Papeles del Psicólogo, 2010. Vol. 31(1), pp. 34-45
http://www.cop.es/papeles

MODELOS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES

Miguel A. Ruiz, Antonio Pardo y Rafael San Martín
Facultad de Psicología. Universidad Autónoma de Madrid

En este capítulo se presentan los modelos de ecuaciones estructurales, una técnica de análisis estadístico multivariante utilizada para contrastar modelos que proponen relaciones causales entre las variables. Tras la definición de este tipo de modelos y la presentación de un ejemplo típico, se discute el concepto de causalidad, para entender su utilización en este contexto. A continuación se discute la estructura general que tiene un modelo, los tipos de variables que se pueden utilizar en ellos y su representación mediante diagramas estructurales, acompañado de la discusión de un ejemplo. Posteriormente se presentan los pasos en la elaboración de un modelo y los tipos de relaciones posibles. También se comentan brevemente el concepto de ajuste y los problemas típicos de estos modelos. Por último se ofrecen algunos recursos adicionales.

Palabras clave: *Modelos de ecuaciones estructurales, Variables latentes, Variables observadas, Diagrama de rutas, Modelos de rutas, Análisis de estructuras de covarianza, Análisis factorial confirmatorio, Bondad de ajuste, Modelos causales.*

In this chapter, structural equation models (SEM) are presented. SEM is a multivariate statistical technique used to test models proposing causal relations between their variables. After defining this type of models and presenting a typical example, the concept of causation is discussed, in order to understand it's meaning in the present context. The general model structure, the types of variables used, and how to represent them in path diagrams are discussed, accompanied with an example. Steps needed to build a model are presented and the different types of relations are commented. Goodness of fit is also briefly commented and also typical problems found in these models. Some additional resources are also presented.

Key words: *Structural equation models, Latent variables, Observed variables, Path diagrams, Path analysis, Analysis of covariance structures, Confirmatory factor analysis, Goodness of fit, Causal models.*

Los modelos de ecuaciones estructurales son una familia de modelos estadísticos multivariantes que permiten estimar el efecto y las relaciones entre múltiples variables. Los modelos de ecuaciones estructurales nacieron de la necesidad de dotar de mayor flexibilidad a los modelos de regresión. Son menos restrictivos que los modelos de regresión por el hecho de permitir incluir errores de medida tanto en las variables criterio (dependientes) como en las variables predictoras (independientes). Podría pensarse en ellos como varios modelos de análisis factorial que permiten efectos directos e indirectos entre los factores.

Matemáticamente, estos modelos son más complejos de estimar que otros modelos multivariantes como los de Regresión o Análisis factorial exploratorio y por ello su uso no se extendió hasta 1973, momento en el que apareció el programa de análisis LISREL (*Linear Structural Relations*; Jöreskog, 1973). El LISREL fue perfeccionado, dando lugar al LISREL VI (Jöreskog y Sörbom, 1986), que ofrecía una mayor variedad de métodos de estimación. El EQS (Abreviatura de *Equations*: Bentler, 1985) es el otro paquete utilizado tradicionalmente para este tipo de análisis. En la actualidad, existen otros programas de estimación en entorno gráfico, como el AMOS (Analysis of Moment Structures; Arbuckle, 1997). Tal ha sido la influencia de los programas de estimación en la posibilidad de desarrollo de los modelos de ecuaciones estructurales, que no es infrecuente que se los denomine modelos LISREL. En la literatura internacional se los suele llamar modelos SEM, abreviatura de Structural Equation Models.

La gran ventaja de este tipo de modelos es que permiten proponer el tipo y dirección de las relaciones que se espera encontrar entre las diversas variables contenidas en él, para pasar posteriormente a estimar los parámetros que vienen especificados por las relaciones propuestas a nivel teórico. Por este motivo se denominan también *modelos confirmatorios*, ya que el interés fundamental es "confirmar" mediante el análisis de la muestra las relaciones propuestas a partir de la teoría explicativa que se haya decidido utilizar como referencia.

Como podemos apreciar en el siguiente ejemplo, la especificación teórica del modelo permite proponer estructuras causales entre las variables, de manera que unas variables causen un efecto sobre otras variables que, a su vez, pueden trasladar estos efectos a otras variables, creando concatenaciones de variables.

Correspondencia: Miguel Ángel Ruiz. *Departamento de Psicología Social y Metodología. Facultad de Psicología. Universidad Autónoma de Madrid. Calle Iván Pavlov 6. 28049 Madrid. España. Email: miguel.ruiz@uam.es*

La figura 1 muestra un modelo de ecuaciones estructurales perteneciente al campo de la salud (González y Landero, 2008). Este tipo de modelos en particular también se denominan modelos de análisis de rutas (path analysis) y en él todas las variables son observables, excepto los errores de predicción. La finalidad de este modelo concreto es predecir la magnitud de los síntomas psicosomáticos de una persona a partir de un conjunto de antecedentes personales. El modelo plantea la existencia de tres variables predictoras (autoestima, autoeficacia y apoyo social) que influyen en el nivel de estrés del individuo. A su vez el estrés influye de manera directa sobre la magnitud de los síntomas psicosomáticos y también de manera indirecta, modulado por el nivel de cansancio emocional. Como puede observarse, el modelo propuesto es algo más complejo que un modelo de regresión ya que algunas variables juegan el papel de variable predictora y de variable dependiente de manera simultánea.

Interpretando brevemente la magnitud y el signo de los parámetros estimados, los resultados constatan que las variables predictoras tienen un efecto negativo sobre el nivel de estrés, de manera que una menor autoeficacia percibida, una menor autoestima y un menor apoyo social generan un mayor nivel de estrés. Además, la autoeficacia percibida es el predictor con mayor efecto y todos los predictores se relacionan unos con otros. Con los predictores utilizados se puede explicar el 42% de la variabilidad del estrés. Además, el estrés influye directa y positivamente (0,16) sobre los síntomas psicosomáticos, pero el efecto indirecto a través del cansancio emocional es mayor (0,21=0,54*0,39). En total se explica el 24% de las diferencias encontradas en los síntomas psicosomáticos de los sujetos. El significado de estos y otros elementos de la figura se explicarán más adelante.

El nombre que reciben los modelos de ecuaciones estructurales es debido a que es necesario utilizar un conjunto de ecuaciones para representar las relaciones propuestas por la teoría. Para representar las relaciones del ejemplo anterior se están utilizando y estimado simultáneamente tres ecuaciones de regresión.

Existen muchos tipos de modelos con distinto nivel de complejidad y para distintos propósitos. Todos ellos son modelos de tipo estadístico. Esto quiere decir que contemplan la existencia de errores de medida en las observaciones obtenidas de la realidad. Habitualmente incluyen múltiples variables observables y múltiples variables no observables (latentes), aunque algunos como el del ejemplo sólo contemplan como variables latentes los errores de predicción.

