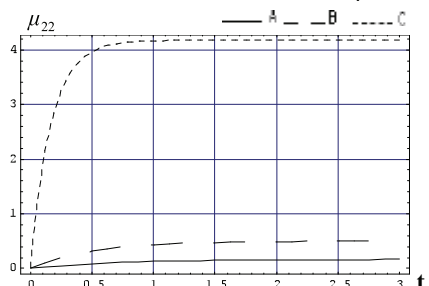
En las gráficas subsiguientes las curvas **A**, **B** y **C** representan casos específicos de las componentes de los tensores μ y λ .

En las Figuras 1 y 2 pueden observarse los comportamientos de las componentes μ_{11} y μ_{12} frente al valor de β . En la Figura 1 no hay presencia de esfuerzo cortante ni esfuerzo de Reynolds mientras que la Figura 2 tiene $\alpha=1$ (para obtener valores diferentes de cero) y el valor del esfuerzo de Reynolds es cero. Cuando la partícula es muy pequeña su reacción al flujo es rápida y, por tanto, los valores de las funciones μ_{11} y μ_{12} son altos. Este hecho se observa en las respuestas **C** de las Figuras 1 y 2. Por el contrario cuando las partículas son de tamaño grande, su respuesta al flujo es más lenta y los valores de μ_{11} y μ_{12} son sensiblemente menores, como se observa en las curvas **A**. Conforme se inyectan partículas mayores, el tiempo necesario para alcanzar el equilibrio con el flujo aumenta, mientras que los valores de μ_{11} y μ_{12} disminuyen. El efecto del esfuerzo cortante α sobre μ_{11} y μ_{12} se presenta en las Figuras 3 y 4. En ellas se considera $\alpha=0$, $\alpha=1$ y $\alpha=10$ con un valor fijo $u'_1 u'_2=0.5$. Las funciones μ_{11} y μ_{12} tienen formas similares pero difieren en el tiempo requerido para alcanzar los valores de equilibrio. En ambos casos, la tendencia del tiempo de estabilización de la respuesta **A** es más corto que en **B** y **C** caracterizados

por esfuerzos cortantes mayores. El efecto de modificar los esfuerzos de Reynolds $u_1'u_2'$ ($u_1'u_2'=0$, $u_1'u_2'=0.5$ y $u_1'u_2'=0.9$) manteniendo constantes $\alpha=1$ y $\beta=1$ (partículas de tamaño intermedio) se presenta en las Figuras 5 y 6. En ellas se observa que al aumentar el valor de $u_1'u_2'$ los tiempos necesarios para alcanzar el equilibrio para μ_{11} y μ_{12} aumentan, así como también sus valores de equilibrio. Nótese en las expresiones del Apéndice 1 que la función μ_{21} no depende del esfuerzo cortante. La variación del esfuerzo de Reynolds para $\beta=1$ permite ver en la Figura 7 la tendencia temporal de μ_{21} en las curvas A, B y C para los mismos valores de $u_1'u_2'$ que en las Figuras 5 y 6. Es necesario resaltar que el valor

de μ_{21} es menor que el de μ_{12} en la Figura 6, es decir el tensor de dispersión μ es asimétrico. Por otro lado, y según las expresiones del Apéndice 1, la componente μ_{22} no depende del esfuerzo cortante α ni de $u_1'u_2'$, es decir, mantiene el valor para un flujo homogéneo. Por tanto, tan sólo el efecto de la variación de μ_{22} frente a β se ilustra en la Figura 8: conforme β aumenta, el tiempo de necesario para el equilibrio disminuye y el valor de μ_{22} se incrementa, como consecuencia de la respuesta más rápida de las partículas al flujo.

En lo siguiente se describe el comportamiento de las funciones λ_{11} , λ_{12} , λ_{21} y λ_{22} en función de los diferentes parámetros (α , β , $u_1'u_2'$) en el mismo formato que las

FIG1. A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=10$. $u_1'u_2'=0$ y $\alpha=0$ FIG2. A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=10$. $\alpha=1$ y $u_1'u_2'=0$ FIG3. A. $\alpha=0$, B. $\alpha=1$ y C. $\alpha=10$. $u_1'u_2'=0.5$ y $\beta=1$ FIG4. A. $\alpha=0$, B. $\alpha=1$, C. $\alpha=10$. $u_1'u_2'=0.5$ y $\beta=1$ FIG5. A. $u_1'u_2'=0$, B. $u_1'u_2'=0.5$ y C. $u_1'u_2'=0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$ FIG6. A. $u_1'u_2'=0$, B. $u_1'u_2'=0.5$ y C. $u_1'u_2'=0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$ FIG7. A. $u_1'u_2'=0$, B. $u_1'u_2'=0.5$ y C. $u_1'u_2'=0.9$. $\beta=1$ FIG8. A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=5$.

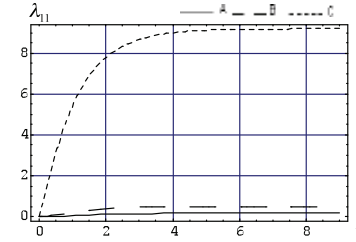
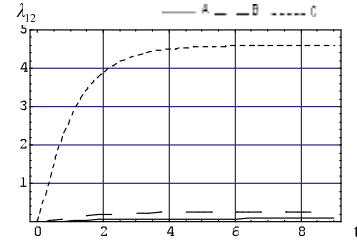
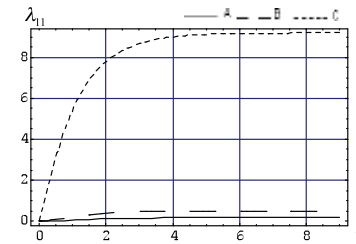
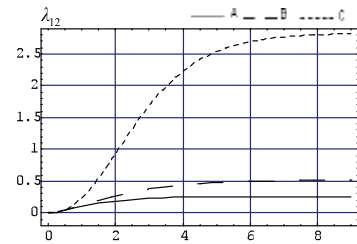
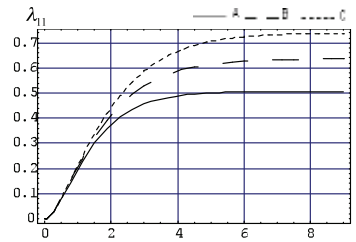
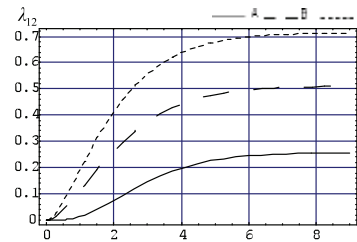
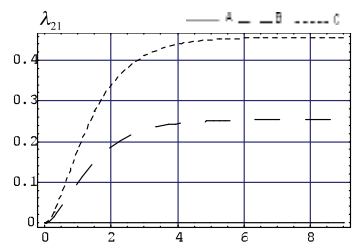
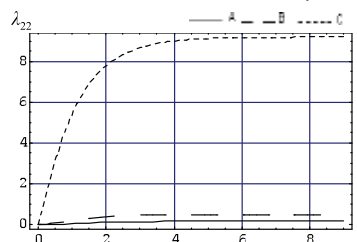
componentes del tensor μ . La variación del parámetro β altera los valores de λ_{11} y λ_{12} del modo mostrado en las Figuras 9 y 10 en donde no hay presencia ni de esfuerzo cortante. A medida que disminuye el valor de β el valor de equilibrio de λ_{11} y λ_{12} aumenta así como el tiempo necesario para alcanzarlo. En las Figuras 11 y 12, ambas con $u_1'u_2'=0.5$ y $\beta=1$, se observan los efectos de la variación del esfuerzo cortante α (0, 1 y 10) y el cambio de la tendencia temporal de λ_{11} y λ_{12} . A medida que aumenta el esfuerzo cortante, los valores y el tiempo necesario para el equilibrio de λ_{11} y λ_{12} se incrementan. Los valores de λ_{11} son mayores que los λ_{12} , como muestran las curvas A, B y C en las Figuras 11 y 12. Las Figuras 13 y 14 permiten observar la evolución temporal de λ_{11} y λ_{12} al variar los esfuerzos de Reynolds, fijando el esfuerzo cortante igual a uno y $b=1$. A medida que se incrementa $u_1'u_2'=0.1, 0.5, 0.9$, curvas A, B y C, los valores de λ_{11} y λ_{12} tienden a aumentar. En la Figura 13 los valores de λ_{11} son mayores

