UNA FORMA DE SIMPLIFICAR POTENCIAS TRIGONOMÉTRICAS

A Trigonometric Power Simplification Method

RESUMEN
Este artículo presenta un procedimiento bastante novedoso para reducir potencias trigonométricas en términos de polinomios de grado simple con componentes armónicas. El resultado fue obtenido mediante la manipulación de las transformaciones de Fourier de las funciones *Seno* y *Coseno* junto con el empleo de álgebra convolutiva.

PALABRAS CLAVES: Convolución, Transformada de Fourier, Funciones Trigonométricas.

ABSTRACT
This paper shows a novel procedure for reducing Trigonometric Power Functions into lineal polynomial representation with harmonics. The results are obtained through manipulations of Cosinuidal Fourier Transform and using Convolution Algebra.

KEYWORDS: *Convolution, Fourier Transformation, Trigonometric Functions*
.

AUGUSTO CANO JARAMILLO*
Ingeniero Electricista
Profesor Titular
Universidad Tecnológica de Pereira
aucanos@utp.edu.co
* Q. E. P. D.

ALEXANDER MOLINA C.
Ingeniero Electricista
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
almo@utp.edu.co
Campos Electromagneticos Y Fenómenos Asociados

1. INTRODUCCIÓN

Dentro del grupo de investigación Campos Electromagnéticos y Fenómenos Asociados se ha abordado la temática de la propagación de señales electromagnéticas en presencia de medios. Dentro de las señales de interés se encuentran aquellas variantes en el tiempo que permiten la existencia de la transmisión de radio, telecomunicaciones entre otras aplicaciones [1, 2].

Las señales de campo electromagnético generalmente se pueden analizar en el espectro de frecuencia con mayor facilidad toda vez que en el tiempo presentan variadas irregularidades y componentes armónicas [3].

Dentro del grupo de investigación, para el tratamiento de estas señales en el espectro de frecuencia se ha estado usando la transformada de Fourier con excelentes resultados. Lo anterior porque permite realizar cálculos que consideran cada componente armónica además de permitir centrar el análisis en el comportamiento de las magnitudes de cada componente armónica por separado y luego los resultados se pueden unir mediante el teorema de superposición [4].

Dentro del análisis efectuado, se ha logrado conseguir un procedimiento interesante que permite expresar las señales de muestreo (potencias sinusoidales de orden elevado) como la suma de varias señales sinusoidales simples en diferentes componentes armónicas [5].

La ventaja de esta representación radica en que no es necesario descomponer en sucesiones infinitas, tal como la serie de Fourier lo hace, sino que se emplea un corto procedimiento algebraico posible gracias a la transformación de Fourier. Las aplicaciones van desde la descomposición de señales sinusoidales de orden elevado para el uso en matemáticas (integrales), pasando por el diseño de filtros, hasta el análisis de componentes armónicas en modulación y demodulación [5,6,7].

Para ilustrar el procedimiento y dar sustento matemático a lo planteado aquí se presenta en la sección 1 una breve descripción de la Transformada de Fourier con una de sus propiedades. En la sección 2 se presenta la convolución con algunas de sus características y en la sección 3 se muestran las funciones trigonométricas mencionadas junto con su transformación en el dominio de la frecuencia así como los pasos para lograr la representación de las potencias de orden superior en términos de los de orden lineal.

Adicionalmente se presentan algunas conclusiones del procedimiento hallado.

2. TRANSFORMADA DE FOURIER

2.1 Generalidades

Las señales con las que se interactúa permanentemente son señales que existen en el dominio del tiempo, dada su característica real. Algunas de estas señales pueden ser representadas en otros espacios matemáticos de manera que permiten efectuar un análisis mas sencillo que en el dominio del tiempo.

Fecha de Recepción: 26 de enero de 2009
Fecha de Aceptación: 12 de abril de 2009.

Uno de los espacios donde es posible estudiar las señales de tipo periódico es en el dominio de la frecuencia. Las transformaciones deben cumplir con algunas propiedades básicas que permitan el estudio determinístico de los problemas, además de permitir extraer resultados en la frecuencia que se cumplan en el dominio del tiempo.

