



Scientia Et Technica

ISSN: 0122-1701

scientia@utp.edu.co

Universidad Tecnológica de Pereira

Colombia

ESCOBAR CALLEJAS, CARLOS MARIO; GONZALEZ GRANADA, JOSÉ RODRIGO  
CONSTRUCCION DE MODELOS DE COMPETENCIA NO-SUAVES QUE EXHIBEN LA  
BIFURCACIÓN ZIP.

Scientia Et Technica, vol. XVII, núm. 46, diciembre, 2010, pp. 148-152

Universidad Tecnológica de Pereira

Pereira, Colombia

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=84920977038>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

## CONSTRUCCION DE MODELOS DE COMPETENCIA NO-SUAVES QUE EXHIBEN LA BIFURCACIÓN ZIP.

### Construction of nonsmooth models of competition that exhibit zip bifurcation

#### RESUMEN

En el presente artículo de investigación se exhibe un modelo del tipo predador presa generado a partir de un campo tridimensional no lineal y no diferenciable que presenta el fenómeno de la bifurcación de zip, el cual modela la competición de dos especies predatoras por una presa singular que se regenera. Esta construcción es interesante ya que sugiere que el fenómeno de bifurcación de zip no sólo se presenta en sistemas suaves sino que también se puede extender a sistemas generados por campos no diferenciables.

**PALABRAS CLAVES:** Respuesta funcional, sistema no suave, bifurcación de zip

#### ABSTRACT

*The present work exhibits a model of predator-prey type generated from a non-linear and non-differentiable three-dimensional field that present the phenomenon of the zip bifurcation, which model the competition of two species of predators by a singular prey that regenerates. This construction is interesting because it suggests the nonsingle phenomenon of the zip bifurcation that appears in smooth systems but that also because it can be extended to generated systems by non-differentiable fields.*

**KEYWORDS:** Functional response, nonsmooth system, zip of bifurcation

CARLOS MARIO ESCOBAR  
CALLEJAS

Profesor Asistente, Magíster en  
Matemáticas  
Ingeniero Civil  
Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias Básicas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
ccescobar@utp.edu.co

JOSÉ RODRIGO GONZALEZ  
GRANADA

Profesor Asistente, Ph.D  
Matemático  
Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias Básicas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
jorodryy@utp.edu.co

#### 1. Introducción

Farkas [1985] ha introducido el concepto de bifurcación zip en un sistema suave (campo diferenciable) EDO tres-dimensional del tipo predador-presa con respuesta funcional generalizada tipo Holling II para denotar el siguiente fenómeno. "A bajos valores de la capacidad de carga  $k$  del ecosistema con respecto a la presa, una línea de equilibrio es un atractor del sistema, ella representa coexistencia estable de las tres especies. Si  $k$  es incrementado los equilibrios son continuamente desestabilizados, empezando por aquellos, que representan la dominancia del  $k$ -estratega sobre el  $r$ -

estratega. Arriba de cierto valor de  $k$ , el sistema no tiene más equilibrios estables que representen coexistencia; sin embargo, un ciclo límite permanece representando la oscilación de coexistencia del  $r$ -estratega y la presa". Recientemente Farkas, E. Saéz and Szantó [2005] han generalizado el fenómeno de zip a un sistema suave EDO cuatro dimensional con respuesta funcional generalizada tipo Holling III, Kiss [2007] ha generalizado la bifurcación zip en un sistema predador-presa  $(n+1)$ -dimensional con respuesta funcional tipo Ivle. También Ferreira [2007] ha tratado la ocurrencia de la bifurcación

zip en un sistema suave predador-presa (n+1)-dimensional con respuesta funcional tipo Holling II y en el [2009] ha mostrado la ocurrencia de la bifurcación zip en sistemas predador-presa que presentan reacción difusión. En los 10 últimos años el uso de sistemas dinámicos no suaves (dinámica híbrida y dinámica suave a tramos) se han incrementado en Ingeniería y Ciencia Aplicadas para el modelamiento de una variedad de sistemas físicos, biológicos y dispositivos tecnológicos caracterizados por eventos discontinuos. Modelos no suaves del tipo filippov (suave a tramos) pueden ser usados para imitar la evolución de explotación de poblaciones si la explotación es prohibida cuando la población está debajo de un umbral crítico [Dercole et al., 2003; Meza et al., 2005]. En el presente artículo de investigación se exhibe un modelo del tipo predador presa no-suave del tipo suave a tramos generado a partir de un campo tridimensional no lineal y no diferenciable que exhibe el fenómeno de la bifurcación de zip el cual modela la competición de dos especies predatoras por una presa singular que se regenera. Esta construcción es interesante ya que sugiere que el fenómeno de bifurcación de zip no sólo se presenta en sistemas suaves sino que también se puede extender a los sistemas no suaves generados por campos no diferenciables.

