



Revista Mexicana de Física

ISSN: 0035-001X

[rmf@ciencias.unam.mx](mailto:rmf@ciencias.unam.mx)

Sociedad Mexicana de Física A.C.

México

Medel Juárez, J.J.; Zagaceta Álvarez, M.T.  
Estimador de parámetros para sistemas de orden superior  
Revista Mexicana de Física, vol. 58, núm. 2, abril, 2012, pp. 127-132  
Sociedad Mexicana de Física A.C.  
Distrito Federal, México

Available in: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=57023422002>

- How to cite
- Complete issue
- More information about this article
- Journal's homepage in [redalyc.org](http://redalyc.org)

[redalyc.org](http://redalyc.org)

Scientific Information System

Network of Scientific Journals from Latin America, the Caribbean, Spain and Portugal

Non-profit academic project, developed under the open access initiative

## Estimador de parámetros para sistemas de orden superior

J.J. Medel Juárez

Centro de Investigación en Computación,  
Calle Venus S/N, Col. Nueva Industrial Vallejo, CP. 07738  
e-mail: jjmedelj@yahoo.com.mx

M.T. Zagaceta Álvarez

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,  
Av. De las Granjas N.- 682 Col. Santa Catarina, Del. Azcapotzalco.  
e-mail: mtza79@yahoo.com.mx

Recibido el 17 de octubre de 2011; aceptado el 9 de febrero de 12

Este trabajo presenta un estimador de parámetros teniendo en cuenta una señal observable con respecto a un sistema tipo caja negra de orden superior y expresado en diferencias finitas. El modelo se compone de la secuencia de estados observables retardados conforme al vector de espacio de estados asociado y conocido. La técnica de estimación se basa en la pseudo-inversa y en un proceso de innovación con base a las perturbaciones y a la señal observable, respectivamente. En la simulación se propusieron dos ejemplos, de segundo y tercer orden, que corresponden a dos y tres retardos en diferencias finitas con dos y tres parámetros asociados. Por lo tanto, es necesario estimar los parámetros de los modelos de segundo y tercer orden, considerados. La estimación ha permitido identificar la señal observable con una tasa de convergencia alta con base al funcional de error, tal y como se muestra en las figuras. El segundo momento de probabilidad con la variable instrumental es la técnica aplicada para la construcción del estimador de un sistema de orden superior en diferencias finitas.

*Descriptores:* Diferencias finitas; esperanzas matemática; estimación; segundo momento de probabilidad; sistemas invariantes en el tiempo.

This paper presents parameter estimations considering an observable black box system signal represented with high order finite differences. The model is expressed as a sequence of delayed observable states conforming space state vector to its known associated parameters. The estimation technique is based on pseudo-inverse and an innovation process associated with perturbation and an observable signal. The simulation uses two high order finite difference models, second and third grades with associate parameters. In both cases the observed signal depends on their delayed states. Therefore, it is necessary to estimate two and three parameters with respect to second and third order models, respectively. The estimation results allowed identifying the observable signal with a high convergence rate in base of functional error, as shown in the figures. Instrumental variable is the technique applied to the second probability moment constructing the estimator for a high finite difference order system.

*Keywords:* Finite differences; mathematical expectation; estimation; second probability moment; time-invariant systems.

PACS: 02.70.Bf; 02.50.-r; 02.10.Yn; 02.70.-c.

### 1. Introducción

La respuesta muestreada de un sistema de tipo caja negra es una señal estocástica y en general es descrita por algún modelo en diferencias que utiliza de manera recursiva los estados observables retardados.

Los modelos discretos que están en función de la señal retardada, tienen un vector de parámetros así como un vector de estados observables. Los parámetros son lo único que se puede ajustar para que en la respuesta del modelo se observe la velocidad de cambio de la señal de referencia dentro de cada intervalo de tiempo.

En un sistema en diferencias finitas se observa que el orden de la ecuación corresponde al retardo más grande observada en ella; es decir, si el modelo tiene una señal observable con cinco retardos, se tendrá una ecuación en diferencias de quinto orden.

Si la respuesta del sistema tipo caja negra, tiene una dinámica no bien determinada, dentro del modelo en diferencias se considera que el grado de la ecuación va incluido con respecto al orden de la misma. Hasta ahora esa relación no está del todo bien determinada.