Una herramienta que permite tal transformación de señales es la Transformada de Fourier. De esta manera se logran representaciones en la frecuencia de algunas funciones así como la posibilidad de una transformación inversa que permita transformar de nuevo al dominio del tiempo. Esta posibilidad de la transformación inversa es bastante útil y necesaria en el desarrollo que se plantea en la sección 4.

Se presenta a manera de ambientación la Transformada de Fourier y la Transformada Inversa de Fourier en las ecuaciones (1) y (2).

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{jwt}dt \qquad (1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{jwt}dw \qquad (2)$$

Ahora, una relación de correspondencia se puede establecer entre las dos funciones mediante la representación en (3).

$$f(t) \longleftrightarrow F(w) \qquad (3)$$

La simetría en las ecuaciones muestra una latente simetría en las transformaciones pero la única propiedad necesaria será la de la linealidad de la transformación que se ilustrará a continuación en la sección 2.2.

2.2 Linealidad de la Transformada de Fourier.

Considerando las funciones $f_1(t)$, $f_2(t)$ junto con sus transformadas continuas de Fourier mostradas en (4) y la existencia de valores reales k_1 *y* k_2, se puede obtener como resultado lo mostrado en (5) [3].

$$\begin{aligned} f_1(t) &\longleftrightarrow \mathbf{F}_1(w) \\ f_2(t) &\longleftrightarrow \mathbf{F}_2(w) \end{aligned} \qquad (4)$$

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) \longleftrightarrow k_1 F_1(w) + k_2 F_2(w) \qquad (5)$$

Aunque otras propiedades se pudieran plantear, para el desarrollo del artículo se dan por hecho y el lector está invitado a consultarlas [3].

3. CONVOLUCIÓN

El teorema de la convolución corresponde a una especie de función de energía que permite obtener resultados importantes en el análisis de armónicos. Se presentará el teorema y se mencionarán las propiedades útiles en el desarrollo de lo que aquí se denominará álgebra convolutiva. Se ilustrará la convolución en el dominio de la frecuencia.

3.1 Representación

Supóngase una relación entre funciones tal como se ilustra en (6).

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(w-u)du \qquad (6)$$

La integral así planteada es denominada la integral de convolución y se expresa simbólicamente tal como se ilustra en la ecuación (7) [7].

$$F(w) = F_1(w) * F_2(w) \qquad (7)$$

Se puede plantear la existencia de funciones en el tiempo, para las funciones en la ecuación (6), tal como se presenta en la ecuación (4).

La representación, en el tiempo, de la convolución mostrada en (7), es fácilmente verificable y corresponde a lo planteado en la ecuación (8) [7].

$$f_1(t)f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}F(w) = \frac{1}{2\pi}F_1(w) * F_2(w) \qquad (8)$$

3.2 Consideraciones adicionales

Es demostrable que la convolución cumple con las leyes siguientes [3, 7]:

- Ley Conmutativa.
- Ley distributiva.
- Ley Asociativa.

3.2 Algebra Convolutiva

Es necesario presentar algunas relaciones iniciales que se explican en [6, 7].

La primera de ellas se muestra en la ecuación (9) y se conoce como el módulo convolutivo. Sucesivamente se presentan otras [3].

$$F(w) * \delta(w) = F(w) \qquad (9)$$

Una segunda relación entre funciones en convolución se puede establecer tomando como base lo planteado hasta el momento. Esta nueva relación considera (3) obtiene (10).

$$\begin{aligned} f(t) * f(t) &\longleftrightarrow F(w)F(w) \\ f^{2*}(t) &\longleftrightarrow F^2(w) \end{aligned} \qquad (10)$$

En forma dual, en la frecuencia se obtiene:

$$\begin{aligned} f(t)f(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\left[F(w) * F(w)\right] \\ f^2(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\left[F^{2*}(w)\right] \end{aligned} \qquad (11)$$

El resultado de (11) se puede generalizar para una expresión de potencia *n,* en el tiempo obteniéndose una representación así:

$$f^n(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\left[F^{n*}(w)\right] \qquad (12)$$

Lo anterior se puede leer como "*F(w)* a la *n* convolutiva" permitiendo introducir el concepto de las potencias en la convolución.