que los de λ_{12} (Figura 14). En la Figura 15 se observa el comportamiento de λ_{21} , la cual, al igual que μ_{21} , no depende del esfuerzo cortante. En esta figura se presentan las variaciones debidas al cambio de $u_1'u_2'$. A medida que $u_1'u_2'$ aumenta, el valor estacionario de λ_{21} se incrementa. Puede verse que los valores de A, B y C de la componente λ_{21} de la Figura 15 son menores que los de λ_{12} de la Figura 14. En la Figura 16 se muestra la componente λ_{22} , la cual no depende de α y $u_1'u_2'$; se presenta el comportamiento de λ_{22} variando β en (0.5, 1 y 10). Cuando éste aumenta, los valores estacionarios de λ_{22} se incrementan, al igual que para μ_{22} .

Como ya se ha hecho notar, las respuestas de las componentes de los tensores μ y λ tienen formas similares, pero sus valores estacionarios son diferentes.

Densidad de probabilidad w

El comportamiento para la pdf w solución de (14) en dos dimensiones se analiza en las Figuras 17 hasta

FIG9. A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=10$. $\alpha=0$ y $u_1'u_2'=0$ FIG10. A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=10$. $\alpha=0$ y $u_1'u_2'=0.5$ FIG11. A. $\alpha=0$, B. $\alpha=1$, C. $\alpha=10$. $u_1'u_2'=0.5$ y $\beta=1$ FIG12. A. $\alpha=0$, B. $\alpha=1$, C. $\alpha=10$. $u_1'u_2'=0.5$ y $\beta=1$ FIG13. A. $u_1'u_2'=0$, B. $u_1'u_2'=0.5$, C. $u_1'u_2'=0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$ FIG14. A. $u_1'u_2'=0$, B. $u_1'u_2'=0.5$, C. $u_1'u_2'=0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$ FIG15. A. $u_1'u_2'=0$, B. $u_1'u_2'=0.5$, C. $u_1'u_2'=0.9$. $\beta=1$ FIG16. A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=10$.

la 20 en forma de relieves en tres dimensiones. En las Figuras 17, 18, 19 y 20 las dos variables horizontales son las componentes de la posición x e y y la componente vertical representa el valor de la función de densidad de probabilidad. Se ilustra el caso de la pdf para velocidad nula de las partículas, i.e., $(v_1, v_2) = (0, 0)$.

En las Figuras 17a y 17b se puede observar la variación de la pdf con β , para un flujo isótropo e igual tiempo. En este caso las partículas pequeñas, Figura 17a, se expanden mucho más que las partículas grandes, Figura 17b. Esto se presenta debido a que la inercia de las partículas grandes es mucho mayor que la de las pequeñas, las cuales pueden moverse fácilmente. Se puede notar que la pdf es simétrica en x e y mostrando un relieve de círculos concéntricos. En flujo turbulento no isótropo sin presencia de esfuerzo cortante, la variación del esfuerzo de Reynolds influye en el movimiento de las partículas, lo cual se muestra en la Figura 18, donde las dos gráficas a y b no son igual de anchas. Este efecto se debe a que en a $u_1' u_2' = 0.1$ y en b $u_1' u_2' = 0.5$ generando un relieve rotado en forma de elipses y valores diferentes de velocidad en las componentes x e y . Cuando se aumenta el valor del esfuerzo de Reynolds el relieve se expande.

La variación de la pdf con el esfuerzo cortante medio en flujo turbulento isótropo y con partículas de tamaño intermedio se presenta en la Figura 19. A medida que α aumenta, la pdf se va estrechando más en un relieve rotado de elipses, variando también la velocidad de las partículas en las componentes x e y . En la Figura 20b puede observarse que al asignar un valor negativo al esfuerzo de Reynolds, la gráfica se rota en sentido contrario al observado en la Figura 18b. En estas dos figuras también puede observarse que en un flujo no isótropo la presencia de esfuerzo cortante

estrecha más la concentración de las partículas que el esfuerzo de Reynolds.

Al aumentar el tiempo la pdf w se expande lo cual se puede observar en la Figura 20b donde se ilustra un tiempo más largo que en la Figura 20a.

La forma de la pdf en función de las componentes de la velocidad de la partícula (v_1, v_2) en el origen es similar a la mostrada en las figuras anteriores. Sin embargo, cuando se considera un punto genérico (x, y) distinto del origen, el pico de w , donde la velocidad media de las partículas es máxima, es distinta de cero. Esto se puede ver en las Figuras 21 y 22. En la Figura 21, para partículas pequeñas en un flujo turbulento isótropo con $\alpha = 0$ y para $t=5$, se muestra la pdf en $x=-0.5, y=0$. Se observa que el pico de w se sitúa en cero en y pero en x

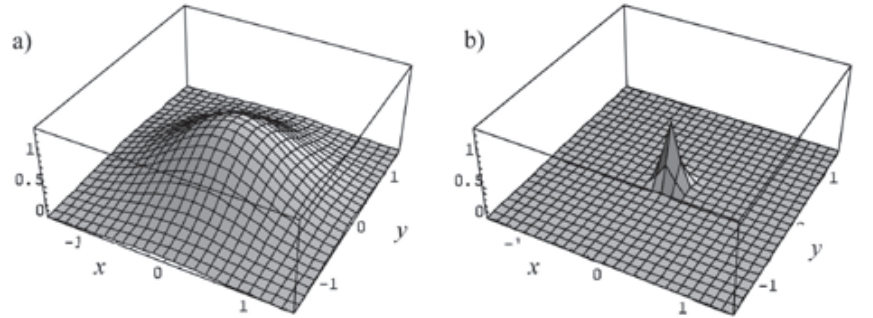


FIG 17. Densidad de probabilidad w para flujo isótropo, $\alpha=0$ y $t=1$. a). $\beta=50$ b). $\beta=0.5$

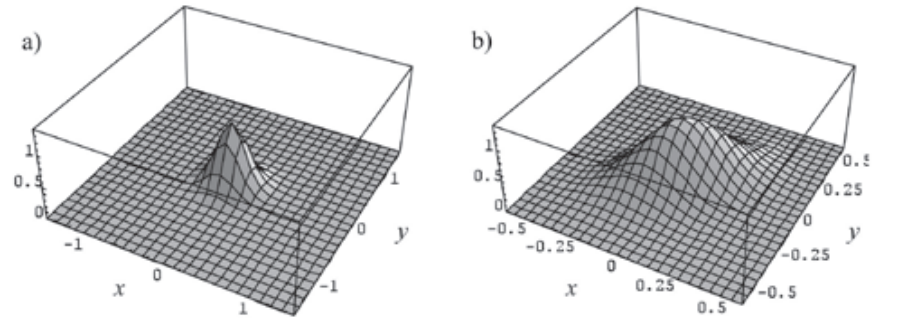


FIG 18. Densidad de probabilidad w , $t=1$ $\alpha=0$ y tamaño intermedio. a). $u_1' u_2' = 0.1$. b). $u_1' u_2' = 0.5$

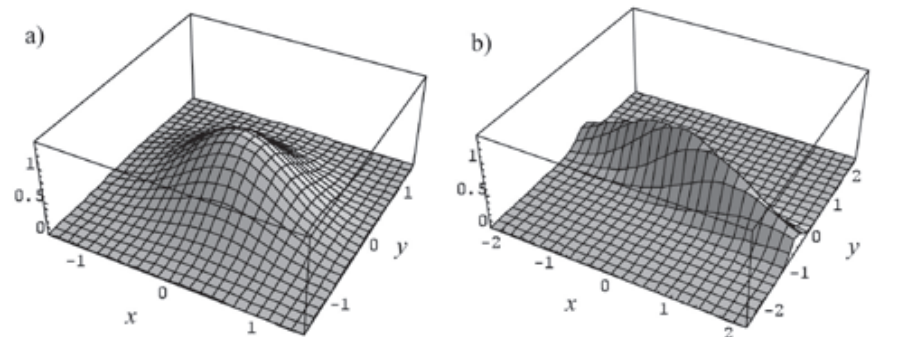


FIG 19. Densidad de probabilidad w , $t=5$ $u_1' u_2' = 0$ y tamaño intermedio, $\beta=1$. a). $\alpha=1$. b). $\alpha=10$.

tiene un valor no nulo. En la Figura 22, la pdf se muestra en las mismas condiciones que en la Figura 21, pero en $x=0$ e $y=0.5$. El máximo de w indica que el valor de la componente media de la velocidad de la partícula en x es cero pero la componente y presenta un valor no nulo.