Respecto a su estimación, los modelos de ecuaciones estructurales se basan en las correlaciones existentes entre las variables medidas en una muestra de sujetos de manera transversal. Por tanto, para poder realizar las estimaciones, basta con medir a un conjunto de sujetos en un momento dado. Este hecho hace especialmente atractivos estos modelos. Ahora bien, hay que tener en cuenta que las variables deben permitir el cálculo de las correlaciones y por ello deben ser variables cuantitativas, preferentemente continuas.

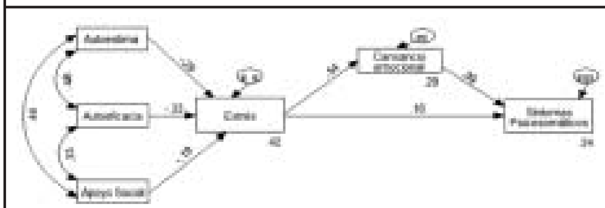
Los puntos fuertes de estos modelos son: haber desarrollado unas convenciones que permiten su representación gráfica, la posibilidad de hipotetizar efectos causales entre las variables, permitir la concatenación de efectos entre variables y permitir relaciones recíprocas entre variables.

Son muchos los tipos de modelos que se pueden definir con esta metodología. A continuación se enuncian los más populares de los mencionados en la literatura estadística: Regresión múltiple con multicolinealidad, Análisis factorial confirmatorio (ver Ferrando y Anguiano, 2010), Análisis factorial de 2º orden, Path analysis, Modelo causal completo con variables latentes, Modelo de curva latente (ver Bollen y Curran, 2006), Modelos multinivel (ver Skrondal y Rabe-Hesketh, 2004), Modelos multigrupo, Modelos basados en las medias (ANOVA, ANCOVA, MANOVA y MANCOVA; ver Bagozzi y Yi, 1994) y Análisis de mediación (ver Preacher y otros, 2007).

EL CONCEPTO DE CAUSALIDAD

Una potencialidad interesante de estos modelos es la posibilidad de representar el efecto causal entre sus variables. Aunque resulte muy atractivo el hecho de poder representar gráficamente la influencia causal de una variable sobre otra y aunque también seamos capaces de estimar el parámetro correspondiente a ese efecto, debemos tener claro que la estimación del parámetro no "demuestra" la existencia de causalidad. La existencia de una relación causal entre las variables debe venir sustentada por la articulación teórica del modelo y no por su estimación con datos de tipo transversal. Para demostrar

FIGURA 1
MODELO DE RUTAS DE EJEMPLO



científicamente la existencia de una relación causal deberemos recurrir al diseño de un experimento controlado con asignación aleatoria de los sujetos a las condiciones del estudio (ver Pardo, Ruiz y San Martín, 2009, págs. 356-359). No debemos olvidar que los modelos de ecuaciones estructurales se utilizan en estudios de tipo correlacional en los que tan solo se observa la magnitud de las variables y en los que nunca se manipulan éstas.

Los trabajos de Boudon (1965) y Duncan (1966) abrieron una nueva posibilidad de aproximación al problema de la causalidad, distinta de la manipulación experimental, proponiendo el análisis de dependencias o *análisis de rutas* (path analysis). En este tipo de análisis se estudia una teoría causal mediante la especificación de todas las variables importantes para dicha teoría. Posteriormente, se pueden derivar las relaciones entre los efectos causales a partir de la teoría causal para, en último término, estimar el tamaño de estos efectos. La generalización del modelo de análisis de rutas dio lugar a los modelos de ecuaciones estructurales para la comprobación de teorías o, lo que es lo mismo, de modelos causales. La lógica de estos modelos establece que, basándose en la teoría que fundamenta el modelo, será posible derivar las medidas de covariación esperadas entre las variables a partir de los efectos causales del modelo. Si la teoría es correcta, las medidas de covariación derivadas del modelo y las medidas de covariación obtenidas a partir de los datos deberán ser iguales.

ESTRUCTURA DE UN MODELO

Un modelo de ecuaciones estructurales completo consta de dos partes fundamentales: el modelo de medida y el modelo de relaciones estructurales.

El modelo de medida contiene la manera en que cada constructo latente está medido mediante sus indicadores observables, los errores que afectan a las mediciones y las relaciones que se espera encontrar entre los constructos cuando éstos están relacionados entre sí. En un modelo completo hay dos modelos de medida, uno para las variables predictoras y otro para las variables dependientes.

El modelo de relaciones estructurales es el que realmente se desea estimar. Contiene los efectos y relaciones entre los constructos, los cuales serán normalmente variables latentes. Es similar a un modelo de regresión, pero puede contener además efectos concatenados y bucles entre variables. Además, contiene los errores de predicción (que son distintos de los errores de medición).

Existen dos casos excepcionales en los que el modelo no contiene ambas partes y que se usan con relativa frecuencia. En primer lugar, los modelos de análisis factorial confirmatorio sólo contienen el modelo de medida y las relaciones entre las variables latentes sólo pueden ser de tipo correlacional. En segundo lugar, los modelos de análisis de rutas no contienen variables latentes; en su lugar, las variables observables son equiparadas con las variables latentes; consecuentemente, sólo existe el modelo de relaciones estructurales. Como contrapartida, los errores de medición y los errores de predicción se confunden en un único término común.

TIPOS DE VARIABLES

En un modelo estructural se distinguen distintos tipos de variables según sea su papel y según sea su medición.

- ✔ Variable observada o indicador. Variables que se mide a los sujetos. Por ejemplo, las preguntas de un cuestionario.
- ✔ Variable latente. Característica que se desearía medir pero que no se puede observar y que está libre de error de medición. Por ejemplo, una dimensión de un cuestionario o un factor en un análisis factorial exploratorio.
- ✔ Variable error. Representa tanto los errores asociados a la medición de una variable como el conjunto de variables que no han sido contempladas en el modelo y que pueden afectar a la medición de una variable observada. Se considera que son variables de tipo latente por no ser observables directamente. El error asociado a la variable dependiente representa el error de predicción.
- ✔ Variable de agrupación. Variable categóricas que representa la pertenencia a las distintas subpoblaciones que se desea comparar. Cada código representa una subpoblación.
- ✔ Variable exógena. Variable que afecta a otra variable y que no recibe efecto de ninguna variable. Las variables independientes de un modelo de regresión son exógenas.
- ✔ Variable endógena. Variable que recibe efecto de otra variable. La variable dependiente de un modelo de regresión es endógena. Toda variable endógena debe ir acompañada de un error.

LOS DIAGRAMAS ESTRUCTURALES: CONVENCIONES Y DEFINICIONES

Para representar un modelo causal y las relaciones que se desea incluir en él se acostumbra a utilizar diagramas similares a los diagramas de flujo. Estos diagramas se denominan *diagramas causales*, *gráfico de rutas* o *diagramas estructurales*. El diagrama estructural de un modelo es su representación gráfica y es de gran ayuda a la hora de especificar el modelo y los parámetros contenidos en él. De hecho, los programas actuales permiten realizar la definición del modelo en su totalidad al representarlo en el interfaz gráfico. A partir del diagrama estructural el propio programa deriva las ecuaciones del modelo e informa de las restricciones necesarias para que esté completamente identificado. Los diagramas estructurales siguen unas convenciones particulares que es necesario conocer para poder derivar las ecuaciones correspondientes.