Ahora al considerar que el modelo en diferencias compuesto por parámetros y estados observables, dentro de la teoría de filtrado, a su descripción, se le conoce como estimación.

Un modelo en diferencias finitas de orden y grado superior a uno, la estimación de sus parámetros se presenta más compleja, por las dinámicas que requieren describir.

La estimación se hace dinámica por su recursividad y considera diversas técnicas entre las que destacan: mínimos cuadrados, variable instrumental, proyecciones, deconvolución, modos deslizantes, así como los que usan en la inteligencia artificial por medio de ventaneo, tales como: las redes neuronales, algoritmos genéticos y lógica difusa [1].

Las técnicas de estimación de parámetros se clasifican en no recursivos y recursivos. Las no recursivas procesan toda la información entrada-salida del sistema tipo caja negra para construir un vector de parámetros fuera de línea, el cual entrega sus resultados al final de un intervalo de tiempo y que al realizar sus operaciones con el vector de estados observables, el modelo en diferencias entrega un resultado un punto que en el mejor de los casos se aproxima en algún sentido a la respuesta observable. En cambio, las técnicas recursivas a

medida que va evolucionando el sistema de referencia, van calculando los parámetros del modelo y así su respuesta, observando su grado de convergencia; pudiendo en este último caso, corregir por medio de procesos adaptivos al estimador para lograr una mejor convergencia a la señal observable.

El desarrollo de un estimador de respuesta finita al impulso mediante la aproximación de mínimos cuadrados de acuerdo con la Ref. 2, permite verificar que el error de convergencia es un promedio y no el estado que guarda el estimador en el tiempo.

El análisis del estimador adaptivo de acuerdo con la Ref. 3 considera que el error entre la señal observable y la respuesta del modelo en diferencias con sus parámetros estimados, requiere estar dentro del algoritmo de estimación para afectar su dinámica del modelo de acuerdo a la velocidad de convergencia requerida

La adaptación como se describe en la Ref. 4, busca acelerar la convergencia del estimador al ajustar sus parámetros estimados aplicando un criterio o razón de decisión con respecto al error de convergencia. Por ejemplo, el proceso de adaptación considera a la densidad espectral de la señal observable para afectar al estimador y darle un valor de decisión de acuerdo con el periodograma que afecte al valor de la estimación. El objetivo de la Ref. 5 es tratar de igualar las propiedades espectrales de los errores de filtrado con las propiedades espectrales de la medición del ruido que afecta a la señal observable; en donde los resultados de las simulaciones mostraron que la estimación tiene buena convergencia, con velocidades de cambios acotadas.

Para lograr el proceso de adaptación en el filtrado de acuerdo con Prony, es necesario construir la forma autorregresiva del estimador [6]. Primeramente se presenta una descripción y un análisis de las estructuras de los modelos Atuo-Regresivos con Promedios Móviles ARMA  $(p, q)$ , en donde la parte Auto-Regresiva AR es de orden  $p$  y la parte de promedios móviles MA es de orden  $q$  [7]. En este tipo de modelos se establecen las relaciones básicas con las autocorrelaciones y se exponen algunos criterios para la obtención de los parámetros autoregresivos.

No solo los modelos en diferencias finitas son usados para buscar aproximarse a la señal observable; sino que la inteligencia artificial propone herramientas importantes, tales como las redes neuronales. En este caso de acuerdo con la Ref. 8, es necesario ajustar las ganancias de cada neurona tanto de la capa de entrada, la oculta y la de salida, con respecto a un estimador circular para guardar los últimos valores adquiridos como peso por cada neurona.

Para la selección del modelo que se aproxime mejor a la señal observable, se realiza una serie de pruebas sobre los modelos propuestos en los cuales interviene la estimación. El resultado de cada modelo se compara con la señal de referencia y al obtener del segundo momento de probabilidad de manera recursiva, se compara con los resultados de los otros modelos y se selecciona al que tenga el mejor nivel de convergencia. Es decir, se selecciona al modelo con la menor incertidumbre asociada a la Ref. 9.

