



Universitas Scientiarum

ISSN: 0122-7483

revistascientificasjaveriana@gmail.com

Pontificia Universidad Javeriana

Colombia

Moya Moya, Luz Marina; Novoa Ramírez, Jesús Fernando

Ejemplos de ayudas pedagógicas con calculadoras programables para el mejoramiento de la
enseñanza en matemáticas

Universitas Scientiarum, vol. 10, núm. 1es, enero-junio, 2005, pp. 7-15

Pontificia Universidad Javeriana

Bogotá, Colombia

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=49909702>

- ▶ Cómo citar el artículo
- ▶ Número completo
- ▶ Más información del artículo
- ▶ Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

EJEMPLOS DE AYUDAS PEDAGÓGICAS CON CALCULADORAS PROGRAMABLES PARA EL MEJORAMIENTO DE LA ENSEÑANZA EN MATEMÁTICAS

Luz Marina Moya Moya, Jesús Fernando Novoa Ramírez

*Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Javeriana,
Cra. 7^a 43-82, Bogotá, D.C.
luz.moya@javeriana.edu.co, fernando.novoa@javeriana.edu.co*

RESUMEN

Se presentan algunos ejemplos para motivar el uso de herramientas docentes que las calculadoras poseen. Estas herramientas son la programación, las presentaciones y el desarrollo de material de clase, las cuales pueden ser usadas en todos los niveles de la educación.

Palabras clave: Calculadora, programación, actividad, presentación.

ABSTRACT

Some examples are presented to encourage the use of calculators as teaching tools. Such tools include the programming, presentation and development of class materials which can be used at any educational level.

Key words: Calculator, programs, activity, presentation.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad se cuenta con muchas herramientas de cómputo que nos brindan la facilidad de realizar diversidad de cálculos, gráficas y presentar el material de clase en forma ordenada y clara con la ayuda de un computador o una calculadora. Sin embargo, por diversos factores estas herramientas no son usadas en general y nos limitamos muchas veces a realizar simples cálculos o verificaciones aritméticas con estas calculadoras o computadores.

Los siguientes ejemplos pretenden mostrar y motivar a los profesores y estudiantes para hacer mayor uso de las herramientas incluidas en algunas calculadoras y así realizar desarrollos de ayuda docente en sus calculadoras, que no sólo pongan a prueba las capacidades de cómputo de éstas, sino que sean elementos de ayuda en la didáctica de la matemática.

Los tres desarrollos que se presentan son: un programa para la solución de ecuaciones diferenciales de segundo orden realizado

en la calculadora TI Voyage 200, una actividad (e-activity) y una presentación, con la calculadora ClassPad 300. Con cualquiera de estas tres herramientas creemos que el profesor y el estudiante se pueden comunicar e intercambiar ideas y construcciones, lo cual ciertamente fortalece la comunicación entre ellos, y adicionalmente permite comunicación entre colegas ya que estos archivos son de fácil almacenamiento y distribución vía internet.

Los ejemplos

Programación.

La programación en una calculadora como la Voyage 200 o ClassPad 300 se puede realizar fácilmente siguiendo los pasos que el manual del usuario de cada una de estas calculadoras provee. Con conocimientos elementales de las instrucciones de control, es suficiente para desarrollar estos programas. Una de las ventajas de programar con una calculadora como la Voyage, es que los programas se pueden documentar de tal forma que el usuario ejecuta el programa siguiendo las instrucciones que el autor provee como guía. La construcción de un menú de opciones dentro del mismo programa, es una de las herramientas más interesantes para hacer de estos programas fáciles de usar.

Anteriormente se mostró el programa edopo (Moya y Novoa, 2003), para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, en donde el usuario requiere saber clasificar estas ecuaciones por su tipo. Por lo tanto, el programa no es únicamente una herramienta de cálculo para hallar la solución de la ecuación diferencial, la cual el usuario la puede hallar con la función desolve, de la calculadora. La idea es ofrecer una herramienta que permita solucionar la ecuación diferencial una vez el usuario la clasifica y adicionalmente, el estudiante puede decidir el método de

solución de dicha ecuación. Para esto, el programa guía al usuario hacia la solución, obviando las operaciones aritméticas intermedias.