## 2. Modelo Original del tipo Exponencial algebraico suave a tramos

A continuación presentamos una generalización no suave del modelo tratado por varios autores [Butler 1983; Farkas, 1985] generada con un campo suave, bajo el

supuesto de que la resistencia ambiental de la presa y la respuesta funcional de los predadores es una función continua a tramos compuesta por la unión de dos respuestas funcionales las cuales satisfacen las condiciones denominadas de Butler-Farkas [Butler 1983; Farkas, 1985] en el espacio de estado del modelo además de ciertas condiciones de continuidad y de compatibilidad para garantizar la existencia de la bifurcación de zip no-suave.

En este modelo se nota el punto encima de la letra como diferenciación con respecto al tiempo.

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \gamma g(s, k) - \sum_{i=2}^n p(s, a_i) x_i \\ \dot{x}_i &= p(s, a_i) x_i - d_i x_i, \quad i = 1, 2.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Condiciones de continuidad de la función  $p$ :

$$p(s, a) = \begin{cases} p_1(s, a) & s \leq \lambda \\ p_2(s, a) = p_3(s, a) - p_3(\lambda, a) + p_1(\lambda, a) & s \geq \lambda \\ p(s, a_i) = d_i & i = 1, 2, \end{cases}\quad (2.2)$$

Condiciones de compatibilidad de la función  $p$

$$\begin{aligned}p_1(\lambda, a) &> p_2(\lambda, a) \\ \partial_a p_3(s, a) - \partial_a p_3(\lambda, a) + \partial_a p_1(\lambda, a) &< 0, \quad s \geq \lambda\end{aligned}\quad (2.3)$$

Resistencia ambiental de la presa  $g$  y respuesta funcional de la presa  $p$ :

$$\begin{aligned}g(s, k) &= \left(1 - \left(\frac{s}{k}\right)^m\right), \\ p_i(s, a_i) &= \left(\frac{As^n}{Ba_i^r + D} + \frac{cqs}{(a_i^{-v} + F)(qs + a_i)}\right), \\ \left(\begin{aligned}m &> 0, k > 0, s \geq 0, a_i > 0, A \geq 0, c \geq 0, \\ B &> 0, F \geq 0, v \leq 0, q \geq 0, 0 \leq n \leq 1\end{aligned}\right), & i = 1, 3.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Aquí  $s(t)$  representa la población de especie de la presa y  $x_1(t)$ ;  $x_2(t)$  describen las poblaciones de las especies predatoras que compiten por la presa;  $p(s, a_i)$ ;  $i = 1, 2$ ; representa la tasa de nacimiento o respuesta funcional  $i$  suave a tramos formada por la unión de las respuestas funcionales  $p_1(s, a)$  y

$p_3(s, a)$  las cuales satisfacen las condiciones denominadas de Butler-Farkas y la condición de continuidad (2.2); y  $g(s, k)$  es la resistencia ambiental del medio al crecimiento de la presa. Las constantes  $\gamma$ ;  $d_i > 0$ , son la tasa de crecimiento maximal de la presa y la tasa natural de muerte de la especie depredadora  $i$ ; respectivamente, y  $a_i > 0$ ; representan los parámetros de escala en la respuesta funcional del depredador  $i$ . En este modelo  $\lambda$  es el parámetro umbral que se introducen teniendo el siguiente significado:  $x_i$  se incrementa si y sólo si  $s > \lambda$ ; según sea  $x_i$  positivo, llegando a ser cero en  $s = \lambda$ . Se presume además que la tasa de desarrollo de la presa  $g$  y la respuesta funcional del depredador  $p$  son funciones arbitrarias que satisfacen ciertas condiciones naturales denominadas de Butler- Farkas:

La función  $g$  satisface las condiciones:  
 $g \in C^2((0, \infty) \times (0, \infty), R)$ ,  $g \in C^0([0, \infty) \times (0, \infty), R)$ ,

$$g(0, k) = 1 \quad g'_s(s, k) < 0 < g''_{sk}(s, k) \geq 0, k > 0, \quad (2.5)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma g(s, k) = \gamma, \quad s \geq 0. \quad (2.6)$$