Un tercer elemento se obtiene empleando la ley distributiva para un binomio. Los resultados se muestran en (13) y (14).

$$\left(F_1(w)+F_2(w)\right)^{2*} = \left(F_1(w)+F_2(w)\right) * \left(F_1(w)+F_2(w)\right) \quad (13)$$

$$\left(F_1(w)+F_2(w)\right)^{2*} = F_1^{2*}(w) + 2F_1(w) * F_2(w) + F_2^{2*}(w) \quad (14)$$

y para grado *n*, es posible obtener una expansión polinomial mediante el empleo del binomio de Newton [9].

$$\begin{aligned} &\left(F_1(w) \pm F_2(w)\right)^{n*} = \\ &C(n,0)F_1^{n*}(w) \pm C(n,1)F_1^{n-1*}(w) * F_2(w) \\ &+C(n,2)F_1^{n-2*}(w) * F_2^{2*}(w) \pm \ldots \pm C(n,n)F_2^{n*}(w) \end{aligned} \qquad (15)$$

Donde C(a,b), es el combinatorio $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Tales coeficientes son los formados por el triangulo de Pascal, también denominado triángulo de Tartaglia. Lo anterior es una simple implementación del Binomio de Newton al caso de un binomio convolutivo.

Una tercera y última relación se obtiene con base en lo descrito brevemente en [3]. Aquí se menciona que:

$$F(w) * \delta(w-w_0) = F(w-w_0) \qquad (12)$$

Aplicando lo anterior, al interior del grupo de investigación se propone una forma de expresar la potencia convolutiva de la delta de Dirac a través del uso recursivo de lo obtenido en (12) así:

$$\begin{aligned} \delta(w-w_0) * \delta(w-w_0) &= \delta(w-2w_0) \\ \delta^{2*}(w-w_0) &= \delta(w-2w_0) \end{aligned} \qquad (12)$$

Por otro lado, dentro de los desarrollos matemáticos efectuados se logra plantear una generalización para lo expresado en (12) que se muestra en la ecuación (13).

$$\delta^{n*}(w-w_0) = \delta(w-nw_0) \qquad (13)$$

Este es el resultado mas importante que se forma con todo lo anterior discutido, toda vez que abre las posibilidades de expresar una potencia en términos del desplazamiento en la frecuencia, lo que implica la aparición en el dominio del tiempo de componentes de tipo armónico.

Una extensión del resultado encontrado en (13) se muestra en las expresiones (14) y (15). Estas expresiones se presentan pues para el desarrollo de los binomios que resultan de las expresiones sinusoidales tienen alto valor.

$$\begin{aligned} \delta^{n*}(w-w_0) * \delta^{m*}(w-w_0) &= \delta(w-nw_0) * \delta(w-mw_0) \\ \delta^{n*}(w-w_0) * \delta^{m*}(w-w_0) &= \delta(w-(n+m)w_0) \end{aligned} \qquad (14)$$

$$\delta^{n*}(w-w_0) * \delta^{m*}(w+w_0) = \delta(w-(n-m)w_0) \qquad (15)$$

Lo anterior es el resultado más importante realizado en cuanto a que permite, a través del álgebra convolutiva, efectuar una serie de simplificaciones a funciones que contienen delta de Dirac como componentes en el dominio de la frecuencia.

4. REDUCCIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALTO ORDEN

Ya en esta sección se presenta la manera en la que se reducen los términos de alto orden de señales sinusoidales a términos lineales armónicos. Por la simplicidad se presentará inicialmente el coseno.

$$f(t) = \cos(w_0 t) \qquad (16)$$

La representación en el dominio de la frecuencia se da como se ilustra en (17). La representación general se puede efectuar tanto por inducción de los ejemplos aquí mostrados, como por el análisis de las expresiones generales.

$$\cos(w_0 t) \longleftrightarrow \pi\left[\delta(w-w_0) + \delta(w+w_0)\right] \qquad (17)$$

Para expresión cuadrática

$$\cos^2(w_0 t) \longleftrightarrow \frac{\pi^2}{(2\pi)}\left[\delta(w-w_0) + \delta(w+w_0)\right]^{n*} \qquad (18)$$

Esta expresión se puede reescribir como sigue en (19).

$$\frac{\pi^2}{(2\pi)}\left[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)\right]^{2*} = \frac{\pi^2}{2\pi}\left[\delta^{2*}(w-w_0)+2\delta(w-w_0)*\delta(w+w_0)+\delta^{2*}(w+w_0)\right] \quad (18)$$

Al agrupar los términos conjugados se obtiene:

$$\frac{\pi^2}{(2\pi)}\left[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)\right]^{2*} = \frac{\pi}{2}\left[\delta(w-2w_0)+\delta(w+2w_0)\right]+\frac{\pi}{2}\left[2\delta(w)\right] \quad (19)$$

Aquí el término conjugado se refiere a términos de igual componente armónica o de frecuencia pero de signo contrario.

Teniendo en cuenta las propiedades mencionadas en la sección 3, los procedimientos aquí presentados quedan completamente válidos. Lo anterior muestra un resultado que ya se conoce por su uso regular:

$$\frac{1}{2}\cos(2w_0t)+\frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{\pi}{2}\left[\delta(w-2w_0)+\delta(w+2w_0)\right]+\frac{\pi}{2}\left[2\delta(w)\right] \quad (20)$$

Y finalmente

$$\cos^2(w_0t)=\frac{1}{2}\cos(2w_0t)+\frac{1}{2} \quad (21)$$

Para expresión cúbica:

$$\cos^3(w_0t) \longleftrightarrow \frac{\pi^3}{(2\pi)^2}\left[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)\right]^{3*} \quad (22)$$

Esta expresión se puede reescribir como sigue en (23).

$$\frac{\pi^3}{(2\pi)^2}\left[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)\right]^{3*} = \frac{\pi}{4}\left[\delta^{3*}(w-w_0)+3\delta^{2*}(w-w_0)*\delta(w+w_0)\right. \\ \left. 3\delta(w-w_0)*\delta^{2*}(w+w_0)+\delta^{3*}(w+w_0)\right] \quad (23)$$

Al agrupar los términos “conjugados” se obtiene:

$$\frac{\pi}{4}\left[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)\right]^{3*} = \frac{\pi}{4}\left[\delta(w-3w_0)+\delta(w+3w_0)\right]+\frac{\pi}{4}\left[3\delta(w-w_0)+3\delta(w+w_0)\right] \quad (24)$$

Un resultado menos empleado es el siguiente:

$$\frac{1}{4}\cos(3w_0t)+\frac{3}{4}\cos(w_0t) \leftrightarrow \frac{\pi}{4}\left[\delta(w-3w_0)+\delta(w+3w_0)\right] +\frac{\pi}{4}\left[3\delta(w-w_0)+3\delta(w+w_0)\right] \quad (25)$$

Para entregar como resultado:

$$\cos^3(w_0t)=\frac{1}{4}\cos(3w_0t)+\frac{3}{4}\cos(w_0t) \quad (26)$$

A manera de generalización:

Al analizar detenidamente los resultados se puede verificar que las potencias trigonométricas se pueden convertir fácilmente en la suma de elementos de grado simple con un único cambio en el argumento de las funciones.

Al revisar las expresiones en el dominio de la frecuencia se puede notar que la composición del polinomio convolutivo se puede obtener a partir del uso del triángulo de Pascal. Ahora, cuando se tiene que conseguir la reducción al dominio del tiempo, la mitad de estos elementos desaparecen por cuanto la simetría del triangulo permite agrupar términos semejantes en magnitudes y en su componente armónica.

Basado en lo anterior se propone un nuevo triángulo para la construcción de estas reducciones. Se parte del triángulo tradicional, se eliminan los términos simétricos y cuando en el eje central se encuentre un valor, éste se dividirá por dos.