No se discutirá si el clasificar por su tipo las ecuaciones diferenciales tiene o no valor educativo o formativo. Para nosotros, este es sólo un ejemplo que se presenta en clase a los estudiantes para invitarlos a realizar sus propios programas usando los conceptos de diferencial, integral, soluciones de ecuaciones, matrices, gráficas, etc., y evitar el cómputo repetitivo de operaciones matemáticas, a cambio de poner a prueba si sus conceptos son claros y si los pueden expresar por medio de un programa. Un programa estructurado y funcional no sólo requiere copiar una fórmula, dado que los resultados de un cómputo previo pueden ser usados en cálculos siguientes. El ejemplo que se presenta es el programa second para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden y al igual que en edopo [1], el programa guía al usuario hacia la solución por medio de menús una vez el usuario identifique y clasifique la ecuación. Adicionalmente el usuario decide cuál método de solución desea para hallar la función pedida. Para detalles técnicos de estos dos programas recomendamos al lector interesado ver (Moya y Novoa, 2003).

Ejemplo 1. Al sujetar una masa de 1slug a un resorte, éste se estira 2 pies y luego queda en reposo en la posición de equilibrio. A partir de $t = 0$, una fuerza exterior igual a $f(t) = 8\sin(4t)$ se aplica al sistema. Encuentre la ecuación del movimiento si el medio que rodea al sistema opone una fuerza de amortiguación numéricamente igual a 8 veces la velocidad instantánea.

Este es un ejemplo típico en casi cualquier curso de ecuaciones diferenciales, en donde se aplica la ley de Hooke y la segunda ley de Newton y después de algunas consi-

deraciones se obtiene una ecuación de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 16x = 8\sin(4t)$$

la cual es una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea. Con la función desolve se soluciona muy fácilmente:

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
MAIN RAD EXACT 3D 0/30

■ deSolve(y'' + 8·y' + 16·y = 8·sin(4·t), t)
y=(@1·t + @2)·e^-4·t - .25·cos(4·t)
...y''+8y'+16y=8*sin(4t), and y...
SEGUNDO RAD APPROX DE 1/30

```

Para solucionarla usando el programa second, se siguen las indicaciones en la pantalla. Mostramos algunos de los pasos requeridos para solucionar este problema con el programa presentado.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
MAIN RAD EXACT 3D 0/30

second()
MAIN RAD EXACT 3D 0/30

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
MAIN RAD EXACT 3D 0/30

Programa para
solucionar ecuaciones
diferenciales
de orden superior
para continuar oprime
ENTER
MAIN RAD EXACT 3D 0/30

```

Inicialmente se llama al programa second y después de algunas pantallas de informa-

ción aparece el menú para la solución de las ecuaciones diferenciales. Observe el menú en la parte superior. Existen diversas opciones dependiendo del tipo de ecuación a solucionar y el método.

En este caso es una ecuación diferencial de segundo orden no homogéneo, la cual se resolverá por variación de parámetros.

```

F1 F2 F3 F4
Informacion Red de Orden Lin. Homo
MAIN RAD EXACT 3D 0/30

F1 F2 F3 F4
Var Parametros Cauchy Euler Salir
1:info
2:v.parametros
TYPE OR USE <+>+ [ENTER]=OK AND [ESC]=CANCEL

```

Por lo tanto, se selecciona la alternativa F2 en la segunda pantalla y se procede a solucionar la ecuación homogénea, es decir, solucionar

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 16x = 0$$

Se introducen los parámetros pedidos por el programa

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
oprima enter para continuar
solucione la homogenea
entre a,b y c
a?
1
b?
8
c?
16
MAIN RAD EXACT 3D 0/30

```

F1	F2	F3
raiz real	raiz repetida	raiz imaginaria

```

1
b?
8
c?
16
(-4)
dependiendo del tipo de raiz
haga su seleccion
oprima enter para continuar
MAIN RAD EXACT 30 0/30

```

y el usuario debe esperar como respuesta las raíces del polinomio característico de la ecuación, como es lo usual. En este caso la raíz es repetida y de valor -4. Siguiendo el menú y dada la solución obtenida, se selecciona F2 (raíz repetida) y obtenemos la solución de la ecuación diferencial homogénea.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	Program	Graph	Clear Up

```

m1?
-4
yh = (k2·x + k1)·e^-4·x
oprima enter para continuar
no homogenea
entre g, r,s
g?
MAIN RAD EXACT 30 1/30

```

Para hallar la solución particular para la no homogénea se siguen las instrucciones en pantalla e identificando los parámetros pedidos se obtiene dicha solución particular.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	Program	Graph	Clear Up

```

m1?
-4
yh = (k2·x + k1)·e^-4·x
oprima enter para continuar
no homogenea
entre g, r,s
g?
MAIN RAD EXACT 30 1/30

```

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	Program	Graph	Clear Up

```

oprima enter para continuar
no homogenea
entre g, r,s
g?
8*sin(4*x)
r?
x*e^(-4*x)
s?
e^(-4*x)
MAIN RAD EXACT 30 3/30

```

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	Program	Graph	Clear Up