- ✔ Las variables observables se representan encerradas en rectángulos.
- ✔ Las variables no observables (latentes) se representan encerradas en óvalos o círculos.
- ✔ Los errores (sean de medición o de predicción) se representan sin rectángulos ni círculos (aunque algunos programas las dibujan como variables latentes).
- ✔ Las relaciones bidireccionales (correlaciones y covarianzas) se representan como vectores curvos con una flecha en cada extremo.
- ✔ Cualquier efecto estructural se representa como una flecha recta, cuyo origen es la variable predictora y cuyo final, donde se encuentra la punta de la flecha, es la variable dependiente.
- ✔ Los parámetros del modelo se representan sobre la flecha correspondiente.
- ✔ Cualquier variable que reciba efecto de otras variables del modelo deberá incluir también un término error.
- ✔ Aunque no es necesario que el usuario lo especifique, los programas suelen incluir, junto a cada variable, su varianza y, si se trata de una variable dependiente, su correspondiente proporción de varianza explicada.

Los diagramas estructurales también sirven para especificar adecuadamente el modelo de cara a la estimación con un programa estadístico. Las restricciones se hacen de manera gráfica o imponiendo valores sobre el propio gráfico. Además, los programas estadísticos permiten comprobar el modelo especificado a partir del gráfico que genera el programa. Esto ayuda a no olvidar parámetros fundamentales en la definición del modelo, evitando que el usuario tenga que escribir de forma explícita las ecuaciones del modelo y confiar en que las ecuaciones sean las correctas.

Revisemos el modelo planteado anteriormente como ejemplo pero, esta vez, definido con mayor complejidad. La figura 2 muestra una nueva versión del modelo que contiene seis variables latentes: autoestima, autoeficacia, apoyo social, estrés, cansancio emocional y síntomas psicosomáticos. Las tres primeras variables latentes son exógenas (porque no reciben efecto directo de otra variable), y las tres últimas variables latentes son endógenas, porque reciben efecto de otras variables. Las tres variables endógenas cuentan con un término que representa su error de predicción (e_e, ece y esx).

Cada variable latente endógena está medida mediante tres variables observables que se denominan indicadores. La variable latente síntomas psicosomáticos se mide a los sujetos mediante tres escalas llamadas INDI1SX, INDI2SX e INDI3SX. El modelo asume que una persona con muchos síntomas psicosomáticos puntuará alto en los tres indicadores y una persona con pocos síntomas psicosomáticos puntuará bajo. Los indicadores son ob-

FIGURA 2
MODELO ESTRUCTURAL COMPLETO DE PREDICCIÓN DE LOS SÍNTOMAS PSICOSOMÁTICOS

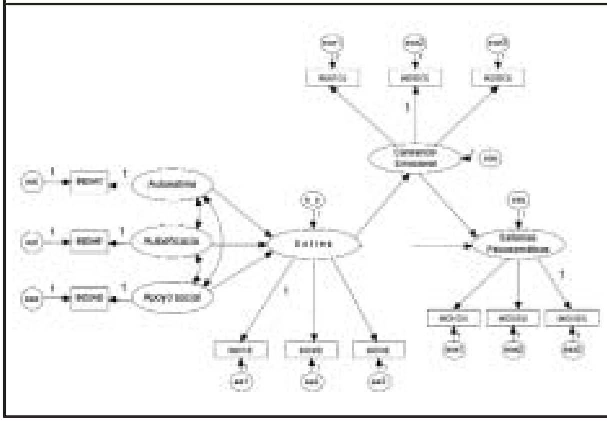
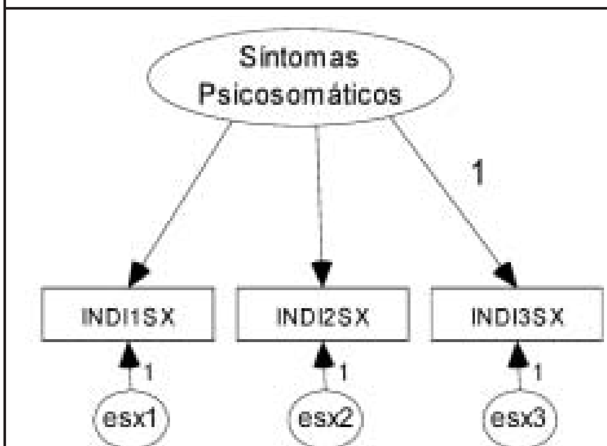


FIGURA 3
MODELO DE MEDIDA DE LA VARIABLE SÍNTOMAS PSICOSOMÁTICOS



servables pero no son medidas perfectas de su variable latente. Por ese motivo, cada indicador tiene asociado un error de medida. El error de medida del indicador INDI1SX es la variable no observable esx1. La figura 3 representa el modelo de medida de la variable latente síntomas psicosomáticos. En el caso de las variables latentes exógenas, cada constructo se encuentra medido por un solo indicador y por ese motivo se puede simplificar esa parte del modelo identificando la variable latente con su indicador, como se indica en el modelo final estimado de la figura 5.

La figura 4 representa el modelo de relaciones estructurales. Este modelo sólo contiene las variables latentes. En él es fácil apreciar que las variables exógenas pueden correlacionar entre sí (cosa que no sería posible en un modelo de regresión ordinario) y que cada variable endógena tiene asociado un error de predicción que explica parte de su variabilidad (este error no está asociado a los errores de medida, que están recogidos en el modelo de medida).

La figura 5 representa el modelo final estimado, una vez simplificado con respecto a las variables exógenas.

FIGURA 4
MODELO DE RELACIONES ESTRUCTURALES

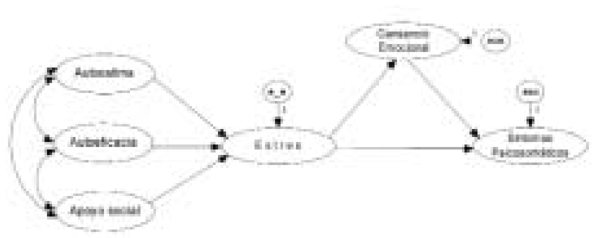
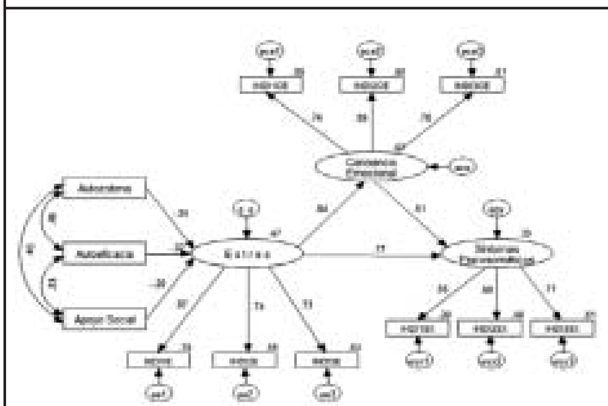