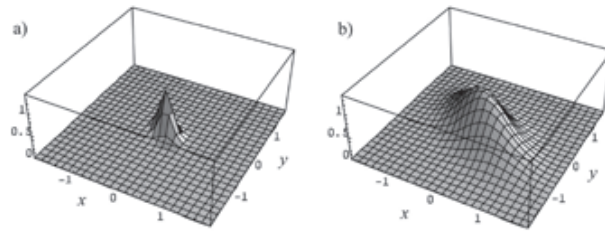


Figura 20. Densidad de probabilidad w . $u_1' u_2' = -0.5$. $\beta=1$ $\alpha=1$ a). $t=1$ b). $t=5$

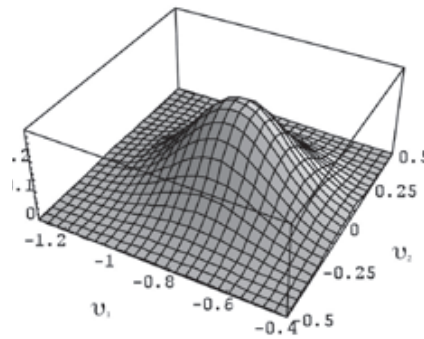


Figura 21. Densidad de probabilidad w . para $u_1' u_2' = 0$, $\beta=50$, $\alpha=0$, $t=5$, $x=-0.5$ y $y=0$

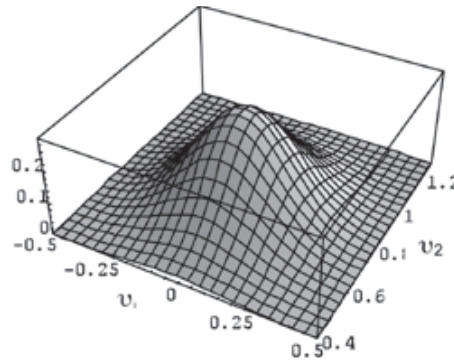


Figura 22. Densidad de probabilidad w . para $u_1' u_2' = 0$, $\beta=50$, $\alpha=0$, $t=5$, $x=0$ y $y=0.5$

Concentración de perfiles de las partículas

Una vez analizado el comportamiento de los tensores de dispersión μ y λ , y la pdf w se procede a analizar los cambios en las variables propias de la fase de partículas. A continuación se detallan las estadísticas de primero y

segundo orden, dadas por las fórmulas presentadas en el epígrafe V en función de los parámetros de dependencia para la pdf $w(x,y,u,v, t, \alpha, \beta, \tau, u_1' u_1', u_1' u_2', u_2' u_2')$.

La Figura 23 muestra los perfiles de concentración másica de partículas para diferentes condiciones. Si el esfuerzo turbulento cortante es cero $\gamma \mu_{ij}' = \delta_{ij}$, i.e., el flujo turbulento es isotrópico, las partículas se difunden igualmente en todas las direcciones desde el punto de inserción, en este caso el $(0, 0)$. Esta situación se puede ver exactamente en la Figura 23a, parte izquierda, la cual se compara con el resultado de Hyland et al. (1999) Figura 23a, lado derecho. Los perfiles de concentración son círculos concéntricos centrados en el origen. La concentración de partículas es mayor en el centro y decrece a medida que se van alejando del punto de inserción.

Los perfiles de concentración en el caso de flujo turbulento no isotrópico, e.g. $u_1' u_2' = -0.5$, se muestran en la Figura 23b, lado izquierdo, los cuales se pueden comparar con los resultados obtenidos por Hyland et al. (1999) Figura 23b, lado derecho. En este caso, los perfiles de concentración son elipses rotadas, mostrando que las partículas no se difunden igualmente en todas las direcciones. Comparando los resultados obtenidos Figura 23b lado izquierdo con los resultados de numéricos obtenidos por Hyland et al. (1999) Figura 23b lado derecho, se pueden ver que son muy similares. Cabe notar que los resultados obtenidos en este trabajo fueron debidamente normalizados puesto que Hyland no proporciona el valor de la escala temporal turbulenta utilizada para el flujo.

Al tener implementada la expresión simbólica para la función w , analizar su comportamiento al modificar cualquier parámetro es fácil. Por ejemplo, en el caso de turbulencia isotrópica con presencia de esfuerzo cortante medio los perfiles de concentración de partículas se modifican respecto de las situaciones anteriores, como puede verse en la Figura 24. Comparando con la Figura 23a, el efecto del esfuerzo cortante es modificar los perfiles de concentración de círculos concéntricos a elipses rotadas. En la Figura 24 conforme el tiempo aumenta, las elipses de concentración se expanden, se estiran y rotan debido a la acción del esfuerzo cortante. Dicha evolución temporal puede verse en las Figuras 24a y 24b (lado izquierdo) en donde las dos respuestas tienen valores de esfuerzo cortante α y β iguales a uno. Los resultados del lado derecho son los presentados en Hyland et al. (1999). En la Figura 24c se observa que el estiramiento y la rotación se incrementan al aumentar el esfuerzo cortante. La Figura 24d, donde las partículas consideradas son grandes, es similar a la Figura 24a, pero la dispersión de las partículas es notablemente menor debido a su inercia. Estos resultados y los obtenidos por Hyland son muy similares.

Los perfiles de concentración de partículas en un flujo turbulento no isotrópico, con $\alpha=0$ se pueden ver en la Figura 25. Los perfiles de concentración se expanden

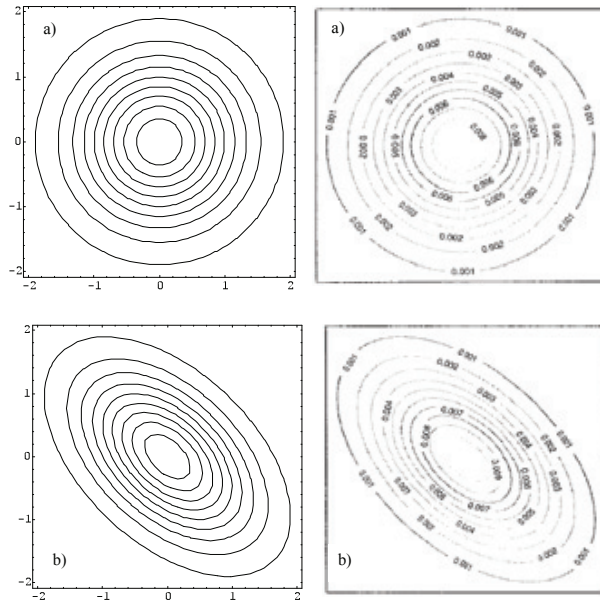


Figura 23. Influencia de los esfuerzos de Reynolds en el fluido, parte superior flujo isotrópico. Parte inferior $\mu_1'\mu_2' = -0.5$. Resultados resultados del trabajo lado izquierdo y Hyland lado derecho.