En la Ref. 10 se presenta un ejemplo en el que el vector de ganancias requiere ajustarse dinámicamente con un criterio de adaptación sobre el estimador que es del tipo multiplicativo y que minimiza el error de convergencia de manera exponencial.

Se considera en la Ref. 11 que es recomendable determinar los parámetros de la función de transferencia del modelo asociado a la caja negra, para no perder de vista la estabilidad. Y que de acuerdo con la Ref. 12, la solución está en el uso de un estimador recursivo matricial construido por la operación de deconvolución: La convolución dentro de un periodo de tiempo está conformado por un grupo de intervalos en los cuales el sistema no cambia de contexto y permite hacer una aproximación al producto matricial con base al cual el sistema tipo caja negra, dadas sus entradas y salidas dentro de ese periodo de tiempo será visto como un sistema multivariable al no cambiar el contexto y al mantener sus condiciones de invarianza; de manera que es necesario el uso de la pseudoinversa en la estimación ya que se observan problemas de singularidad en su desarrollo. El filtrado por deconvolución descrita en la Ref. 12, permite la consideración de modelos de orden superior y de acuerdo con la Ref. 13 es posible la descripción de la señal observable usando polinomios de orden superior, contando con una mejor aproximación, de acuerdo con el error cuadrático medio.

La descripción de las señales observables de un sistema tipo caja negra comúnmente es no lineal y se considera un problema complejo, ya que conlleva dentro del filtrado, la realización de dos grandes etapas: a) la selección de la estructura del modelo con un cierto número de parámetros (al que se le describirá como identificador) y, b) la selección de un estimador que describa dichos parámetros [14]. A este último punto se enfoca el presente trabajo. El determinar los valores de los parámetros de un modelo dinámico a partir de resultados experimentales, es un problema de estimación [15]. Condición que está presente en muchas de las facetas del desarrollo de la física y de las matemáticas.

Para aplicar la teoría tradicional de estimación de parámetros en los sistemas no lineales es necesario considerar el orden y el grado como parte del modelo recursivo expresado en diferencias finitas [16]; en donde un sistema de  $n$  orden expresado en diferencias finitas corresponde a un sistema con  $n$  retardos. Lo que permite realizar la estimación pero ahora en lugar de considerar un parámetro se considera ya sea un vector o una matriz de parámetros.

En este trabajo se presenta la generalización de un estimador de parámetros de grado y orden  $n$ .

## 2. Desarrollo

En general un sistema tipo caja negra no lineal de acuerdo con la Ref. 17 es posible expresarlo en diferencias finitas (1) una vez que se ha determinado su orden y grado.

$$y(k) = \sum_{i=1}^m a_i y^{k-i}(k-i) + dW(k) \quad (1)$$

Donde

$$\{y^{k-i}(k-i)\} \subseteq \mathfrak{R}_{[-1,1]}, \{a_i\} \subseteq \mathfrak{R}_{+[0,1]}, |d| \in \mathfrak{R}_{+[0,1]}$$

$$\{W(k)\} \subseteq N(\mu, \sigma^2 < \infty)$$

De acuerdo con (1) el vector de parámetros es descrito como

$$A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{m-1} \ a_m] \subseteq \mathfrak{R}_{[-1,1]}^{[1 \times m]}$$

y vector de estados observables asociado

$$X(k) = [y^{k-1}(k-1) \ y^{k-2}(k-2) \ \dots$$

$$y^{k-(m-1)}(k-(m-1)) \ y^{k-m}(k-m)]^T \in \mathfrak{R}_{(-1,1)}^{[m \times 1]}$$

Con

$$Y(k) := y(k) \in \mathfrak{R}_{(-1,1)}^{[1 \times 1]}, \ W(k) \in \mathfrak{R}_{(-\varepsilon, \varepsilon)}^{[1 \times 1]}$$

que se cumple

$$|\varepsilon| \ll \inf\{|a_i|\}_{i=1, \dots, m}, \ m \in \mathbb{Z}_+, \ |\varepsilon|$$

$$= \min \sigma_{e(k)}^2, \ e(k) = y(k) - \hat{y}(k), \ \hat{y}(k)$$

el estado identificado de  $y(k)$ . El coeficiente  $d \in \mathfrak{R}_{[-1,1]}^{[1 \times 1]}$

La expresión (1) se transforma a (2)

$$Y(k) = AX(k) + dW(x) \quad (2)$$

El vector de parámetros "A" de acuerdo al concepto de caja negra, es lo desconocido del sistema (2) ya que a él llega una excitación  $W(k)$  y se tiene como respuesta  $Y(k)$ .