FIGURA 5
MODELO FINAL ESTIMADO



En la parte izquierda se encuentran las tres variables exógenas utilizadas para predecir el nivel de estrés. Las tres variables son observables y correlacionan entre sí (son multicolineales). El efecto negativo que tienen sobre el estrés indica que un menor nivel de autoestima, autoeficacia y apoyo social permite predecir un mayor nivel de estrés. (En el gráfico no se indica, pero todos los pesos de regresión son significativamente distintos de cero). La combinación de los tres predictores permite explicar el 47% de la varianza del estrés (libre de error de medición), lo que se indica numéricamente sobre la variable latente. La proporción de varianza del estrés explicada por sus predictores es inversamente proporcional a la varianza de su error de predicción y por eso no es necesario indicar su valor, pero sí se representa la variable de error correspondiente (e_e). Cada variable latente endógena se encuentra medida por tres indicadores. Cada flecha que parte de una variable latente hacia su indicador se interpreta igual que la saturación en un análisis factorial y (en la solución estandarizada) se corresponde con la correlación del indicador con la variable latente que intenta medir. El valor numérico representado junto al recuadro de una variable observada es la proporción de varianza compartida por el indicador y la variable latente (similar a la comunalidad) y que no es atribuible al error de medición. En la parte central del modelo se encuentran los efectos de unas variables latentes sobre las otras. Se aprecia que el estrés tiene mayor efecto directo sobre el cansancio emocional que sobre los síntomas psicosomáticos. A su vez, el efecto que reciben los síntomas psicosomáticos del estrés es menor que el que reciben del cansancio emocional. En la figura no se representa el efecto total del estrés sobre los síntomas psicosomáticos (0,50) que sería la suma del efecto directo (0,17) y el indirecto (0.64*0.51=0,33) a través del cansancio emocional.

Comparando el modelo completo con el modelo de rutas de la figura 1 podemos constatar que los efectos se han incrementado en algunos casos de manera sustancial y que, además, se ha incrementado la proporción de varianza explicada de las variables endógenas. También se aprecia que no todos los indicadores son igual de precisos. Por último, es esperable que este modelo equivalente, siendo estimable, obtenga peores valores de ajuste que el modelo de rutas por el mero hecho de contener un mayor número de variables (lo que afecta a los grados de libertad del modelo y a los estadísticos de bondad de ajuste).

Al igual que existe un conjunto convenciones para representar los modelos de manera gráfica, también existen convenciones para nombrar cada elemento de un modelo, ya sean variables o parámetros, en su notación matemática. No entraremos aquí a explicar esta notación, pero sí es bueno saber que se suelen utilizar letras griegas (ver Ruiz, 2000; Hayduk, 1987).

PASOS EN LA ELABORACIÓN DE UN MODELO

La estimación de un modelo comienza con la formulación de la teoría que lo sustenta. Dicha teoría debe estar formulada de manera que se pueda poner a prueba con datos reales. En concreto, debe contener las variables que se consideran importantes y que deben medirse a los sujetos. El modelo teórico debe especificar las relaciones que se espera encontrar entre las variables (correlaciones, efectos directos, efectos indirectos, bucles). Si una variable no es directamente observable, deben mencionarse los indicadores que permiten medirla. Lo normal es formular el modelo en formato gráfico; a partir de ahí es fácil identificar las ecuaciones y los parámetros.

Una vez formulado el modelo, cada parámetro debe estar correctamente identificado y ser derivable de la información contenida en la matriz de varianzas-covarianzas. Existen estrategias para conseguir que todos los parámetros estén identificados, como por ejemplo, utilizar al menos tres indicadores por variable latente e igualar la métrica de cada variable latente con uno de sus indicadores (esto se consigue fijando arbitrariamente al valor 1 el peso de uno de los indicadores). Aun así, puede suceder que el modelo no esté completamente identificado, lo que querrá decir que se está intentando estimar más parámetros que el número de piezas de información contenidas en la matriz de varianzas-covarianzas. En ese caso habrá que imponer más restricciones al modelo (fijando el valor de algún parámetro) y volver a formularlo.

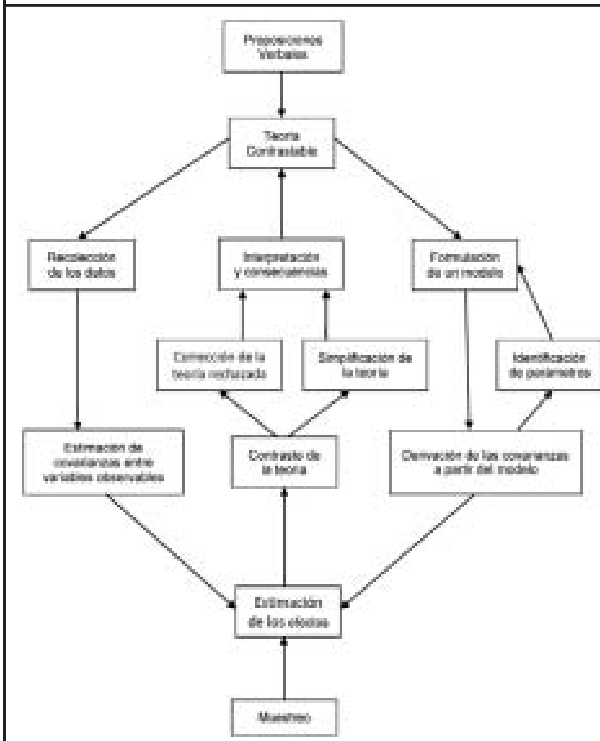
Por otra parte, una vez seleccionadas las variables que formarán parte del modelo, hay que decidir cómo se medirán las variables observables. Estas mediciones (generalmente obtenidas mediante escalas o cuestionarios) permitirán obtener las varianzas y las covarianzas en las que se basa la estimación de los parámetros de un modelo correctamente formulado e identificado (asumimos que estamos trabajando con una muestra representativa de la población que se desea estudiar y de tamaño suficientemente grande).

Una vez estimados los parámetros del modelo se procede, en primer lugar, a valorar su ajuste. Si las estimaciones obtenidas no reproducen correctamente los datos observados, habrá que rechazar el modelo y con ello la teoría que lo soportaba, pudiendo pasar a corregir el modelo haciendo supuestos teóricos adicionales. En segundo lugar se procede a hacer una valoración técnica de los valores estimados para los parámetros. Su magnitud debe ser la adecuada, los efectos deben ser significativamente distintos de cero, no deben obtenerse estimaciones impropias (como varianzas negativas), etc. Puede ocurrir que alguna de las estimaciones tenga un valor próximo a cero; cuando ocurre esto es recomendable simplificar el modelo eliminando el correspondiente efecto. Por último, el modelo debe interpretarse en todas sus partes. Si el modelo ha sido aceptado como una buena explicación de los datos será interesante validarlo con otras muestras y, muy posiblemente, utilizarlo como explicación de teorías de mayor complejidad que se desee contrastar. El proceso expuesto se resume gráficamente en la figura 6.