a medida que va aumentando el esfuerzo de Reynolds, como se muestra en las Figuras 25a y 25b. Debido al esfuerzo de Reynolds no nulo, en la Figura 25a las partículas no se difunden igual en todas las direcciones y los perfiles de concentración ya no son completamente círculos concéntricos; en la Figura 25b el efecto del esfuerzo de Reynolds es más claro, y los perfiles muestran estrechamiento y un grado de inclinación, alrededor de 45° . El efecto de considerar un esfuerzo de Reynolds negativo ($u_1'u_2' = -0.5$) y un esfuerzo cortante medio positivo ($\alpha = 1$) se puede apreciar en las Figuras 25c y d. Para tiempos cortos (representados en la figura por $t = 1$), donde las partículas no se han alejado mucho del origen, el efecto predominante es el del esfuerzo de Reynolds, y la acción del esfuerzo cortante medio es marginal. Conforme el tiempo aumenta ambas tendencias de rotación (el esfuerzo de Reynolds negativo hacia la izquierda y el esfuerzo cortante medio hacia la derecha) compiten entre sí ($t = 2$ en la figura) girando paulatinamente los perfiles de concentración en sentido horario hasta que para tiempos largos, donde las partículas han tenido tiempo suficiente para alejarse del origen, el efecto que prevalece es del esfuerzo cortante medio y las elipses de concentración se encuentran giradas hacia la derecha.

El tiempo que tardan las partículas en alcanzar a difundirse en el fluido depende de su tamaño: cuando

son muy pequeñas se difunden más rápidamente que cuando son más grandes e inerciales.

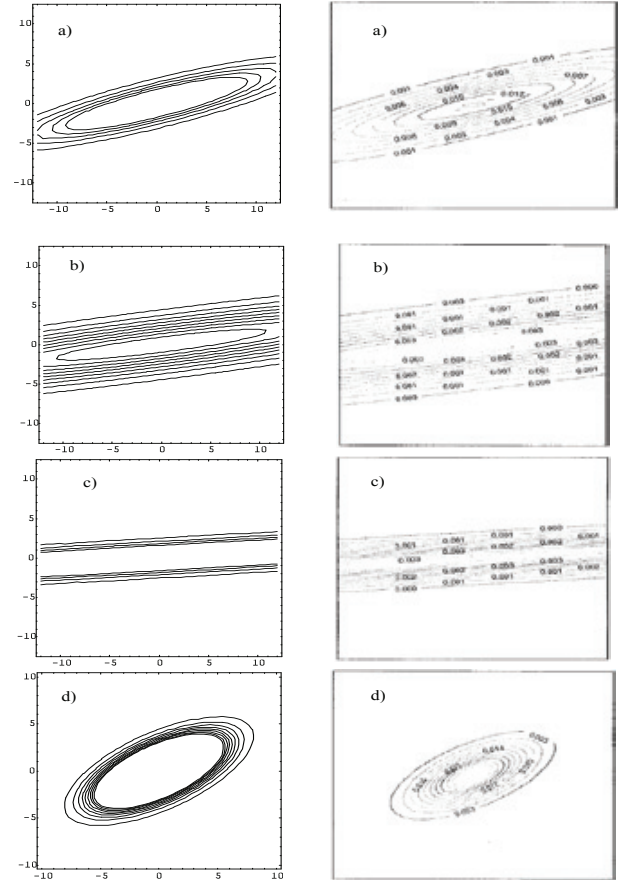


Figura 24. Concentración de perfiles de partícula, $u_i'u_j' = \text{dij}$. a) $\alpha=1, \beta=10$ y $t=5$, y b). $\alpha=1, \beta=10$ y $t=10$ c) $\alpha=5, \beta=1$ y $t=5$. d) $\alpha=1, \beta=0.5$ y $t=1$ Lado izquierdo resultados obtenidos y lado derecho resultados de Hyland

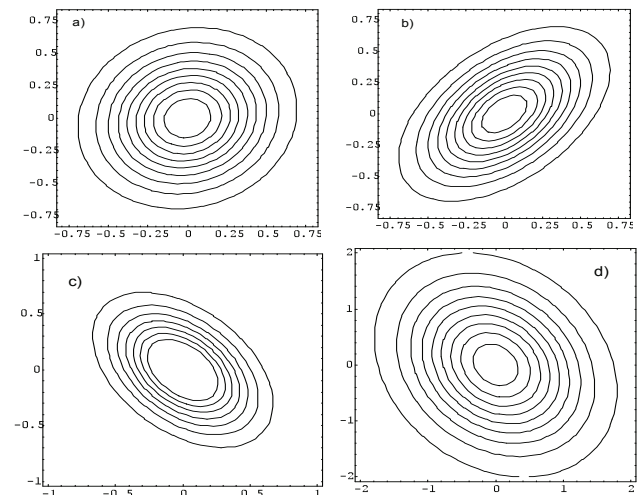


Figura 25. Influencia de los esfuerzos de Reynolds en un flujo turbulento no isotrópico para un $t=1$ a). $u_1'u_2'=0.1, \beta=1, t=1$ y $\alpha=0$ b). $u_1'u_2'=-0.5, \beta=1, t=1$ y $\alpha=0$ c). $u_1'u_2'=0.5, \beta=1, t=1$ y $\alpha=1$ d). $u_1'u_2'=-0.5, \beta=1, t=2$ y $\alpha=1$

Velocidad media de las partículas

La expansión, estiramiento y rotación de los perfiles de concentración, encuentra explicación en el comportamiento temporal de la velocidad media de las partículas, la cual puede verse en las Figuras 26 y 27, elaboradas con $\alpha=1$ y $u_1'u_2'=0.5$. En la Figura 26 las partículas, al comienzo, se alejan del punto de inserción debido a la turbulencia; en este punto la velocidad media del fluido es cero. Al alejarse del origen las partículas tendrán en general una velocidad diferente a la del fluido. Las partículas modifican su dirección por el efecto del vórtice ilustrado en la Figura 26, el cual es causado por los perfiles de concentración rotados.

Para tiempos más largos, las partículas entran en equilibrio con el fluido, aproximándose la velocidad media de éstas a la del fluido. Esto se puede ver en la Figura 27, en donde no se presenta rotación, con los efectos de convección del fluido dominando los difusivos de la turbulencia. En las dos figuras anteriores puede verse claramente que al transcurrir un tiempo prolongado el vector velocidad media se presenta en la dirección x teniendo valor cero en la dirección y . Comparado los resultados obtenidos en este trabajo, Figuras 26 y 27 lado izquierdo, con los mostrados en Hyland et al. (1999), lado derecho, se puede observar que los vectores de velocidad media son prácticamente iguales.