**Teorema 1.** Dado el modelo (2) y considerando a la variable instrumental  $Z(k) := Y(k-1)$  así como al proceso de innovación  $\Theta(k) := [Y(k) - dW(k)]$ , la matriz de parámetros a estimar es descrita en (3).

$$\hat{A}(k) = E\{\Theta(k)Z(k)|\mathfrak{S}_{Y(k)}\} (E\{X(k)Z(k)\})^+ \in \mathfrak{R}_{[-1,1]}^{[1 \times m]} \quad (3)$$

Que de manera desarrollada tiene la forma (4)

$$\hat{A}(k) = [\hat{a}_1(k)|\hat{a}_2(k)| \dots \hat{a}_{m-1}(k)|\hat{a}_m(k)] \in \mathfrak{R}_{[-1,1]}^{[1 \times m]},$$

$$m \in \mathbb{Z}_+ \quad (4)$$

Prueba (Ver Anexo 1).

### 3. Simulación

Para el desarrollo de la simulación se considera la siguiente metodología:

1. Contar con el grado y orden del sistema tipo caja negra,
2. Considerar el modelo descrito en (1) de acuerdo al orden y al grado,

3. Expresarlo en forma matricial (2),

4. Se procede a la estimación de los parámetros internos de acuerdo con (3)

5. Se implementa dentro de un sistema digital para la estimación de parámetros.

6. Dentro de la simulación se considera medir el error de convergencia en función de la salida de la caja negra y el modelo de referencia (2) con sus parámetros estimados, obteniendo su medida de dispersión.

De acuerdo con (2) al realizar la estimación por medio de (3) se logró converger a la señal observable propuesta, tan solo considerando la dinámica estimada y remplazada en (2). Como puede verse en la Fig. 1, la línea punteada es la señal observable y la línea con puntos y líneas es la señal del modelo. Ambas convergen en frecuencia y en amplitud. La señal observable así como la del modelo tienen una amplitud de -1 a 1.

En la Fig. 2 se observan los parámetros estimados del sistema de segundo orden, con (1) hasta  $m = 2$ .

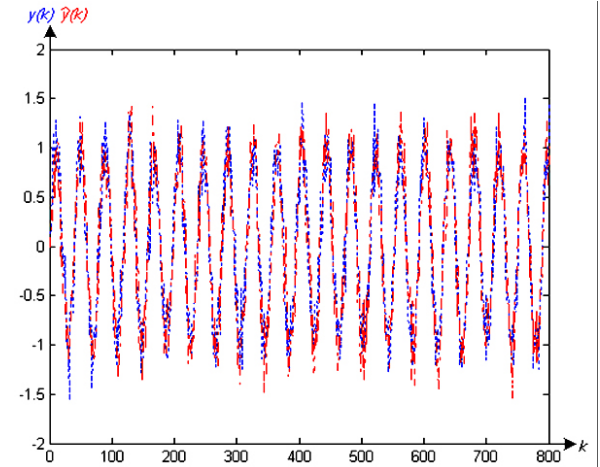


FIGURA 1. Seguimiento de la señal observable del sistema tipo caja negra por el modelo en diferencias finitas (1).

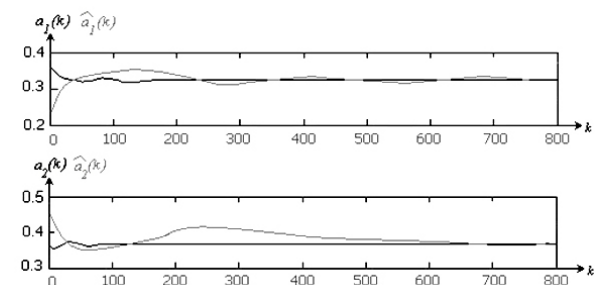


FIGURA 2. Parámetros  $a_1(k)$ ,  $a_2(k)$  con sus estimados.

