Conteo de letras de una frase con los dedos y matrices

Counting letters of a sentence with fingers and matrices

Fernando Ricardo González Díaz
Instituto Politécnico Nacional, México, México
fgonzalez33@outlook.com
https://orcid.org/0009-0009-9704-1119
Ricardo García Salcedo
Instituto Politécnico Nacional, México, México
rigarcias@ipn.mx
https://orcid.org/0000-0003-0173-5466

Recepción: 17 Marzo 2023
Aprobación: 21 Junio 2023

Acceso abierto diamante

Resumen

Se presenta un enfoque novedoso para contar letras en palabras o frases en español usando los dedos de la mano derecha. Con este fin, se utiliza un modelo algebraico basado en matrices para representar el conteo, el cual asegura que cada dedo y letra estén relacionados. Se demuestra que el conteo se repite una o cinco veces sin dejar dedos o letras sin asociar. Aunado a esto, se introduce la matriz de letras como una representación asociada al conteo y se establece que forma un monoide. Este estudio profundiza en el conteo de letras y su relación con las matrices con implicaciones en lingüística, criptografía y ciencias de la computación.

Palabras clave: conteo con dedos, matriz asociada, monoide.

Abstract

The article presents a novel approach to counting letters in spanish words or phrases using the fingers of the right hand. An algebraic model based on matrices represents the counting process, ensuring that each finger and letter are associated. It is demonstrated that the count is repeated once or five times, leaving no fingers or letters unassociated. Letter matrices are introduced as a representation associated with counting, forming a monoid structure. This study delves into the counting of letters and its relationship with matrices, with implications in linguistics, cryptography, and computer science.

Keywords: finger counting, associated matrix, monoid.

Notas de autor

fgonzalez33@outlook.com

Introducción

La mano del ser humano, una maravilla de movilidad y eficacia, ha sido el instrumento más antiguo y extendido usado por los pueblos a lo largo de la historia para el conteo y el cálculo (Previtali *et al*., 2011). Arqueólogos, historiadores, etnólogos y filólogos han encontrado evidencias de ello en todas las épocas y regiones del mundo. Podríamos decir que es la primera "máquina calculadora" de todos los tiempos (Ifranh, 1987). El conteo con los dedos es universal y está presente en todas las culturas, lo cual muestra un alto nivel de variabilidad cultural (Bender y Beller, 2012; Butterworth, 1999). Algunas culturas se valen de una mano para contar números del 1 al 5 y la otra mano para llevar un seguimiento de cuántas veces se ha completado el conteo con la primera. La forma más común de contar con los dedos en la actualidad implica una correspondencia uno a uno con los números del 1 al 10, con variaciones en algunos aspectos; por ejemplo, con cuál mano se comienza a contar o qué dedo se utiliza primero en cada mano (es decir, pulgar o índice) (Soylu *et al*., 2018). Una excepción notable es el sistema chino de conteo de dedos, ya que emplea solo los dedos de una mano y gestos simbólicos para representar los números del 6 al 10 (sin una correspondencia uno a uno con los dedos); algunos de estos gestos se asemejan a los caracteres numéricos chinos escritos (Domahs *et al*., 2010).

Maclellan (1995) analiza el papel de contar en el aprendizaje de sumas y restas y enfatiza en la importancia de comprender la regla de cardinalidad. Gelman (2005) cuestiona la idea de que los conceptos numéricos dependen del lenguaje al sugerir que tienen una base neuronal independiente; al mismo tiempo desafía la teoría del *bootstrapping*, la cual afirma que los niños pasan de usar algo como un archivo de objetos a uno verdaderamente aritmético como resultado de aprender las palabras de conteo. DeRocher (1973) hace una descripción histórica y teórica de los conteos de frecuencia, mientras que Gao *et al*. (2011) brinda expresiones asintóticas para el número de palabras que contienen un número dado de ocurrencias de un patrón. Ycart (2012) explora la historia del conteo de letras y su uso en criptología, lingüística cuantitativa y estadística. Lothaire (2005) proporciona una colección de artículos sobre combinatoria aplicada a palabras, incluidos el conteo, la codificación y el muestreo con palabras. Gavin (2020) argumenta en contra de la noción común de que contar palabras reduce la complejidad; plantea, en cambio, que los modelos semánticos incrustan objetos textuales en estructuras demasiado complejas que son en extremo sensibles al contexto histórico y sutiles matices en el significado. En general, los artículos sugieren que varias disciplinas matemáticas han recurrido al conteo de palabras, como la criptología, la lingüística cuantitativa y la estadística, y que es un proceso complejo, pues requiere una consideración cuidadosa del contexto histórico y sutiles matices en el significado, además de desempeñar un papel en el aprendizaje matemático, pero aún se está explorando su importancia y relación con el lenguaje y los procesos neuronales.