TIPOS DE RELACIONES

En las técnicas multivariantes estamos acostumbrados a estudiar la relación simultánea de diversas variables entre sí. En estas técnicas las relaciones entre variables dependientes e independientes son todas del mismo nivel o del mismo tipo. En un modelo de ecuaciones estructurales podemos distinguir distintos tipos de relaciones. En-

FIGURA 6
PROCESO DE ELABORACIÓN Y ESTIMACIÓN DE UN MODELO



tender estos distintos tipos de relaciones puede ser de gran ayuda a la hora de formular los modelos a partir de las verbalizaciones en lenguaje común. A continuación vamos a discutir estos tipos de relaciones, siguiendo el esquema propuesto por Saris y Stronkhorst (1984).

COVARIACIÓN Vs CAUSALIDAD

Decimos que dos fenómenos *covarían*, o que están correlacionados, cuando al observar una mayor cantidad de uno de los fenómenos también se observa una mayor cantidad del otro (o menor si la relación es negativa). De igual forma, a niveles bajos del primer fenómeno se asocian niveles bajos del segundo. Así, por ejemplo, cuando decimos que la aptitud y el rendimiento correlacionan entre sí, esperamos que los sujetos con un mayor nivel de aptitud manifiesten un mejor rendimiento y viceversa. Sin embargo, ya hemos enfatizado que covariación y causalidad no son la misma cosa. Cuando se observa una alta relación (covariación) entre dos variables, no debemos interpretarla como una relación causal entre ambas. Pueden existir otras variables que no hemos observado y que potencien o atenúen esta relación. Por ejemplo, es posible que la motivación y el rendimiento estén relacionados y que esa relación esté condicionando la relación de la aptitud con el rendimiento (potenciándola o atenuándola). Un ejemplo tal vez más claro es el propuesto por Saris. Si recolectamos datos sobre el número de vehículos y el número de aparatos telefónicos en distintas poblaciones, es seguro que encontraremos una covariación entre ambas variables. Pero no por ello pensamos que un mayor número de vehículos es el causante de que haya un mayor número de aparatos telefónicos.

Otro nivel de análisis es la causalidad. Si recogemos información sobre el número de fumadores en una habitación y la cantidad de humo existente en la habitación, observaremos que existe una alta covariación entre ambas variables. Parece razonable dar un paso más en la interpretación de este resultado y argumentar, conceptualmente, que la cantidad de fumadores *causa* la cantidad de humo y que los cambios en la cantidad de fumadores causarán un cambio en la cantidad de humo.

El cambio de perspectiva desde la covariación observada a la causalidad atribuida a dos variables lo lleva a cabo el investigador, que es quien hipotetiza la causalidad. Es una buena costumbre que las verbalizaciones, o enunciados, sean explícitos respecto al tipo de relación que deseamos probar entre dos variables.

Los ejemplos que hemos expuesto en este apartado pueden representarse mediante los gráficos que hemos desarrollado hasta aquí.

Si estamos estudiando la correlación entre aptitud y rendimiento deberemos representarla como una flecha curva entre ambas variables.

Figura 7 Relación de covariación

Por el contrario, la relación causal entre el número de fumadores y la cantidad de humo la representaremos como un vector que apunte de la causa hacia el efecto.

Figura 8: Relación de tipo causal

RELACIÓN ESPURIA

En una relación causal básica o una relación de covariación hay involucradas dos variables. En una relación espuria la relación comprende al menos tres variables. Una relación espuria se refiere a la existencia de covariación entre dos variables que es debida, total o parcialmente, a la relación común de ambas variables con una tercera. Esta es la razón por la cual la covariación entre dos variables puede ser muy elevada y, sin embargo, ser nula su relación causal. Un ejemplo típico de relación espuria es la que se da entre estatura e inteligencia en preescolares. Si medimos ambas variables en niños de preescolar es muy posible que encontremos una alta relación entre ellas; sin embargo, a nadie se le ocurre pensar que la estatura causa la inteligencia. Existe una tercera variable, el desarrollo del niño (la edad), que es causa de ambas variables y que hace que se observe esa relación. Gráficamente se puede representar de la siguiente forma:

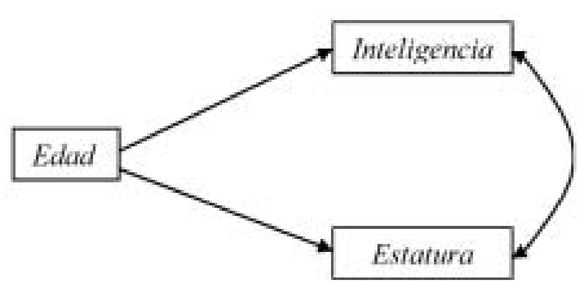


Figura 9: Relación espuria

Para estudiar la presencia de este fenómeno se utiliza el coeficiente de correlación parcial, que mide la relación entre dos variables tras eliminar el efecto de una tercera (también puede eliminarse el efecto de más de una variable). En nuestro ejemplo, la correlación entre las tres variables será alta y positiva, mientras que la correlación parcial entre la inteligencia y la estatura (eliminando el efecto de la edad) será prácticamente nula.

En general, podemos decir que la relación causal entre dos variables implica que ambas variables covarían, permaneciendo constantes el resto de las variables. Pero lo contrario no es cierto: la covariación entre dos variables no implica necesariamente que exista una relación causal entre ambas; la relación puede ser espuria, falsa, ficticia (ver Pardo, Ruiz y San Martín, 2009, págs. 356-357).

RELACIÓN CAUSAL DIRECTA E INDIRECTA

Hasta ahora sólo hemos mencionado relaciones causales directas. Una relación causal indirecta implica la presencia de tres variables. Existe una relación indirecta entre dos variables cuando una tercera variable modula o mediatiza el efecto entre ambas. Es decir, cuando el efecto entre la primera y la segunda pasa a través de la tercera. A las variables que median en una relación indirecta se las denomina también variables moduladoras.

Consideremos la relación entre la aptitud, el rendimiento y la motivación. Podemos pensar en el nivel de motivación como una variable que modula la relación entre la aptitud y el rendimiento. Esta relación puede representarse gráficamente como:

Figura 10: Relación causal indirecta

El modelo de la figura propone que existe un efecto directo de la aptitud sobre la motivación y de la motivación sobre el rendimiento. Además, existe un efecto indirecto entre la aptitud y el rendimiento. El efecto indirecto de la variable aptitud sobre el rendimiento puede ser potenciado (o atenuado) por la variable moduladora motivación.

La existencia de un efecto indirecto entre dos variables no anula la posibilidad de que también exista un efecto directo entre ellas. Así, las relaciones propuestas en la figura 10 pueden hacerse más complejas de la siguiente forma:

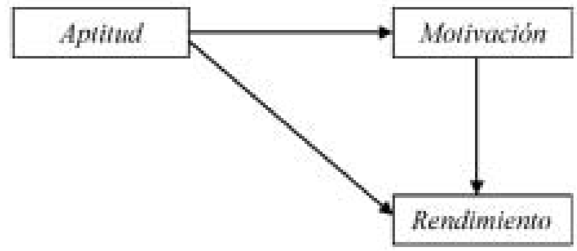


Figura 11: Relaciones directa e indirecta

Una vez más, es el investigador quién debe explicitar el tipo de relaciones que su teoría es capaz de justificar.