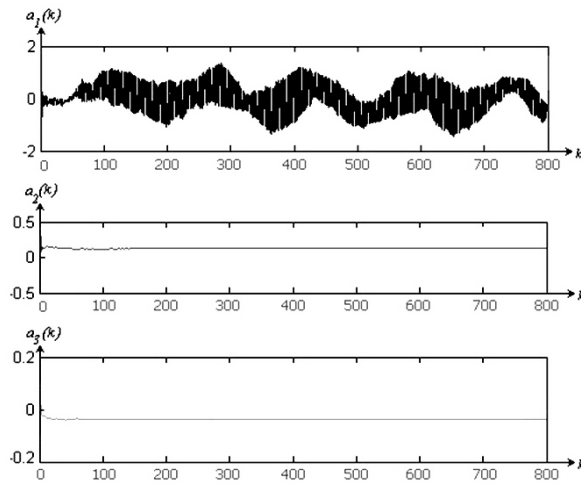


FIGURA 3. Parámetros del sistema de tercer orden.

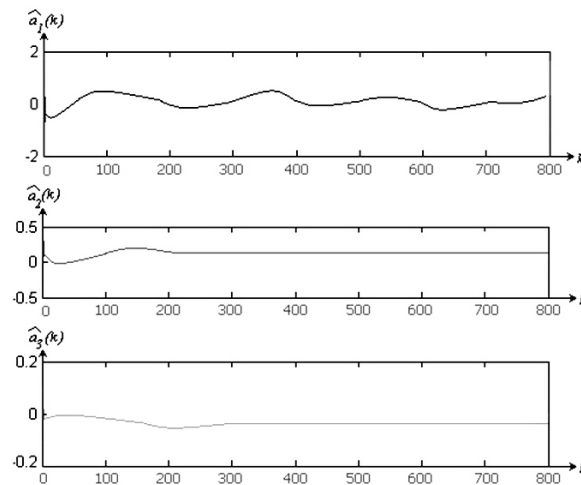


FIGURA 4. Parámetros estimados del sistema de tercer orden.

En la Fig. 3 se presentan los parámetros de un sistema de tercer orden, de acuerdo con (1) y  $m = 3$ .

En la Fig. 4 se muestra los parámetros estimados del sistema de tercer orden ilustrado en la Fig. 3.

En la Fig. 5 se muestra a la señal observable y la señal identificada para un sistema de tercer orden.

En la Fig. 6 se muestra el funcional del error del sistema tipo caja negra de tercer orden, descrito en (5).

$$J(k) = \frac{1}{k^2} (e(k)^2 + (k - 1)^2 J(k - 1)) \quad (5)$$

Donde  $J(k) = E \{e(k)^2\} \in \mathbb{R}_{[0,1]}^2$ , y  $e(k) = y(k) - \hat{y}(k)$ .

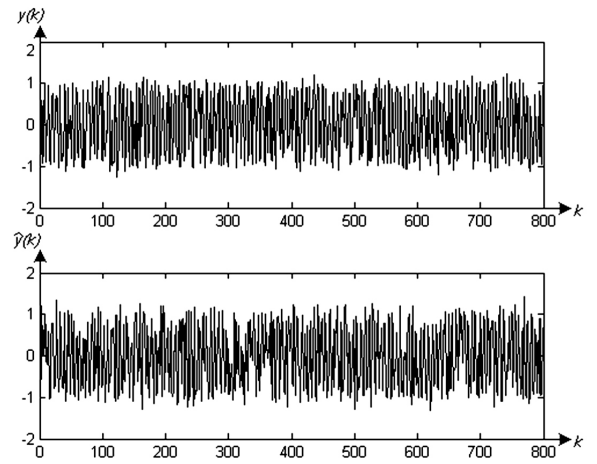


FIGURA 5. Señal observable e identificada del sistema de tercer orden.