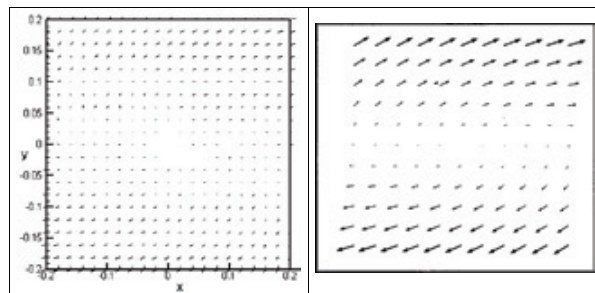


Figura 26. Vectores de velocidad media de la partícula para un $t=5$. Lado izquierdo resultado obtenido y lado derecho resultado de Hyland

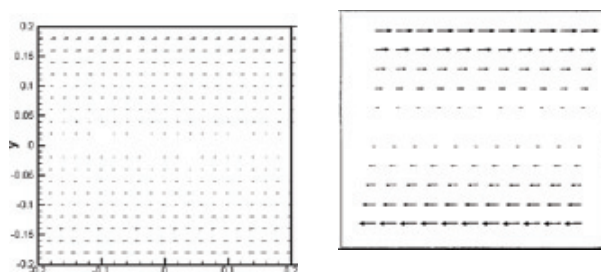


Figura 27. Vectores de velocidad media de la partícula. Para un $t=50$. Lado izquierdo resultado obtenido y lado derecho resultado de Hyland

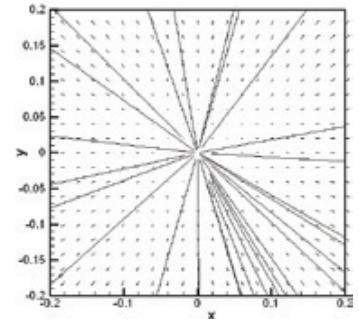


Figura 28. Vector velocidad media. Perfiles de círculos concéntricos

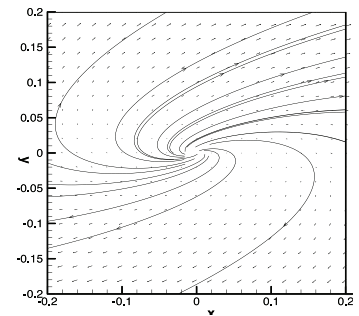


Figura 29. Vector velocidad media. Perfiles de círculos rotados

Líneas de corriente

Cuando no se presenta esfuerzo cortante en el flujo turbulento isotrópico, las partículas no tienen ninguna dirección de preferencia, esto se puede ver en la Figura 28, donde las líneas de corriente son rayos que se alejan del origen, lo cual da lugar a la aparición de perfiles de concentración consistentes en círculos concéntricos. Cuando α es no nulo, la situación anterior cambia y los círculos se convierten en elipses rotadas. En la Figura 29 se muestran las líneas de corriente correspondientes.

Velocidades medias del fluido y las partículas

Como ya se ha establecido, la velocidad media del fluido viene dada por:

$$u_1 = \alpha y, \quad u_2 = 0$$

donde y es la posición y α es el esfuerzo cortante. La velocidad media de las partículas está definida por las ecuaciones 15a y 15b. Como ya se ha comentado, la velocidad media de las partículas evoluciona hasta alcanzar la velocidad media del fluido, la cual es únicamente no nula en la dirección x . Las Figuras 30, 31 y 32 presentan el comportamiento de la componente x de la velocidad media de las partículas. Las gráficas se presentan para la posición $x=0$, $y=0.1$. En la Figura 30 puede observarse el efecto de la variación del esfuerzo cortante en las respuestas de la velocidad media de las

partículas (C y D) frente al valor constante del fluido (A y B). Las curvas A y C consideran $\alpha = 1$ y las curvas B y D $\alpha = 5$. Al incrementar el valor del esfuerzo cortante obviamente el valor de la velocidad es mayor. En la Figura 31 puede verse cómo la velocidad media de las partículas tiende a la velocidad media del fluido al variar β . Las partículas pequeñas alcanzan la velocidad media del fluido en tiempos relativamente cortos, mientras que las partículas más grandes tardan más, lo cual

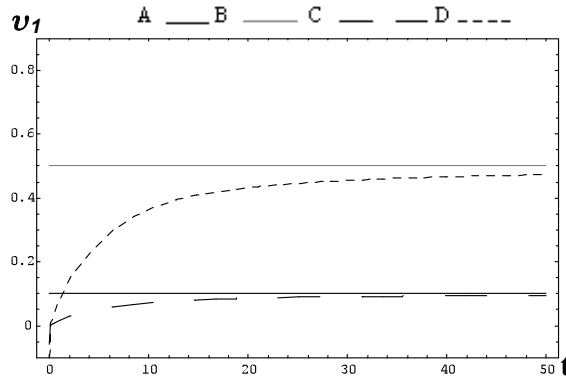


Figura 30. Velocidad media del fluido (A, B) y velocidad media de la partícula (C, D). $y=0.1$ A. $\alpha=1$, B. $\alpha=5$, C. $\alpha=1$ y D. $\alpha=5$. $b=1$.

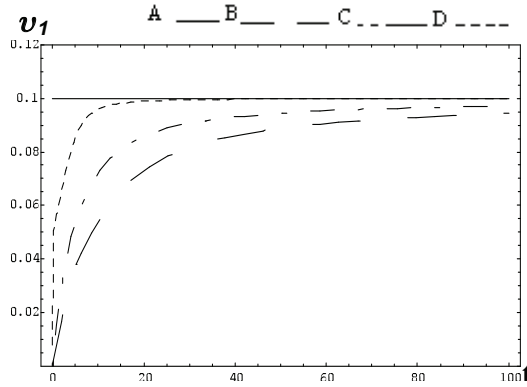


Figura 31. Velocidad media del fluido (A) y velocidad media de la partícula (B, C, D). $y=0.1$ A. $\alpha=1$, B. $\beta=0.5$, C. $\beta=1$ y D. $\beta=50$. $a=1$.

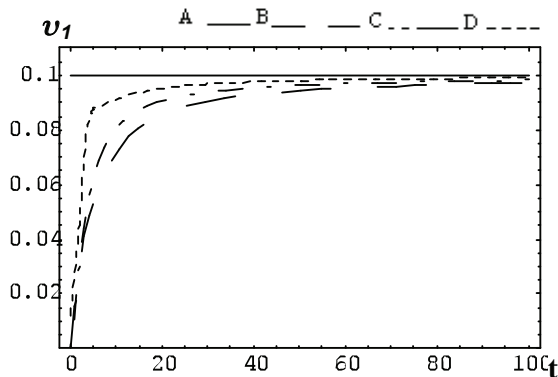


Figura 32. Velocidad media del fluido (A) y velocidad media de la partícula (B, C, D). $y=0.1$, A. $\alpha=1$, B. $u_1' u_2' = 0.1$, C. $u_1' u_2' = 0.5$ y D. $u_1' u_2' = 0.9$. $\beta=1$. $\alpha=1$.

se observa en las curvas **B** (partícula grande) **C**, y **D** (partícula pequeña). El efecto de variar el esfuerzo de Reynolds es contrario al del esfuerzo cortante: a medida que se incrementa el esfuerzo de Reynolds, el tiempo necesario para que la velocidad media de las partículas alcance la del fluido se reduce. Esto puede verse en la Figura 32 donde la curva **B** corresponde a un esfuerzo de Reynolds menor que en **D**.

Esfuerzos de Reynolds de las partículas

En este apartado se estudia la evolución de los esfuerzos de Reynolds de las partículas. Es necesario hacer notar que la expresión de estos viene dada por las ecuaciones 17a, b y c y que, en el caso particular del flujo cortante simple, éstos son homogéneos, es decir, tienen el mismo valor en todos los puntos del dominio fluido. Este hecho se comprobó explícitamente durante el desarrollo del presente trabajo. Por otro lado, Zaichik (1997) determinó la expresión de los esfuerzos de Reynolds de las partículas, en un flujo cortante simple, bajo la restricción de que el tiempo de evaluación t fuese suficientemente largo comparado con la escala temporal integral de la turbulencia, τ , y el tiempo de relajación de la partícula, β^{-1} . Las velocidades fluctuantes, i.e. esfuerzos de Reynolds, para las partículas derivados por Zaichik (1997) son:

$$q_{xx} = f_u p_{xx} - T_L p_{xy} \gamma_p + \tau_u l_u p_{xy} \gamma + \frac{\tau_u}{2} p_{yy} (T_L \gamma_p - \tau_u l_u \gamma) \gamma_p$$

$$q_{xy} = f_u p_{xy} - \frac{T_L}{2} p_{yy} \gamma_p + \frac{\tau_u}{2} l_u p_{yy} \gamma + \frac{\tau_u}{2} p_{yy} (T_L \gamma_p - \tau_u l_u \gamma) \gamma_p$$