RELACIÓN CAUSAL RECÍPROCA

La relación causal entre dos variables puede ser recíproca o unidireccional. Cuando la relación es recíproca (bidireccional) la variable causa es a su vez efecto de la otra. Este tipo de relaciones se representa como dos flechas separadas orientadas en sentidos contrarios. Una relación recíproca es en definitiva un bucle de retroalimentación entre dos variables. La relación causal recíproca puede ser directa o indirecta, implicando a otras variables antes de cerrase el bucle.

La relación entre la Ansiedad y el Rendimiento puede representarse como un bucle recíproco: cuanto mayor es la ansiedad, peor es el rendimiento; y cuanto peor es el rendimiento, mayor es la ansiedad.

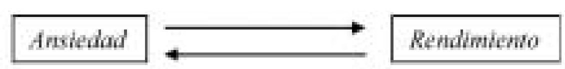


Figura 12: Relación causal recíproca

EFECTOS TOTALES

Hemos visto que cada tipo de relación causal se representa mediante un tipo de efecto. Existe un último tipo de efecto (o relación) que no hemos mencionado; se trata de los efectos *no analizados*. En la representación gráfica son las flechas que podrían estar representadas y que no lo están. Estas ausencias pueden obedecer a dos motivos. Por un lado, puede ocurrir que se hayan dejado fuera del modelo variables importantes para explicar la covariación presente en los datos (error de especificación). Por otro, puede ser debido a que se asume que el resto de las variables no consideradas en el modelo se compensan entre sí, incorporándose su efecto en los términos de error del modelo. A la suma de los efectos espurios más los efectos no analizados se les denomina *efectos no causales*. Una vez que el modelo está definido, los efectos espurios aparecen cuando las variables endógenas están correlacionadas más allá de los efectos estimados (apareciendo covarianzas entre los errores de predicción). Los efectos no analizados aparecen cuando las variables observables están correlacionadas más allá de lo que el modelo predice (apareciendo covarianzas entre los errores de medición).

Como sea que una variable endógena puede recibir un efecto directo de otra variable y también un efecto indirecto de esa misma variable modulado por otras terceras variables, se acostumbra a sumar ambos tipos de efectos dando lugar al *efecto total*.

EL CONCEPTO DE "AJUSTE"

Para entender la fundamentación de los modelos de ecuaciones estructurales, es necesario reorientar nuestro conocimiento de lo que significa el concepto de *ajuste* de un modelo. En regresión lineal, cuando hablamos de las estimaciones de los parámetros, escogemos aquellas estimaciones que mejor ajustan el modelo a los datos, en el sentido de que minimizan los errores de predicción cometidos con el modelo para el conjunto de sujetos de la muestra (en el método de mínimos cuadrados). Por el contrario, en los modelos de ecuaciones estructurales, lo que se pretende ajustar son las covarianzas entre las variables, en vez de buscar el ajuste a los datos. En lugar de minimizar la diferencia entre los valores pronosticados y los observados a nivel individual, se minimiza la diferencia entre las covarianzas observadas en la muestra y las covarianzas pronosticadas por el modelo estructural. Este es el motivo por el que a estos modelos también se les llama de estructura de covarianza (*covariance structure models*; Long, 1983). Por tanto, los residuos del modelo son la diferencia entre las covarianzas observadas y las covarianzas reproducidas (pronosticadas) por el modelo estructural teórico.

El ajuste de un modelo se puede expresar en una hipótesis fundamental, que propone que, *si el modelo es correcto* y conociéramos los parámetros del modelo estructural, la matriz de covarianzas poblacional podría ser reproducida exactamente a partir de la combinación de los parámetros del modelo. Esta idea de ajuste se resume en la siguiente ecuación

$$H_0: \ \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}(\theta) \qquad (1)$$

donde Σ es la matriz de varianzas-covarianzas poblacional entre las variables observables, θ es un vector que contiene los parámetros del modelo y $\Sigma(\theta)$ es la matriz de varianzas-covarianzas derivada como una función de los parámetros contenidos en el vector θ.

Veamos el significado y extensión de esta hipótesis con un ejemplo (Bollen, 1989). Consideremos el modelo que muestra la Figura 13.

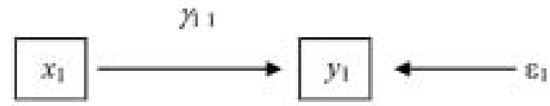


Figura 13: Modelo de regresión simple

La ecuación de regresión que lo define es la siguiente (se han eliminado los subíndices)

$$y = \gamma x + \varepsilon \qquad (2)$$

Donde γ es el coeficiente de regresión y ε la variable que representa el término error, que se asume que es independiente de x y cuyo valor esperado es cero. La matriz de varianzas-covarianzas entre las variables observadas x e y es

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathrm{VAR}(y) & \mathrm{COV}(x,y) \\ \mathrm{COV}(x,y) & \mathrm{VAR}(x) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Esta es la matriz que obtenemos directamente al analizar descriptivamente los datos y representa las relaciones existentes entre las variables en la muestra. Ahora bien, la variable dependiente y es función de las variables x y ε, y del parámetro γ. Podemos volver a escribir los elementos de la matriz Σ en función de la ecuación (2). Operando, es relativamente fácil demostrar que la varianza de la variable dependiente es función del parámetro γ y de la varianza de los errores:

$$\mathrm{VAR}(y) = \gamma^2 \ \mathrm{VAR}(x) + \ \mathrm{VAR}(\varepsilon) \qquad (4)$$

También es posible demostrar que la covarianza entre x e y es función del parámetro γ y de la varianza de la variable predictora:

$$\mathrm{COV}(x,y) = \ \gamma \ \mathrm{VAR}(x) \qquad (5)$$

Sustituyendo en la ecuación (3) las expresiones derivadas escritas en función de los parámetros del modelo llegamos a la matriz de varianzas- covarianzas poblacional reproducida:

$$\mathbf{\Sigma}(\theta) = \begin{pmatrix} \gamma^2 \mathrm{VAR}(x) + \mathrm{VAR}(\varepsilon) & \gamma \mathrm{VAR}(x) \\ \gamma \mathrm{VAR}(x) & \mathrm{VAR}(x) \end{pmatrix} \qquad (6)$$

A esta matriz también se le llama matriz de varianzas-covarianzas *implícita*. Podemos sustituir ahora en la ecuación (1) y volver a expresar la hipótesis básica com∂

$$H_0: \ \Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{VAR}(y) & \mathrm{COV}(x,y) \\ \mathrm{COV}(x,y) & \mathrm{VAR}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2\mathrm{VAR}(x)+\mathrm{VAR}(\varepsilon) & \gamma\mathrm{VAR}(x) \\ \gamma\mathrm{VAR}(x) & \mathrm{VAR}(x) \end{pmatrix} = \Sigma(\theta) \qquad (7)$$

En esta igualdad, los elementos de la parte derecha y los de la parte izquierda se corresponden uno a uno, dadas las especificaciones del modelo que hemos propuesto. Si el modelo es el correcto y conociéramos los valores de los parámetros de la parte derecha de la igualdad, no sería difícil comprobar la igualdad de los términos. El objetivo de la estimación es obtener los valores de los parámetros (en este caso el coeficiente de regresión y la varianza de los errores) que permiten mantener esta igualdad con los datos muestrales.