```

8*sin(4*x)
r?
x*e^(-4*x)
s?
e^(-4*x)
-cos(4·x)
4
y = yh + yp
oprima enter para continuar
MAIN RAD EXACT 30 3/30

```

Finalmente, el programa le recuerda que la solución general es la suma de la solución homogénea y la solución particular hallada anteriormente. Usando las condiciones iniciales, el usuario encuentra que la solución de la ecuación es

$$x(t) = \frac{1}{4}e^{-4t} + te^{-4t} - \frac{1}{4}\cos(4t).$$

Note que el programa requiere cierto grado de interacción del usuario, saber lo que está preguntando, hacer cambios de variables etc., y no simplemente escribir la ecuación y esperar respuesta. Esta es la ventaja y diferencia entre la función desolve y los programas edopo y second.

Adicionalmente el programa le permite solucionar ecuaciones de segundo grado, homogéneas y no homogéneas con coeficientes constantes, ecuaciones de Cauchy y otras más.

La idea con esta herramienta es que cada uno pueda hacer sus programas, no solamente para ecuaciones diferenciales sino para todas las asignaturas en las que la calculadora le pueda servir de compañero docente y de calculadora. El nivel de los programas depende de sus necesidades y conocimientos. Instrucciones como prompt, display, le permiten hacer programas elementales e introducir y mostrar valores específicos de las variables de su programa, en la misma forma como una función matemática retorna valores después de su evaluación.

Las otras dos herramientas que se presentan son las actividades (e-Activity) y las presentaciones, con la calculadora ClassPad 300. Estas dos actividades se pueden distribuir fácilmente entre los interesados e incluso, organizar todo un curso y distribuirlo por internet.

e-Activity.

Una de las herramientas novedosas en la calculadora ClassPad 300 es la creación de e-Activity. Por simplicidad, las llamaremos en español una actividad. Una actividad es simplemente un conjunto de instrucciones en forma de texto, cálculos numéricos, gráficos, definiciones, construcciones geométricas, tablas, etc., en forma ordenada para presentar cierta información que nos permita solucionar un problema, o dar una explicación sobre un tema determinado. Por esto es de esperar que puedan ser muy útiles como herramientas en la organización y distribución del material didáctico de una clase.

Para los detalles de cómo empezar una actividad, remitimos a los interesados al manual del usuario de la calculadora, pero con la guía de inicio rápido es suficiente para empezar a realizar una actividad o una presentación. Sólo oprima la opción eActivity del menú y empiece a escribir, calcular o graficar. En una actividad se puede incluir texto, cómputos numéricos, gráficas de todo tipo, construcciones geométricas, y definir funciones localmente. Los cómputos, gráficas y construcciones pueden ser recreados cada vez que el usuario quiera ver la actividad. Otra ventaja de las actividades y presentaciones es que se almacenan y distribuyen como se hace con cualquier programa o función.

Ejemplo 2. Solución de una ecuación Diofántica haciendo uso de la solución de una ecuación cuadrática. Encontrar

las soluciones racionales y enteras de la ecuación

$$x^2 - 2y^2 = I.$$