En esta investigación muy empírica resultó interesante revisar el tema de cómo las personas cuentan con los dedos de las manos. Sobre el particular, cada persona cuenta de diferente forma las letras de alguna palabra arbitraria. Algunas de ellas utilizaban la mano izquierda, otras la derecha; otras comenzaban con el dedo meñique, otras con el dedo pulgar. Incluso, algunas usaban las dos manos al mismo tiempo: con el dedo índice de la mano derecha señalaban los dedos de la mano izquierda al contar.

Antes de continuar, ¿usted cómo cuenta con los dedos? Haga el ejercicio contando las letras de su nombre.

Debido a que no existe una única forma de contar las letras de las palabras con los dedos de la mano, para los fines del artículo se tuvieron que establecer dos reglas al contar las letras de una palabra. La primera regla es que la persona debe contar las letras de la palabra usando únicamente los dedos de la mano derecha y comenzar con el dedo meñique. La segunda regla es comenzar el conteo con el dedo meñique y terminar con el dedo pulgar en el sentido de las manecillas del reloj. No debe quedar un dedo ni una letra sin estar relacionados entre sí. Para lograrlo, en la mayoría de las palabras será necesario repetir el conteo de las letras varias veces.

Una vez dadas estas dos reglas para el conteo de palabras con la mano derecha, el objetivo de este trabajo consiste en contar las letras de una palabra o frase usando los dedos de la mano derecha y modelarlo desde el punto de vista matemático, es decir, algebraicamente asociar dicho conteo con una matriz. El término *matriz* fue definido por primera vez en 1851, en la memoria *On the relations between the minor determinants of linearly equivalent quadratic function* del matemático inglés James Joseph Sylvester (Sylvester, 2009), quien definió una matriz como un *oblong arrangement of terms* (arreglo cuadrilongo de términos).

James Sylvester hizo contacto con su colega Arthur Cayley, quien realizó notables contribuciones al aspecto algebraico de las matrices. Cayley introdujo conceptos fundamentales como *las matrices nulas y unitarias*, además de abordar la suma de matrices y resaltar su propiedad asociativa y conmutativa. En 1853 publicó una nota que marcó la primera aparición del concepto de *la inversa de una matriz* (Cayley, 2009). Años después, en *Memoir on the theory of matrices (1858)*, presentó la primera definición abstracta de una matriz, donde revela que los arreglos de coeficientes previamente estudiados en las formas cuadráticas y las transformaciones lineales eran casos especiales de este concepto más amplio (Luzardo y Peña, 2006). Cabe destacar que una matriz puede representar diversas estructuras, como cuadros de valores, transformaciones lineales y sistemas de ecuaciones diferenciales, entre otras aplicaciones (Rosales, 2008).

Por otro lado, los monoides son estructuras algebraicas formadas por un conjunto: una operación binaria asociativa y un elemento de identidad. En un monoide la operación combina dos elementos cualesquiera del conjunto para producir un tercer elemento, y el elemento de identidad sirve como elemento neutro bajo la operación. Las propiedades clave de un monoide son la cerradura, la asociatividad y la existencia de un elemento de identidad (Lang, 2005).

Para ilustrar estos conceptos, consideremos ejemplos concretos de monoides en diversos contextos matemáticos. Un ejemplo relevante es el conjunto de los números naturales, incluido el 0, equipado con la operación de adición. Esta configuración forma un monoide en el que el elemento de identidad es 0, y la operación de suma es asociativa y cerrada dentro del conjunto. Esto implica que la suma de dos números naturales siempre da como resultado otro número natural (Garay, 2019).

Otro ejemplo es el conjunto de los números enteros con la operación de multiplicación, que también forma un monoide, en el que el elemento identidad es 1. Al igual que la suma, la multiplicación es asociativa y satisface las propiedades monoidales dentro del conjunto de los números enteros. Esto significa que la multiplicación de dos números enteros siempre da como resultado otro número entero (Garay, 2019).