Para poder estimar los parámetros del modelo ha sido necesario esperar al desarrollo de programas informáticos. En esta breve aproximación a los modelos de ecuaciones estructurales basta con saber que las estimaciones se realizan intentando maximizar el ajuste del modelo. Para ello se utiliza alguna medida que resuma la magnitud de las diferencias entre las varianzas y covarianzas observadas (parte izquierda de la igualdad) y las reproducidas (parte derecha de la igualdad), y se intenta minimizar dichas diferencias.

LOS ESTADÍSTICOS DE BONDAD DE AJUSTE

Una vez que se ha estimado un modelo es necesario evaluar su calidad. Para ello se utilizan los estadísticos de bondad de ajuste. Existen tres tipos de estadísticos de bondad de ajuste: los de ajuste absoluto (valoran los residuos), los de ajuste relativo (comparan el ajuste respecto a otro modelo de peor ajuste) y los de ajuste parsimonioso (valoran el ajuste respecto al número de parámetros utilizado). Ninguno de ellos aporta toda la información necesaria para valorar el modelo y habitualmente se utiliza un conjunto de ellos del que se informa simultáneamente (ver Schreiber y otros, 2006).

En la siguiente tabla se enumeran los más utilizados, junto con su abreviatura y el valor de referencia que debe alcanzar cada uno para indicar un buen ajuste. El estadístico chi-cuadrado es conceptualmente el más atractivo; permite contrastar la hipótesis nula de que todos los errores del modelo son nulos, por lo que interesa mantener dicha hipótesis con la muestra utilizada. Sin embargo, es muy sensible al tamaño muestral: con muestras grandes (mayores de 100 ó 200 casos) es relativamente fácil rechazar la hipótesis nula cuando el modelo de hecho consigue un buen ajuste. Por este motivo, además de valorar su significación estadística, suele compararse con sus grados de libertad. Siempre se informa de este estadístico.

PROBLEMAS TÍPICOS

Es necesario mencionar varios problemas típicos que se suelen encontrar en los modelos publicados, algunas limitaciones que debemos tener en cuenta y las precauciones que debemos tomar al utilizarlos.

En la definición de un modelo no deben excluirse variables importantes desde el punto de vista teórico. En primer lugar, debe hacerse un esfuerzo por medir todas las variables pertinentes. En segundo lugar, deben cuestionarse los modelos en los que las variables conceptualmente centrales carezcan de efecto significativo.

El hecho de que un modelo obtenga buen ajuste con una muestra no excluye que puedan existir otros modelos tentativos que también puedan ajustarse bien a los datos. Siempre es interesante contrastar otros modelos que también puedan estar soportados por la teoría (o por teorías rivales).

En ocasiones se publican los modelos conteniendo tanto los efectos correspondientes a parámetros distintos de cero como efectos que tras la estimación se pueden considerar nulos. Aunque el espacio requerido para dar explicaciones sea mayor, debe informarse tanto del modelo teórico con todos los parámetros y variables propuestas como del modelo final que sólo contenga los parámetros distintos de cero y las variables con efecto estadístico.

TABLA 1
ESTADÍSTICOS DE BONDAD DE AJUSTE Y CRITERIOS DE REFERENCIA

Estadístico	Abreviatura	Criterio
Ajuste absoluto		
Chi-cuadrado	χ^2	Significación > 0,05
Razón Chi-cuadrado / grados de libertad	χ^2/gl	Menor que 3
Ajuste comparativo		
Índice de bondad de ajuste comparativo	CFI	≥ 0,95
Índice de Tucker-Lewis	TLI	≥ 0,95
Índice de ajuste normalizado	NFI	≥ 0,95
Ajuste parsimonioso	NFI	
Corregido por parsimonia	PNFI	Próximo a 1
Otros		
Índice de bondad de ajuste	GFI	≥ 0,95
Índice de bondad de ajuste corregido	AGFI	≥ 0,95
Raíz del residuo cuadrático promedio	RMR	Próximo a cero
Raíz del residuo cuadrático promedio de aproximación	RMSEA	< 0,08

Es sabido que los estadísticos de bondad de ajuste se deterioran rápidamente con el aumento del tamaño muestral y muchos investigadores informan de muestras pequeñas para no deteriorar los valores de ajuste. Por este motivo deben cuestionarse los modelos estimados con muestras pequeñas o poco representativas. Se acostumbra a exigir tamaños muestrales superiores a los 100 sujetos y los tamaños superiores a los 200 sujetos son una buena garantía.

Estos modelos admiten pocas variables (10-20). Cuanto mayor es el número de variables, más difícil resulta reproducir correctamente las covarianzas observadas. Además, cuanto mayor sea el número de variables mayor debe ser también el tamaño muestral (se recomienda una tasa superior a los 10 sujetos por variable observada).

Muchos estudios en los que se utilizan estos modelos abusan del ajuste y reajuste de las posibles relaciones teóricas, incluyendo y excluyendo efectos y variables de manera tentativa. Para ello se utilizan los valores de significación y los índices de modificación de los parámetros individuales (tanto los de los efectos analizados como los de los efectos excluidos) y que informan de los problemas de ajuste existentes en los datos. Estos modelos sobre-manipulados suelen ser muy inestables y pierden sus buenas propiedades de ajuste cuando se replican con otras muestras. Por desgracia, los estudios de replicación son escasos, por lo que es recomendable mantener un cierto escepticismo cuando en un estudio no se informe detalladamente de las manipulaciones que hayan podido sufrir los datos y el modelo.

No se deben utilizar variables categóricas ya que, idealmente, todas las variables deberían ser cuantitativas continuas para justificar el uso de los estadísticos varianza y covarianza. Como hemos visto, es fundamental que la estimación muestral de las varianzas y covarianzas entre las variables observadas sea precisa para que el proceso de estimación de los parámetros del modelo sea exitoso. Sin embargo, es muy frecuente que utilicemos preguntas en formato ordinal tipo Likert para medir a los sujetos, por la facilidad que supone responder en ellas. En esos casos será conveniente agrupar las preguntas individuales para formar escalas con una métrica más continua (ver Finney y DiStefano, 2006).

CONSIDERACIONES FINALES

A pesar de las limitaciones mencionadas, los modelos de ecuaciones estructurales son una herramienta muy potente para formalizar de manera explícita teorías relativamente complejas, permite contrastarlas y posibilita incluir relaciones complejas o jerárquicas entre múltiples variables.

También permiten extender algunos modelos tradicionales al incluir, por ejemplo, errores de medición en los modelos de análisis factorial, o al estimar directamente las saturaciones y las correlaciones entre los factores (sin recurrir a la rotación) o al incluir pruebas de significación individuales para las saturaciones estimadas.