Para determinar el valor del armónico, simplemente se van empleando de izquierda a derecha los exponentes así:

El primer armónico corresponde al valor del exponente de la potencia cosenoidal, luego se va restando 2 a cada exponente siempre y cuando este valor sea positivo. Es necesario tener en cuenta el divisor de estas cantidades que siempre será (2^{n-1}).

Se ilustra el triangulo original así como el modificado.

$$\begin{array}{l} 0 \rightarrow \quad\quad\quad\quad\quad 1 \\ 1 \rightarrow \quad\quad\quad\quad 1 \quad 1 \\ 2 \rightarrow \quad\quad\quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ 3 \rightarrow \quad\quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 4 \rightarrow \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 5 \rightarrow 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array} \quad (27)$$

El triangulo de Pascal modificado que se denominará el Triángulo de Cano Trigonométrico, en memoria del profesor de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica de Pereira, se presenta en 27.

$$\begin{array}{l} 0 \rightarrow \quad\quad\quad\quad 1 \\ 1 \rightarrow \quad\quad\quad 1 \\ 2 \rightarrow \quad\quad 1 \quad 1 \\ 3 \rightarrow \quad 1 \quad 3 \\ 4 \rightarrow \quad 1 \quad 4 \quad 3 \\ 5 \rightarrow 1 \quad 5 \quad 10 \end{array} \quad (27)$$

Basado en Triángulo de Cano, se afirma categóricamente que la potencia de 4 tendrá 3 elementos lineales. Igual cantidad de elementos tendrá la potencia de 5.

Se efectuará el cálculo de los valores para la potencia 5 del coseno y se ilustran los resultados en 28. El lector es invitado a corroborar los resultados aquí planteados.

Potencia de 5	**Coeficiente**	**Armónico**
Primer término	1	$5w_0$
Segundo término	5	$(5\text{-}2)w_0 = 3w_0$
Tercer término	10	$(3\text{-}2)\ w_0 = w_0$

$$\cos^5(w_0 t) = \frac{1}{16}\cos(5w_0 t) + \frac{5}{16}\cos(3w_0 t) + \frac{5}{8}\cos(w_0 t) \quad (28)$$

Los resultados se pueden generalizar para cualquier argumento de la función coseno.

4. CONCLUSIONES Y OBSERVACIONES

Se ha mostrado una manera de efectuar reducciones de potencias cosenoidales cuyos resultados se pueden extender a potencias sinusoidales.

La representación ha mostrado ser sencilla e intuitivamente fácil de implementar.

Las transformaciones en el dominio de la frecuencia aún hoy día permiten obtener resultados y procedimientos que evitan tomar caminos largos en el desarrollo matemático y análisis cualitativo.

Se propone al lector obtener expresiones más elegantes para la simplificación de las funciones.

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] Molina A., Correa V, "Método Iterativo Para El Cálculo de Potenciales Electrostáticos". Scientia Et Técnica Nº 32. Pereira-Risaralda.

[2] Molina *Et all*. "Método de Elementos Finitos en Dos Dimensiones Para Estudio de Propagación de Potenciales Electrostáticos" Scientia Et técnica Nº 39. Pereira Risaralda.

[3] LATHI, B. P. Introducción a la Teoría y Sistemas de Comunicación, Primera Edición en Español, Noriega Editores, México D.F., 2002.

[4] Valencia J,. "Métodos Híbridos para el Estudio de la Propagación de Campos Electromagnéticos". Thesis de Grado UTP. Pereira-Risaralda.

[5] Van Valkenburg M. E.., "Análisis de Redes". Ed. Limusa. México 1983.

[6] Zwiluncer D., "Standard Mathematical Tables And Formula". Ed CRC. New York 2003.

[7] Papoulis, A., "The Fourier Integral and Its Applications". McGraw-Hill. New York. 1962.

[8] Simmons, F. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas. McGRAW-HILL. México D.F. 1977.

[9] Britton, J "Matemáticas Universitarias". Editorial CECSA. México D.F. 1970.