La gráfica de esta cuadrática es una hipérbola, y claramente contiene infinitos puntos solución (x,y) pero se quiere aquellos que tengan sus coordenadas enteras o racionales. La idea es simplemente hallar la intersección entre la recta $y = t(x - 1)$ y la hipérbola $x^2 - 2y^2 = 1$, con $t \in \mathbb{Q}$. Encontrar distintas soluciones requiere solamente de dar valores a t . La idea es presentar toda esa información de manera que pueda ser entendida, recreada y almacenada fácilmente por los estudiantes inicialmente, de tal forma que les pueda servir no solamente como repaso sino como modelo para presentar nuevos problemas y soluciones particulares a problemas propuestos en libros o en clase.

Rápidamente mostramos algunos de los detalles de esta actividad, la cual puede ser ejecutada y realizada también desde el emulador . El paso de los archivos de la calculadora al computador se realiza con la ayuda del software ClassPad Manager que se distribuye con la calculadora e incluso se puede obtener en internet.

Inicialmente se describe el problema y se hacen algunas gráficas que pongan en contexto el problema. Estas gráficas tienen la ventaja que cada vez que el usuario las quiera ver lo podrá hacer simplemente tocando el ícono de gráfica (ó construcción geométrica, o tabla, etc.) que se encuentra al lado derecho:

En cada paso se pueden formular las preguntas para reforzar la idea que se pretende presentar: ¿por qué?, ¿qué significa el parámetro t ?, ¿qué representan los datos en la tabla?

Solucion de algunas ecuaciones Diofanticas.

Presentamos algunas soluciones enteras y racionales de la ecuación $ax^2+by^2=c$.

Ejemplo
Hallar soluciones enteras y racionales de la ecuación $x^2-2y^2=1$.

La ecuación representa una hipérbola la cual tiene la forma $k^2-2y^2=1$

y racionales de la ecuación $x^2-2y^2=1$.

La ecuación representa una hipérbola la cual tiene la forma $k^2-2y^2=1$

Es usual representar las curvas por medio de ecuaciones paramétricas. Recuerde inicialmente algunas identidades trigonométricas. En este caso, recordemos que $1=\sec(t)^2-\tan(t)^2$, luego tomando $x(t)=\sec(t)$ y $y(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan(t)$ podemos verificar que su gráfica es curva con parámetros.

Oprima en el símbolo de gráfica.

Oprima nuevamente el símbolo de gráfico para continuar.

es solución.
Tracemos la recta que pasa por $(1,0)$ con pendiente racional r . Su ecuación es

Describe la ecuación y una de estas rectas la podemos ver en el gráfico

recta e hipérbola

La idea es encontrar el punto de corte distinto de $(1,0)$ entre la recta y la hipérbola.

Solución.

es solución.
Tracemos la recta que pasa por $(1,0)$ con pendiente racional r . Su ecuación es

Describe la ecuación y una de estas rectas la podemos ver en el gráfico

recta e hipérbola

La idea es encontrar el punto de corte distinto de $(1,0)$ entre la recta y la hipérbola.

Solución.

Resolvemos la ecuación de la hipérbola y por lo tanto, $x^2-2y^2=1$ se puede reescribir como $x^2-2(t(x-1))^2=1$.

Solucionando

$$x^2-2(t(x-1))^2=1$$

$$\left\{ x=1, x=\frac{-2t^2+1}{2t^2-1} \right\}$$

Puede dejar ejercicios para que el estudiante resuelva o complete.

Observa el gráfico, cálculo o construcción geométrica realizada.

¡Hemos hecho uso de la ecuación cuadrática!

Edit Zoom Analysis

Sheet1 | Sheet2 | Sheet3 | 4 |

$$xt1 = \frac{2-t^2}{2-t^2-1} + \frac{1}{2-t^2-1}$$

$$yt1 = t \cdot \left(\frac{2-t^2}{2-t^2-1} + \frac{1}{2-t^2-1} \right)$$

xt2:
yt2:

Rad Cplx

Edit T-Fact Graph

t	xt1	yt1
0	-1	0
0.5	-3	-2
1	-3	-2
1.5	1.5714	0.8571
2	1.2857	0.5714
2.5	1.1739	0.4347
3	1.1176	0.3529
3.5	1.0851	0.2978
4	1.0645	0.258
4.5	1.0506	0.2278