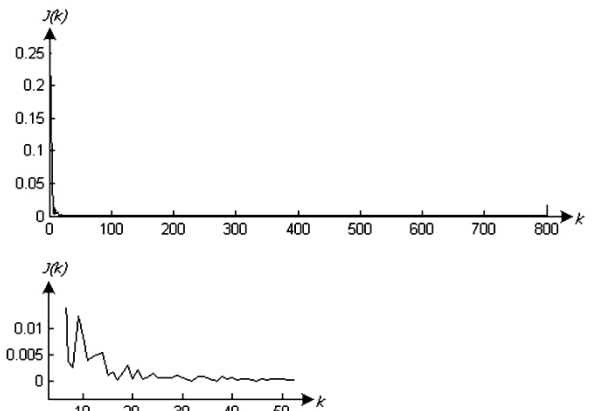


FIGURA 6. Funcional del error  $J(k)$ , con amplificación para observar su nivel de convergencia.

### 4. Conclusión

La teoría del filtrado digital en la estimación permite conocer la dinámica de los parámetros en relación con un sistema de referencia, al cual comúnmente se le considera caja negra alno conocer su dinámica interna. En este sentido, se desarrolló un estimador de parámetros invariantes en el tiempo para sistemas de orden superior al describir la secuencia de estados observables en un vector de estados, y así a sus parámetros asociados. Los resultados tanto teóricos como prácticos permiten contar con una potente herramienta dentro de la teoría de filtrado digital adaptivo al observar que es posible realizar la estimación de parámetros para sistemas de orden superior, siempre y cuando se describan en diferencias finitas.

### Anexo

**Prueba Teorema 1.** *Considérese a (1) en forma desarrollada, se tiene (6)*

$$y(k) = a_1 y^{k-1}(k-1) + a_2 y^{k-2}(k-2) + \dots + a_{m-1} y^{k-(m-1)}(k-(m-1)) + a_m y^{k-m}(k-m) + dW(k) \quad (6)$$

Al desarrollar el segundo momento de probabilidad considerando a la variable instrumental descrita como  $y(k-1)$ , se tiene (7):

$$\begin{aligned} E\{y(k)y(k-1)\} &= a_1 E\{y^{k-1}(k-1)y(k-1)\} + a_2 E\{y^{k-2}(k-2)y(k-1)\} + \dots \\ &+ a_{m-1} E\{y^{k-(m-1)}(k-(m-1))y(k-1)\} + a_m E\{y^{k-m}(k-m)y(k-1)\} + dE\{W(k)y(k-1)\} \end{aligned} \quad (7)$$

De (7) se tiene la forma vectorial (8) y desarrollada en (9)

$$E\{y(k)y(k-1)\} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}^T E \left\{ \begin{bmatrix} y^{k-1}(k-1)y(k-1) \\ y^{k-2}(k-2)y(k-1) \\ \vdots \\ y^{k-m}(k-m)y(k-1) \end{bmatrix} \right\} + dE\{W(k)y(k-1)\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} E\{y(k)y(k-1)\} E \left\{ \begin{bmatrix} y^{k-1}(k-1)y(k-1) \\ y^{k-2}(k-2)y(k-1) \\ \vdots \\ y^{k-m}(k-m)y(k-1) \end{bmatrix} \right\}^T &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \\ E \left\{ \begin{bmatrix} y^{k-1}(k-1)y(k-1) \\ y^{k-2}(k-2)y(k-1) \\ \vdots \\ y^{k-m}(k-m)y(k-1) \end{bmatrix} \right\} E \left\{ \begin{bmatrix} y^{k-1}(k-1)y(k-1) \\ y^{k-2}(k-2)y(k-1) \\ \vdots \\ y^{k-m}(k-m)y(k-1) \end{bmatrix} \right\}^T &+ dE\{W(k)y(k-1)\} E \left\{ \begin{bmatrix} y^{k-1}(k-1)y(k-1) \\ y^{k-2}(k-2)y(k-1) \\ \vdots \\ y^{k-m}(k-m)y(k-1) \end{bmatrix} \right\}^T \end{aligned} \quad (9)$$

De (9) se construye la matriz  $M(k)$ , en (10)

$$M(k) = E \left\{ \begin{bmatrix} (y^{k-1}(k-1)y(k-1))^2 & \dots & y^{k-1}(k-1)y(k-1)y^{k-m}(k-m)y(k-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{k-m}(k-m)y(k-1)y^{k-1}(k-1)y(k-1) & \dots & (y^{k-m}(k-m)y(k-1))^2 \end{bmatrix} \right\} \quad (10)$$