Además, en ellos se pueden separar los errores de medida de los errores de predicción, atenuando el efecto de los errores de medición sobre la valoración de la capacidad predictiva del modelo.

Estos modelos, junto con los modelos de regresión canónica, son los únicos que permiten analizar problemas en los que se dispone de más de una variable dependiente y analizarlas de forma simultánea.

Aunque la estimación de estos modelos se ha simplificado mucho con los programas de estimación que cuentan con un interfaz gráfico es importante tener en cuenta que su uso es laborioso. Si bien es cierto que son una ayuda inestimable para afrontar el reto del desarrollo de teorías explicativas del comportamiento humano.

RECURSOS ADICIONALES

Aquellos que quieran profundizar más en estos modelos manteniéndose a un nivel básico pueden consultar los manuales de Byrne (1994, 1998, 2001, 2006) y los que quieran una introducción aún más elemental pueden consultar el libro de Saris y Stronkhorst (1984) y las breves monografías de Long (1983a, 1983b, 1990). Una buena exposición de cómo desarrollar e interpretar estos modelos son los tres capítulos finales del manual de Hair y otros (2006), es muy práctico, aunque apenas contiene formulación y carece de demostraciones. El manual de Bollen (1989) es excelente y muy completo, pero requiere un buen nivel de conocimientos previos en estadística.

También son muy recomendables los manuales de los programas de estimación más utilizados: el AMOS (Arbuckle, 1997), el LISREL (Jöreskog y Sörborn, 1986; SPSS, 1990, 1993), el EQS (Bentler, 1985) y el CALIS, perteneciente a SAS (Hatcher, 2003).

Se encuentran disponibles dos programas de estimación de modelos de uso gratuito HYBALL (http://web.psych.ualberta.ca/~rozeboom/) y TETRAD (http://www.phil.cmu.edu/projects/tetrad/).

REFERENCIAS

Arbuckle, J. L. (1997). *Amos Users' Guide. Version 3.6*. Chicago: SmallWaters Corporation.

Bagozzi, R. O. y Yi, Y. (1994). Advanced Topics in Structural Equation Models. In: R. P. Bagozzi (Ed.). *Advanced Methods of Marketing Research*. Cambridge: Blackell Publishers.

Bentler, P. M. (1985). *Theory and implementation of EQS: A structural equations program*. Los Angeles: BMDP Statistical Software.

Bollen, K. A. (1989). *Structural Equations with Latent Variables*. New York: John Wiley & sons.

Bollen, K. A., Curran, P. J. (2006). *Latent Curve Models. A Structural Equation Perspective*. Wiley.

Boudon, R. (1965). A method of linear causal analysis: Dependence analysis. *American Sociological Review*, 30: 365-373.

Byrne, B. M. (1994). *Structural Equation Modeling with EQS and EQS/WINDOWS: Basic Concepts, Applications, and Programming.* SAGE Publications.

Byrne, B. M. (2001). *Structural Equation Modeling with AMOS. Basic Concepts, Applications, and Programming*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Byrne, B. M. (2006). *Structural Equation Modeling With Eqs: Basic Concepts, Applications, and Programming (Multivariate Applications)*. SAGE Publications.

Byrne, B. M. (1998). Structural Equation Modeling with LISREL, PRELIS, and SIMPLIS: Basic Concepts, Applications, and Programming. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Duncan, O. D. (1966) Path analysis: Sociological examples. *American Journal of Sociology*, 72: 1-12.

Ferrando, P.J. y Anguiano, C. (2010). El análisis factorial como técnica de investigación en Psicología. *Papeles del Psicólogo*, 31(1), 18-33.

Finney, A.J. y DiStefano C. (2006). Non-Normal and Categorical Data in Structural Equation Modeling. In: G. R. Hancock y R. O. Mueller (Eds). Structural Equation Modeling: A Second Course, 269-314. Greenwich: Information Age Publishing

González, M.T. y Landero, R. (2008). Confirmación de un modelo explicativo del estrés y de los síntomas psicosomáticos mediante ecuaciones estructurales. *Revista Panamericana de Salud Pública, 23* (1), 7-18.

Hayduk, L. (1987). *Structural equation modeling with LISREL Essentials and Advances.* Baltimore: The Johns Hopkins University Press.

Hair, J. E., Black, W. C., Babin, B. J., Anderson, R. E. y Tatham R. L. (2006). *Multivariate Data Analysis* (6th Edition). Upper Saddle River: Pearson-Prentice Hall

Hatcher, L. (2003). A Step-by-Step Approach to using SAS for Factor Analysis and Structural Equation Modeling. Cary: SAS Institute Inc.

Jöreskog, K. G. (1973) A general method for estimating a linear structural equation system, pp. 85-112 in A. S. Goldberger and O. D. Duncan (eds.) Structural Equation Models in the Social Sciences. New York: Seminar.

Jöreskog, K. G. y Sörbom, D. (1986). *LISREL VI: Analysis of Linear Structural Relationships by Maximum Likelihood and Least Squares Methods*. Mooresville, IN: Scientific Software, Inc.

Long, J. S. (1983a). *Confirmatory Factor Analysis: A Preface to LISREL*. Sage University Paper Series on Quantitative Applications in the Social Sciences, 007-033. Newbury Park, CA: Sage.

Long, J. S. (1983b) *Covariance Structure Models: An introduction to LISREL.* Sage University Paper series on Quantitative Applications in the Social Sciences, 07-034. Beverly Hills and London: Sage.

Long, J. S. (1990). *Covariance Structure Models: An Introduction to LISREL*. Sage University Paper Series on Quantitative Applications in the Social Sciences, 007-034. Newbury Park, CA: Sage.

Pardo A., Ruiz, M.A. y San Martín, R. (2009). *Análisis de datos en ciencias sociales y de la salud* (volumen I). Madrid: Síntesis.

Preacher, K. J., Rucker, D. D., y Hayes, A. F. (2007). Assessing moderated mediation hypotheses: Theory, methods, and prescriptions. *Multivariate Behavioral Research, 42*, 185-227

Ruiz, M.A. (2000). *Introducción a los modelos de ecuaciones estructurales*. Madrid, UNED.

Saris, W. E. y Stronkhorst, L. H. (1984). *Causal Modelling in Non-Experimental Research*. Amsterdam: Sociometric Research.

Schreider, J.B., Stage, F.K., King, J., Nora, A., Barlow, E.A. (2006). Reporting structural equation modeling and confirmatory factor analysis results: a review. *The Journal of Education Research, 99* (6), 323-337.

Skrondal, A., Rabe-Hesketh, S. (2004). *Generalized Latent Variable Modeling. Multilevel, Longitudinal, and Structural Equation Models*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.

SPSS (1990). *SPSS® LISREL® 7 and PRELIS®: User's Guide and Reference*. Chicago, IL: SPSS.

SPSS (1993). *SPSS® LISREL® 7 and PRELIS®: User's Guide and Reference*. Chicago, IL: SPSS.