5	1.0428	0.204
5.5	1.0336	0.1848
6	1.0281	0.169
6.5	1.0239	0.1556
7	1.0206	0.1443
7.5	1.0179	0.1345

Rad Cplx

PRESENTACIONES

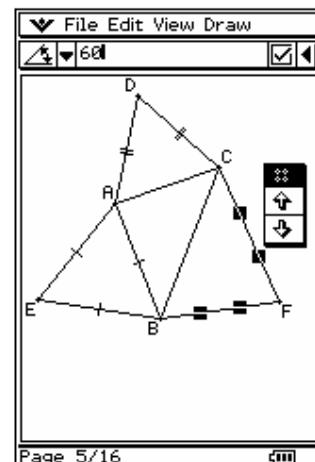
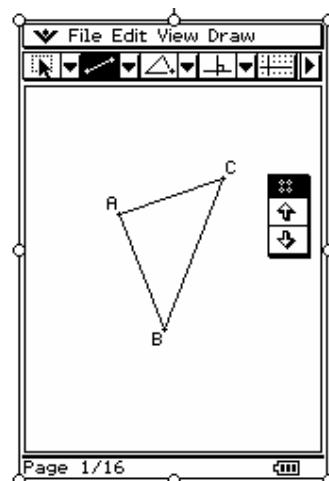
Creo que a cualquiera le ha pasado que por más que se tenga preparado un tema o una conferencia, cuando deseamos realizar en vivo (por ejemplo, en un computador) ese cálculo crucial, esa comprobación especial, por alguna razón, humana o técnica, el resultado no aparece y no sabemos qué hacer. También sabemos el resultado devastador de ese instante. Sin importar todo lo que se ha realizado antes, la conferencia pierde mucho de su efectividad, y lo que se deseaba presentar se ve opacado por ese último fallo. Para evitar esos casos, es usual preparar y hacer las clases o conferencias con programas de presentación como Power Point o Flash. En la actualidad, para ese tipo de presentaciones con mucha simbología matemática podemos usar los programas relacionados con tex.

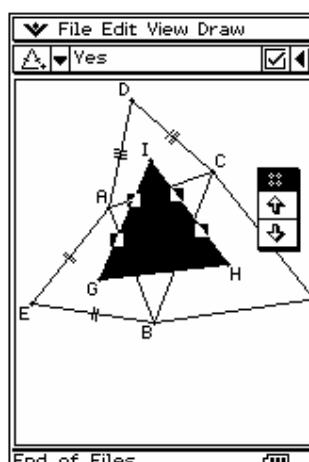
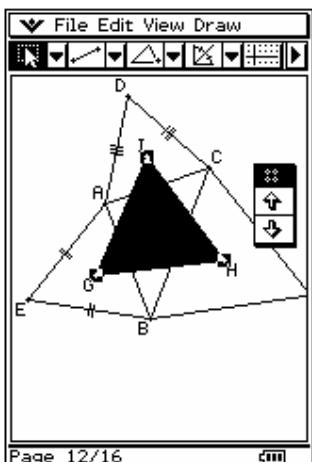
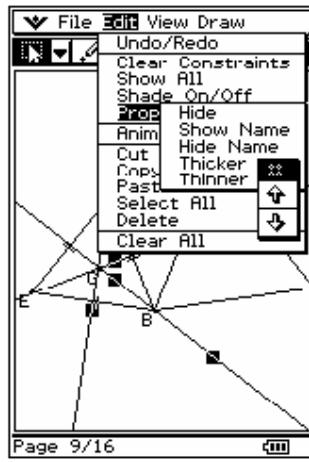
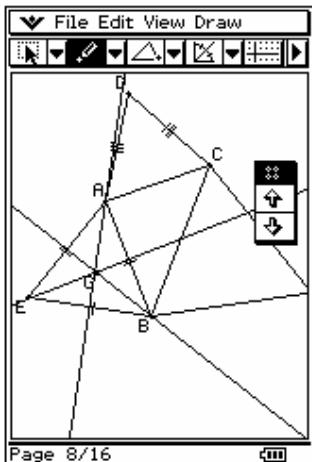
Para una presentación de gráficas y construcciones con las calculadoras, sin necesidad de hacer los cómputos en el momento de la presentación, se puede usar la calculadora como uno de estos programas mencionados anteriormente y cada uno de los pasos de su construcción se almacena como una gráfica, y en la conferencia o clase simplemente se proyectan.

Los pasos para hacer una presentación con la ClassPad 300 son muy sencillos: basta tocar con el lápiz en la barra de herramientas inferior de la calculadora la opción de H-Copy y su gráfica queda almacenada. Para otros detalles remitimos al interesado a la guía de inicio rápido o manual del usuario.

Ejemplo 3. Construir un triángulo cualquiera. Sobre sus lados construir triángulos equiláteros. Calcular los centros de estos triángulos y comprobar que el triángulo formado al unir dichos centros es equilátero.

Este teorema es conocido como el teorema de Napoleón y damos sólo algunos detalles de su construcción. Para mayor información de esta y otras construcciones geométricas puede consultar (<http://saltire.com/index.html>).





La presentación se puede mostrar en forma automática graduando el tiempo entre figura y figura o en forma manual. Adicionalmente sobre cada gráfica de la presentación se puede añadir texto y las aclaraciones que el autor crea necesarias.

CONCLUSIONES

Las herramientas que poseen las calculadoras Voyage y Class Pad 300 hacen posible recrear y motivar desarrollos en

matemáticas los cuales permiten establecer una relación académica entre estudiantes y profesores tanto en el aula de clase como fuera de ella por medio del desarrollo de estas actividades docentes.

La creación de programas, rutinas, actividades y presentaciones son algunas de las alternativas que se pueden emplear como estrategias docentes y de esta forma el usuario de las calculadoras es parte activa de su propia educación.

LITERATURA CITADA

MOYA, L. y NOVOA, F. 2003. *Uso de la calculadora TI 92 para la solución de problemas en ciencias*. Journal of Science Education, 4 (1): 38-40.

Saltire Software. <http://saltire.com/index.html>.

Texas Instruments. TI-92 Guidebook, 1998.

ZILL, D. 1997. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica, 3^a ed.

Recibido: 03-10-2004

Aceptado: 02-02-2005