$$q_{yy} = f_u p_{yy}$$

donde

$$\gamma_p = \frac{dV_x}{dy}, \quad \gamma = \alpha \quad f_u = \frac{1}{1 + \tau_u / T_L}, \quad \tau_u = \beta^{-1}, \quad T_L = \tau,$$

$$l_u = f_u^2 \frac{T_L}{\tau_u}, \quad q_{xx} = v'_1 v'_1, \quad q_{xy} = v'_1 v'_2,$$

$$q_{yy} = v'_2 v'_2, \quad p_{xx} = u'_1 u'_1, \quad p_{xy} = u'_1 u'_2,$$

$$p_{yy} = u'_1 u'_2$$

En las Figuras 33 hasta la 40 las curvas **A**, **B** y **C** representan la evolución temporal de la velocidad fluctuante de las partículas expuesta por Zaichik (1997) y las

curvas **D**, **E** y **F** la evolución de la velocidad fluctuante de las partículas obtenidas en este trabajo. Ambas velocidades fluctuantes tienden al mismo valor en iguales condiciones; sin embargo, las curvas obtenidas en este artículo necesitan más tiempo para alcanzar el valor de equilibrio. Ello no es extraño pues los perfiles de Zaichik parten de la premisa de que el tiempo de evaluación es suficientemente largo mientras que en nuestro caso se inicia exactamente desde cero por lo que se debe cumplir un tránsito más largo.

La componente $v_1'v_1'$ de los esfuerzos de Reynolds de las partículas en un flujo isótropo y con presencia de esfuerzo cortante medio se puede ver en la Figura 33 donde se evalúa el efecto de modificar β sobre dicha componente. Las curvas A y D corresponden a $\beta=0.5$, B y E a $\beta=1$ y C y F a $\beta=50$. El comportamiento de $v_1'v_1'$ en el flujo no isótropo, con presencia de esfuerzo cortante y tamaño intermedio de partícula, puede verse en la Figura 34, donde el valor estacionario es menor que cuando se presenta un flujo turbulento isótropo; además este valor disminuye a medida que el esfuerzo de Reynolds del fluido aumenta. Cuando se incrementa el esfuerzo cortante, los valores de $v_1'v_1'$ de Zaichik (1997) y los obtenidos en este trabajo tienden a un valor muy grande, lo cual puede verse en la Figura 35.

En la Figura 36 las condiciones son iguales que en la Figura 33, pero se muestra la componente $v_1'v_2'$ del tensor de Reynolds de las partículas. $v_1'v_2'$, siendo negativo, disminuye en módulo conforme aumenta el tamaño de partícula hasta llegar a cero para b tendiendo a cero. En la Figura 37 las condiciones son iguales a las de la Figura 34, pero la componente del tensor de Reynolds de las partículas mostrada es $v_1'v_2'$. Ésta cruza el valor cero a medida que el esfuerzo de Reynolds del flujo va aumentando, para este caso particular. En la Figura 38 las condiciones son idénticas a las de la Figura 35, pero mostrando $v_1'v_2'$. Cuando el esfuerzo cortante medio aumenta, se observa que $v_1'v_2'$ tiende a un valor más negativo.

La componente $v_2'v_2'$ de la velocidad fluctuante de la partícula expuesta en Zaichik (1997) corresponde a las condiciones de flujo homogéneo, i.e. no se ve afectada por el esfuerzo cortante medio, por lo que es independiente de a . Su comportamiento se puede observar en las Figuras 39 y 40. En la Figura 39 se pueden ver los efectos de variar el tamaño de la partícula en la componente $v_2'v_2'$. Igual que en la componente $v_1'v_1'$, al incrementar el tamaño de la partícula el valor del esfuerzo de Reynolds disminuye.

Como se puede ver, los valores obtenidos en este trabajo para los valores estacionarios de los esfuerzos

de Reynolds de las partículas, hallados evaluando la solución general dada por Hyland *et al.* (1999), coinci-

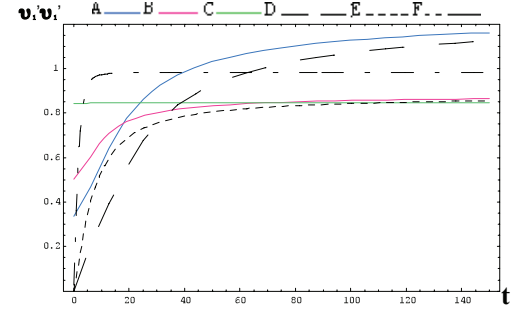


Figura 33. Velocidad fluctuante, componente $v_1'v_1'$. A-D. $\beta=0.5$, B-E. $\beta=1$ y C-F. $\beta=50$. $\alpha=1$ y $v_1'v_2'=0$

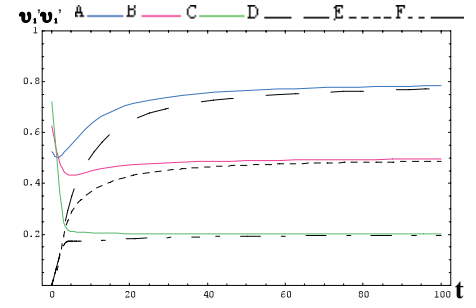


Figura 34. Velocidad fluctuante, componente $v_1'v_1'$. A-D. $v_1'v_2'=0.1$, B-E. $v_1'v_2'=0.5$ y C-F. $v_1'v_2'=0.9$. $\beta=1$ y $\alpha=1$

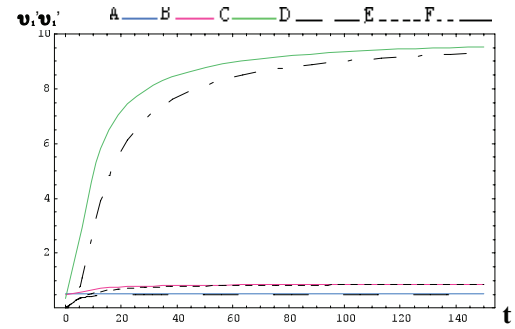


Figura 35. Velocidad fluctuante, componente $v_1'v_1'$. A-D. $\alpha=0$, B-E. $\alpha=1$ y C-F. $\alpha=5$. $\beta=1$ y $v_1'v_2'=0$

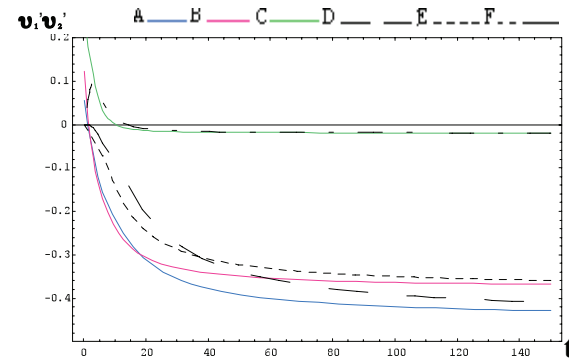


Figura 36. Velocidad fluctuante, componente $v_1'v_2'$. A-D. $b=0.5$, B-E. $b=1$ y C-F. $b=50$. $\alpha=1$ y $v_1'v_2'=0$

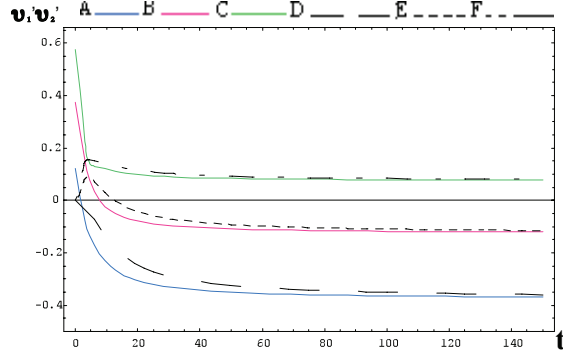


Figura 37. Velocidad fluctuante, componente $v_1'v_2'$. A-D. $v_1'v_2'=0$. B-E. $v_1'v_2'=0.5$ y C-F. $v_1'v_2'=0.9$ Para un $\beta=1$ y $\alpha=1$.