A la función  $g$  se le impone condiciones de uniformidad en  $[\delta, s_0]$  para cualquier,  $0 < \delta < s_0$  y, la integral posiblemente impropia  $\int_0^{s_0} g'(s, k)$  debe ser uniformemente convergente en  $[k_0, \infty)$ , para cualquier valor  $k_0 > 0$ . Por último se tiene la condición siguiente sobre  $g$ :

$$(k - s)g(s, k) > 0, \quad s \geq 0, k > 0, s \neq k. \quad (2.7)$$

La función que representa la respuesta funcional del depredador  $i$ ,  $p(s, a_i)$  con  $a_i$  constante, ( $i = 1, \dots, n$ ) satisface las siguientes condiciones:

$$p \in C^1((0, \lambda) \times (0, \infty) \cup (\lambda, \infty) \times (0, \infty), \mathbb{R}), p \in C^0([0, \infty) \times (0, \infty), R),$$

$$p(0, a_i) = 0, \quad \partial_s p(s, a_i) > 0, \quad s > 0, s \neq \lambda, a_i > 0, \quad (2.8)$$

$$p_s(s, a) < \frac{p(s, a)}{s}, \quad s > 0, s \neq \lambda, a_i > 0, \quad (2.9)$$

$$p_a(s, a) < 0, \quad s > 0, s \neq \lambda, a_i > 0. \quad (2.10)$$

Las condiciones de (2.5) a (2.10) son condiciones apropiadas para el modelo no suave similares a las condiciones de Bulter-Farkas.

### 3. Modelo numérico no suave que presenta bifurcación zip

Nosotros presentamos las simulaciones en el caso don  $k$  se toma como parámetro de bifurcación. Se consideran los siguientes parámetros

$$\gamma = 1, \lambda = 9; d_1 = 2; d_2 = 8 \\ a_1 = 19.0185 : a_2 = 0.080704.$$

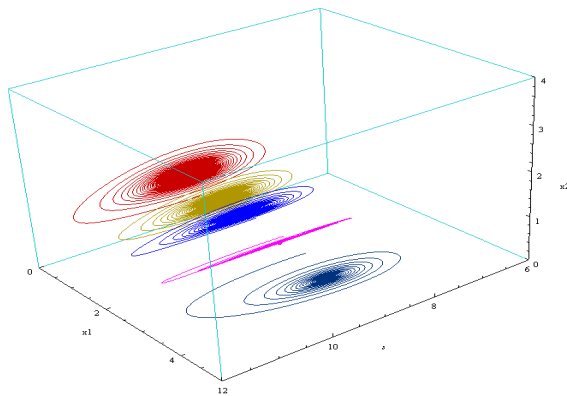
Resistencia ambiental de la presa  $g$  y respuesta funcional de la presa  $p$  adoptan la forma:

$$p(s, a) = \begin{cases} \frac{s}{1 + \sqrt{a}} + \frac{s}{s + a} & \text{si } s \leq \lambda \\ \frac{1.2044}{1 + \sqrt{a}} - \frac{6.3}{6.3 + a} + \frac{9}{9 + a} + \frac{.9s^{.982569}}{1 + \sqrt{a}} + \frac{7}{a + 7s} \end{cases}$$

$$g(s, k) = 1 - \frac{(-1 + e^s)s}{(-1 + e^k)k}$$

En la figura 2.1 se presenta un retrato de fase del sistema con parámetro bifurcación  $k=12.3835$  en éste las trayectorias del sistema con condiciones iniciales en el octante positivo siguen permaneciendo en éste y son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de

equilibrios Lk; por lo tanto el segmento Lk es a un atractor del sistema y su cuenca de atractividad es el octante positivo. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k-estratega, el r-estratega y la presa.

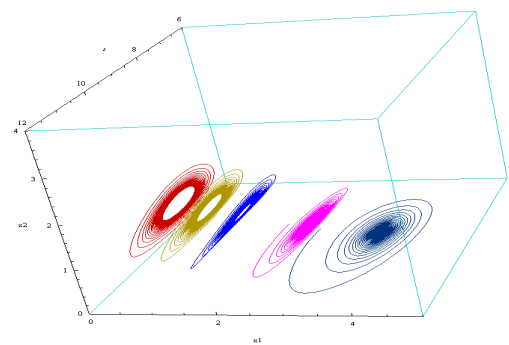


[Figura 2.1] Retrato de fase con parámetro bifurcación  $k=12.3835$

En la figura 2.2 se presenta un retrato de fase del sistema con parámetro bifurcación  $k=12.8$  en el cual se observa existe un punto  $(\lambda, \bar{\xi}_1(k), \bar{\xi}_2(k))$  en Lk tal que las trayectorias del sistema con condiciones iniciales suficientemente cercanas al segmento de equilibrios Lk con  $0 < \bar{\xi}_1(k) \leq \xi_1(k) \leq \frac{\mathcal{M}g(\lambda, k)}{p(s, a_1)}$  en el octante

positivo permanecen en éste y son acotadas y tienden asintóticamente hacia línea de equilibrios Lk; por lo tanto la parte del segmento Lk a la derecha del punto  $(\lambda, \bar{\xi}_1(k), \bar{\xi}_2(k))$  es a un atractor del sistema. Los equilibrios en este caso representan coexistencia estable entre el k-estratega, el r-estratega y la presa. Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales

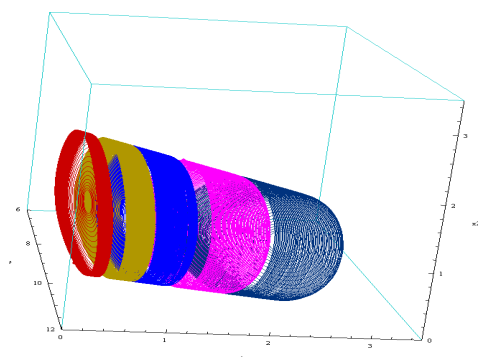
suficientemente cercanas al segmento de equilibrios Lk con  $0 \leq \xi_1(k) \leq \bar{\xi}_1(k)$  en el octante positivo se alejan del segmento de equilibrios Lk y tiende a formar un ciclo límite el cual es orbitalmente asintóticamente estable en desarrollo de una bifurcación del tipo Hopf no suave; por lo tanto la parte del segmento Lk a la izquierda del punto  $(\lambda, \bar{\xi}_1(k), \bar{\xi}_2(k))$  es a un repulsor del sistema. Los equilibrios en este caso no representan coexistencia estable entre el k-estratega, el r-estratega y la presa ya que los equilibrios del sistema ahora no son estable desde el punto de vista de Liapunov, sin embargo un ciclo límite puede aparecer el cual es orbital asintóticamente estable, significando la oscilación de coexistencia entre las tres especies es posible.



[Figura 2.2] Retrato de fase con parámetro bifurcación  $k=12.8$

En la figura 2.3 se presenta un retrato de fase del sistema con parámetro bifurcación  $k=13.8417$ . Las trayectorias del sistema con condiciones iniciales cercanas a la línea de equilibrios Lk se alejan de él por lo cual el segmento Lk es un conjunto repulsor del sistema (2.1); sin embargo

un ciclo límite puede aparecer el cual es orbitalmente asintóticamente estable en desarrollo de una bifurcación del tipo Hopf nonsmooth, signicando la oscilación de coexistencia entre el r-estratega , el k-estratega y la presa.



[Figura 2.3] Retrato de fase con parámetro bifurcación  $k=13.8417$

### 3. CONCLUSIÓN GENERAL

Se ha construido un modelo numérico no suave que exhiben la bifurcación de zip el cual nos sugiere la posibilidad de extender la bifurcación de zip a modelos no suaves los cuales pueden modelar ciertas situaciones de forma más realistas.

**4. AGRADECIMIENTOS:** Agradecimiento al Profesor Gerard Olivar por su amable y acertada orientación en esta investigación

### 5. BIBLIOGRAFÍA

[1] BUTLER, G. J. “Competitive predator-prey systems and coexistence”. In population Biology Proceedings, Edmonton: Lecture Notes in Biomathematics. 52: 210-299. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[2] FARKAS, M. “Zip bifurcation in a competition model, Nonlinear analysis”. Vol 8. p. 1295-1309. TMA 1984.

[3] FARKAS, M. A zip bifurcation arising in population dynamics, in 10th Int. Conf. On, Nonlinear Oscillations, Varna 1984. 150-155. Sofia: Bugarian Academy of Science., 1985.

[4] FARKAS, M. Sáez, E., Szántó. Velcro Bifurcation in Competition Models with Generalized Holling Functional Response. Miskolc Mathematical Notes, Vol 6, N.2,2005, pp.165-178.

[5] FERREIRA, J. D. “Hopf and zip bifurcation in an specific  $(n+1)$ - competitive system”. Matematicas: Enseñanza Universitaria. 2007.

[6] KISS, K., KOVACS SANDO. “Qualitative behavior of n-dimensional ratio-dependent predator-prey systems”. Applied Mathematics and Computation 199 535–546. 2008.

[7] DERCOLE, GRAGNANI, A., KUZNETZOV, YU. A RINALDI, S. “Numerical sliding bifurcations analysis an application to a relay control system”. IEEE Trans. Circuits system I Fund. Theory Appl. 50,1058-1063. 2003.

[8] Meza, M.E.M., BHAYA, A., KASZKUREWICZ, E., da SILVEIRA COSTA, M. I., “Threshold policies control for predator-prey system using a control Liapunov function approach”. Theor. Popul. Biol. 67, 273-284. 2005.