Y al considerar (10) en (9), se tiene (11)

$$\begin{aligned} E\{y(k)y(k-1)\} E \left\{ \begin{bmatrix} y^{k-1}(k-1)y(k-1) \\ y^{k-2}(k-2)y(k-1) \\ \vdots \\ y^{k-m}(k-m)y(k-1) \end{bmatrix} \right\}^T &= [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m] M(k) + dE\{W(k)y(k-1)\} E \left\{ \begin{bmatrix} y^{k-1}(k-1)y(k-1) \\ y^{k-2}(k-2)y(k-1) \\ \vdots \\ y^{k-m}(k-m)y(k-1) \end{bmatrix} \right\}^T \end{aligned} \quad (11)$$

El proceso de innovación considerando en (11) permite describir a la secuencia de parámetros en (12)

$$[\hat{a}_1(k) \ \hat{a}_2(k) \ \cdots \ \hat{a}_m(k)] = E \{ \Theta(k)y(k-1) \} E \left\{ \begin{bmatrix} y^{k-1}(k-1)y(k-1) \\ y^{k-2}(k-2)y(k-1) \\ \vdots \\ y^{k-m}(k-m)y(k-1) \end{bmatrix} \right\}^T (M(k))^+ \quad (12)$$

Que corresponden a (4).

- 
1. E. Haro Sandoval, "Estimación de Parámetros de un Automóvil utilizando Algoritmos Genéticos" **11** (2008) 33-41.
  2. E. Zavala Huavel y L. González Segura, "Diseño de Filtros FIR Mediante Mínimos Cuadrados" **5** (2007) 98-103.
  3. J. Velázquez Sánchez y J.C. Avalos, "Algoritmo de Mínimos Cuadrados con Error Codificado para Filtrado Adaptivo" (Escuela Superior de Ingeniería Mecánica Eléctrica, Información Tecnológica IPN 2008).
  4. L. Vega y S. Tressens, *Lat. Am. Appl. Res.* **8** (2007) 340-346.
  5. C. Quiroz, "Aplicaciones del modelo autoregresivo y del modelo PRONY" (Centro de investigación y desarrollo de tecnología digital 2008).
  6. T.E. Oliphant, "On Parameter Estimates of the Lossy Wave Equation" (Signal Processing, IEEE Jan. 2008).
  7. S.S. Kozat y A.C. Singer, *Universal Switching Linear Least Squares Prediction* (Signal Processing, IEEE Feb. 2008).
  8. L.P. Sánchez Fernández, *Computación y Sistemas.* **7** (2003) 92-101.
  9. D. Bravo-Montenegro, J. Cortes Carvajal, M. Patiño y J. Cabrera López, *Revista Colombiana de Física,* **40** (2008) 411-413.
  10. L. Rouco, J.L. Zamora y M. González, "Ajuste de Reguladores de Turbina Hidráulicas con Técnicas de Estimación de Parámetros" **5** (2004) 104-109.
  11. C.F. Rengifo, "Una Herramienta para Identificación Recursiva de Sistemas Dinámicos" **5** (2004) 1-12.
  12. J.J. Medel y C.V. García Mendoza, *Rev. Mex. de Fis.* **56** (2010) 54-60.
  13. A. Fonseca de Oliveira, "Propuesta de Formula para Sistemas de Segundo Orden" (2006) 112-117.
  14. S. Garrido, L. Moreno y C. Balaguer, Tesis "Identificación, Estimación y Control de Sistemas No-lineales mediante RGO" (Universidad Carlos III de Madrid Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática 2006).
  15. A.A. Marrero Severo, L.M. Pedroso Rodríguez y J. Barrios Ginnart, *Revista de Matemáticas* **13** (2006) 139-150.
  16. V. Moreno Quintana y G. Acuña Leiva, "Estimación de Parámetros Utilizando Modelos de Caja Gris con Redes Neuronales de Base Radial" **3** (2007) 216-222.
  17. J.J. Medel y M.T. Zagaceta, *Rev. Mex. de Fis.* **56** (2010) 1-8.