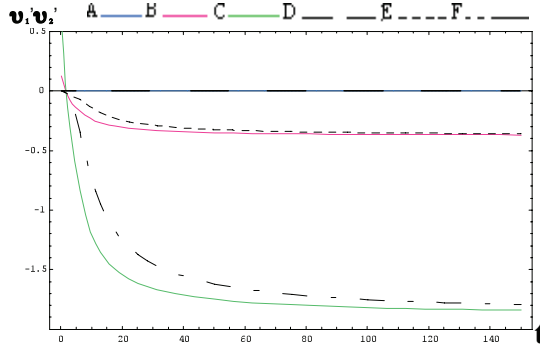


Figura 38. Velocidad fluctuante, componente $v_1'v_2'$. A-D. $\alpha=0.1$, B-E. $\alpha=1$ y C-F. $\alpha=5$. $\beta=1$ y $v_1'v_2'=0$.

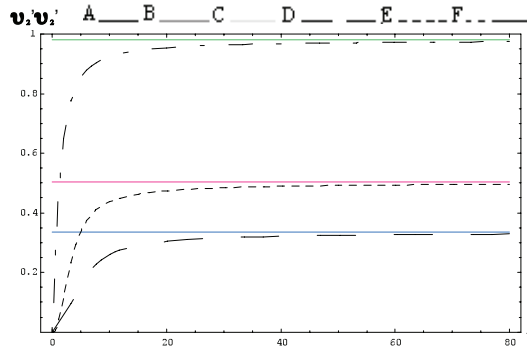


Figura 39. Velocidad fluctuante, componente $v_2'v_2'$. A-D. $\beta=0.5$, B-E. $\beta=1$ y C-F. $\beta=50$. Para un $\alpha=0$ y $v_1'v_2'=0$.

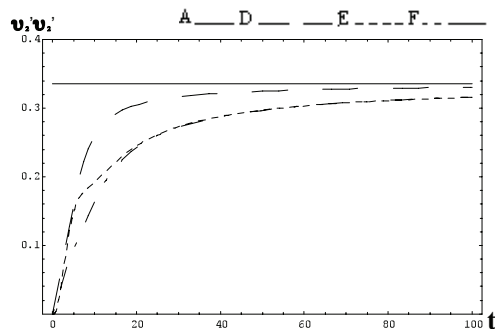


Figura 40. Velocidad fluctuante, componente $v_2'v_2'$. A- $\beta=0.5$, D. $\alpha=0$, E. $\alpha=1$ y F. $\alpha=5$. $\beta=0.5$ y $v_1'v_2'=0$.

den exactamente con los valores predichos por Zaichik (1997).

Tensores de dispersion turbulenta de partículas

Zaichik (1997) presenta las componentes del tensor dispersión turbulenta de partículas inerciales en el flujo cortante simple en la siguiente forma

$$D_{p_{xx}} = \tau_u (q_{xx} + g_u p_{xx}) + \tau_u^2 h_u p_{xy} \gamma$$

$$D_{p_{xy}} = \tau_u (q_{xy} + g_u p_{xy}) + \tau_u^2 h_u p_{yy} \gamma$$

$$D_{p_{yx}} = \tau_u (q_{xy} + g_u p_{xy})$$

$$D_{p_{yy}} = \tau_u (q_{yy} + g_u p_{yy})$$

Donde

$$g_u = \frac{\beta^2 \tau^2}{1 + \beta \tau}$$

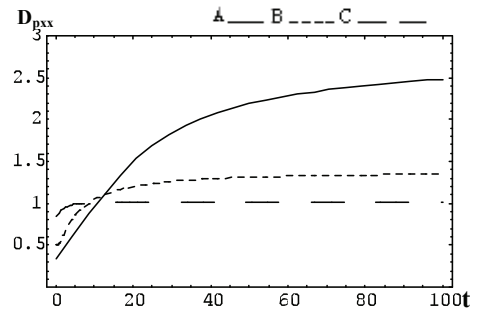


Figura 41. Comportamiento del tensor de dispersión $D_{p_{xx}}$. A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=5$. $\alpha=1$ y $v_1'v_2'=0$

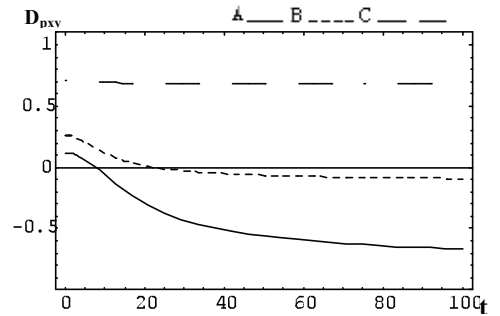


Figura 42. Comportamiento del tensor de dispersión $D_{p_{xy}}$. A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=5$. Para un $\alpha=1$ y $v_1'v_2'=0$

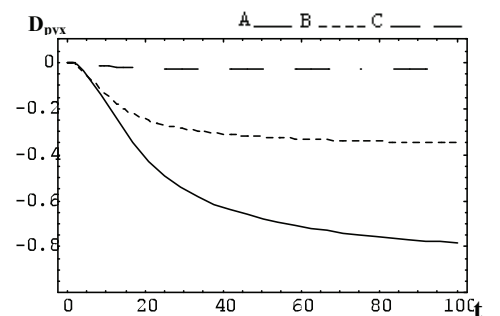


Figura 43. Comportamiento del tensor de dispersión $D_{p_{yx}}$. A. $\beta=0.5$, B. $\beta=1$, C. $\beta=5$. Para un $\alpha=1$ y $v_1'v_2'=0$

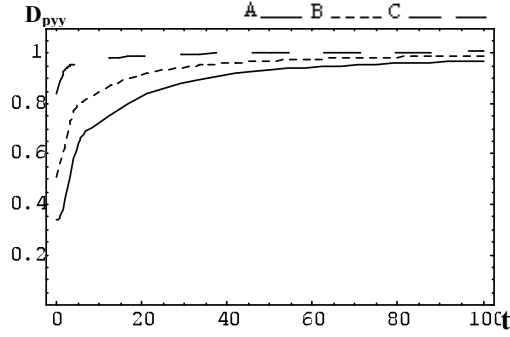


Figura 44. Comportamiento del tensor de dispersión D_{pyy} . A. $\beta=0.5$. B. $\beta=1$. C. $\beta=5$. Para un $\alpha=1$ y $v_1'v_2'=0$

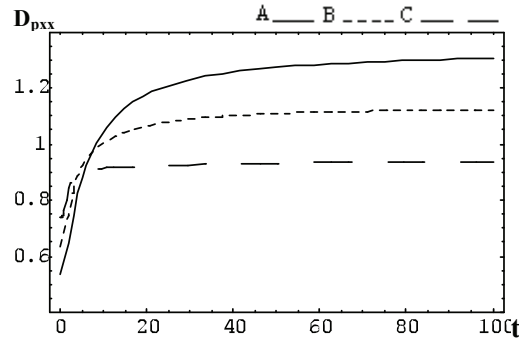


Figura 45. Comportamiento del tensor de dispersión D_{pxx} . A. $v_1'v_2'=0.1$, B. $v_1'v_2'=0.5$, y C. $v_1'v_2'=0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$

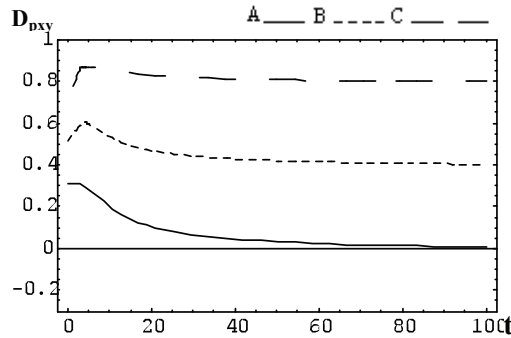


Figura 46. Comportamiento del tensor de dispersión D_{pxy} . A. $v_1'v_2'=0.1$, B. $v_1'v_2'=0.5$ y C. $v_1'v_2'=0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$

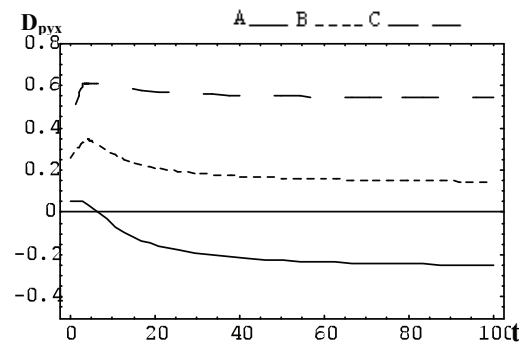


Figura 47. Comportamiento del tensor de dispersión D_{pyx} . A. $v_1'v_2'=0.1$, B. $v_1'v_2'=0.5$ y C. $v_1'v_2'=0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$

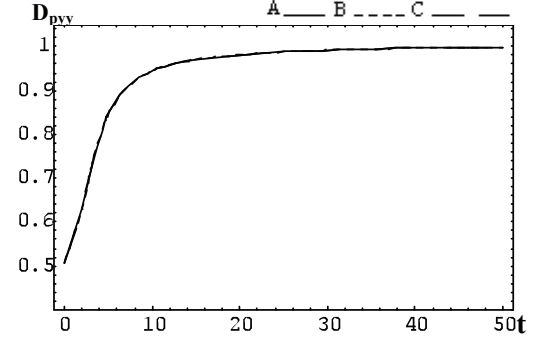


Figura 48. Comportamiento del tensor de dispersión D_{pyy} . A. $v_1'v_2'=0.1$, B. $v_1'v_2'=0.5$, y C. $v_1'v_2'=0.9$. $\alpha=1$ y $\beta=1$

Estas expresiones se ilustran en las Figuras 41 hasta 48, donde se puede observar la evolución temporal de las componentes del tensor. En la Figura 41 puede verse que a medida que las partículas van aumentando de tamaño, los valores límite de la componente D_{pxx} y el tiempo necesario para el equilibrio aumentan. En las Figuras 42 y 43, se presentan las componentes D_{pxy} y D_{pyx} cuyas respuestas A, B y C son asimétricas. Conforme se incrementa el tamaño de partícula, las componentes de los tensores van a tender a valores negativos e igual que el caso anterior el tiempo necesario para que las componentes del tensor alcancen sus valores de equilibrio va a aumentar.

En la Figura 44 se observa que la componente D_{pyy} alcanza el mismo valor para partículas de cualquier tamaño, pero el tiempo transcurrido para alcanzarlo es mayor a medida que aumenta el tamaño de la partícula.

En las Figuras 45 hasta 48 puede observarse el comportamiento de las componentes del tensor de dispersión cuando se varía el esfuerzo de Reynolds del flujo, en el caso donde hay presencia de esfuerzo cortante medio y el tamaño de partícula es intermedio. En la Figura 45 se aprecia la componente del tensor D_{pxx} donde conforme se incrementa el esfuerzo de Reynolds, el valor estacionario de esta componente y el tiempo necesario para ello disminuyen. En las Figuras 46 y 47 puede observarse una vez más que las componentes del tensor D_{pxy} y D_{pyx} son asimétricas y conforme se incrementa el esfuerzo de Reynolds del flujo, los valores de las componentes del tensor van aumentando y el tiempo necesario para alcanzar el valor estacionario disminuye. La componente D_{pyy} mostrada en la Figura 48, mantiene el mismo perfil independientemente del esfuerzo de Reynolds del fluido tal y como se esperaba.

Conclusiones

La solución general para la dispersión de partículas inerciales en un flujo turbulento cortante simple desa-

rollada por Hyland *et al.* (1999) ha sido implementada en el paquete de matemática simbólica Mathematica versión 5 (Wolfram, 1989). Dicha solución general ha sido evaluada en diferentes situaciones construidas a partir de una modificación sistemática de los valores de los parámetros, tanto del flujo como de las partículas, de las que depende. En particular, se han reproducido satisfactoriamente las soluciones numéricas presentadas en Hyland *et al.* (1999) en dos dimensiones espaciales. Adicionalmente, la variación de los parámetros significativos relevantes (tamaño de partícula, esfuerzo cortante medio, esfuerzos de Reynolds del flujo) ha permitido establecer su efecto en la solución general. En particular se ha estudiado su influencia sobre la función densidad de probabilidad (pdf), concentración, velocidad media y esfuerzos de Reynolds de las partículas. Esta última variable se ha comparado frente a la solución presentada en Zaichik (1997), válida para tiempos largos comparados con el tiempo de relajación de la partícula y la escala temporal integral de la turbulencia del flujo portador, obteniéndose idénticos valores estacionarios.

Concretamente, cuando hay presencia de esfuerzo cortante medio los perfiles de concentración de las partículas son elipses rotadas y a medida que éste se incrementa, los perfiles se van estirando. Las partículas pequeñas se difunden más rápido en el flujo turbulento que las partículas grandes, más inerciales. Los esfuerzos de Reynolds turbulentos también rotan los perfiles de concentración de partículas. Conforme transcurre el tiempo, los perfiles de concentración de las partículas se estiran y expanden. ⚙

Apéndice 1: tensores de dispersión λ y μ

$$\begin{aligned}\lambda_{ij}(t) = & \langle f_i f_j \rangle \frac{\tau}{\beta(\beta\tau + 1)} \left[(\beta\tau + 1)(1 - e^{-t/\tau}) \right. \\ & \left. + (e^{-(\beta\tau + 1)t/\tau} - 1) \right] + \delta_{ij} \langle f_2 f_j \rangle \frac{2\alpha\tau}{\beta^2(\beta\tau + 1)} \\ & \times \left[(1 - e^{-(\beta\tau + 1)t/\tau}) + (\beta\tau + 1)(e^{-t/\tau} - 1) \right] \\ & + \delta_{ij} \langle f_2 f_j \rangle \frac{\alpha\tau^2}{\beta(\beta\tau + 1)^2} \left[(1 - e^{-(\beta\tau + 1)t/\tau}) - (\beta\tau + 1)^2 (e^{-t/\tau} - 1) \right] \\ & - \delta_{ij} \langle f_2 f_j \rangle \frac{\alpha\tau}{\beta(\beta\tau + 1)} \left[(\beta\tau + 1)e^{-t/\tau} + e^{-(\beta\tau + 1)t/\tau} \right] \\ \mu_{ij}(t) = & \langle f_i f_j \rangle \frac{\tau}{\beta\tau + 1} (1 - e^{-(\beta\tau + 1)t/\tau}) \\ & + \delta_{ij} \langle f_2 f_j \rangle \frac{\alpha\tau}{(\beta\tau + 1)^2} e^{-(\beta\tau + 1)t/\tau} \left[t(\beta\tau + 1) + \tau(1 - e^{(\beta\tau + 1)t/\tau}) \right] \\ & + \delta_{ij} \langle f_2 f_j \rangle \frac{\alpha\tau}{\beta(\beta\tau + 1)} \left[(\beta\tau + 1)(1 - e^{-t/\tau}) + (e^{-(\beta\tau + 1)t/\tau} - 1) \right]\end{aligned}$$

Bibliografía

- S. Wolfram, "Mathematica a System for doing Mathematics by Computer", (Ed. Wesley, 1988).
- K. E. Hyland, S McKee and M. W. Reeks, "Exact Analytic Solutions to Turbulent Particle Flow Equations", Physics of Fluids. Vol 11 pp 1249-1261 (1999).
- L. I. Zaichik, "Modelling of the Motion of Particles in Non-Uniform Turbulent Flow using The Equation for the Probability Density Function" J.Appl. Maths. Mechs. Vol.61, pp. 127-133 (1997).