En el ámbito de las matrices, las matrices de tamaño fijo también se les considera monoides cuando se les aplica la multiplicación matricial. El elemento de identidad en este caso es la matriz identidad, que conserva las propiedades de otras matrices bajo la multiplicación. La multiplicación matricial es asociativa, lo que permite la formación de una estructura monoide en la que combinen matrices de manera consistente y obtener matrices resultantes (Garay, 2019).

Además, el conjunto de todos los conjuntos puede formar un monoide a partir de la operación de unión como la operación binaria. En este caso, el elemento de identidad es el conjunto vacío, ya que la unión de cualquier conjunto con el conjunto vacío devuelve el conjunto original. La unión de conjuntos es asociativa, lo que implica que el orden de las operaciones de unión no afecta al resultado final.

Estos ejemplos ponen de manifiesto la versatilidad de los monoides, dado que encuentran aplicaciones en diversos campos como las matemáticas, la informática y la programación teórica de ordenadores. Los monoides proporcionan un marco fundamental para estudiar las propiedades de las operaciones binarias y sus relaciones dentro de conjuntos o estructuras específicos.

Los monoides desempeñan un papel fundamental tanto en matemáticas como en física y tienen una amplia gama de aplicaciones en diversos campos. Una de las razones por las que son determinantes es que son una generalización de los grupos, lo que significa que los grupos son un caso especial de monoides. La teoría de grupos es una rama central de las matemáticas, y los monoides ofrecen un marco más amplio para el estudio de propiedades algebraicas y estructuras similares a los grupos (Ceballos y De Armas, 2013; Lluis-Puebla, 2015).

Los monoides tienen aplicaciones significativas en matemáticas y física. En matemáticas sirven para el estudio de estructuras algebraicas y en diversas ramas como teoría de grafos, teoría de autómatas y teoría de códigos. En física los monoides son fundamentales para describir simetrías y transformaciones en sistemas físicos, y se aplican en campos como física teórica y física estadística. Su estudio y comprensión son esenciales para el avance en ambos campos y para la modelización y comprensión de fenómenos complejos (Steinberg, 2016; Jonsson, 2019; Sabando Álvarez, 2020; Liaqat y Younas, 2021).

El objetivo de este artículo es presentar un modelo algebraico basado en matrices para el conteo de letras en palabras o frases del idioma español utilizando los dedos de la mano derecha. Se busca demostrar que el conteo puede representarse mediante una matriz que asocia cada letra con un dedo específico siguiendo la regla de la mano derecha. Además, se pretende establecer que el número de repeticiones del conteo siempre es uno o cinco y que el conjunto de matrices generadas conforma un monoide, una estructura algebraica. Con base en lo anterior, este estudio busca proporcionar una comprensión clara y formal de la relación entre el conteo de letras y las matrices mediante un enfoque novedoso para analizar la estructura lingüística y matemática de las palabras en el idioma español.

Hasta donde sabemos no existe ningún artículo o trabajo de investigación que haya abordado esta conexión: la relación entre el conteo de palabras o frases con las matrices de manera sistemática. Por lo tanto, el objetivo es cubrir esta brecha investigativa y examinar a detalle cómo se puede realizar este conteo mediante matrices. Se espera que este enfoque innovador proporcione resultados y perspectivas interesantes, lo que a su vez contribuirá a una mejor comprensión de las estructuras lingüísticas y matemáticas presentes en el idioma español, en particular en el conteo de las palabras y frases.

Para lograr una lectura inductiva de las definiciones hasta los resultados, el artículo está organizado de la siguiente manera. En las secciones 1 y 2 respectivamente se describen los conceptos del conteo que utiliza los dedos de la mano derecha para contar de letras de una palabra y frase, así como los principales resultados obtenidos. Por último, se presenta la prospectiva del tema y las conclusiones.

1. Conteo de letras de una palabra

Para establecer el proceso de contar las letras de una palabra utilizando los dedos de la mano, es necesario comenzar con algunas definiciones fundamentales sobre lo que constituye una palabra. Después, describiremos el método mediante el cual se emplean los dedos de la mano derecha, siguiendo la regla de la mano derecha, para llevar a cabo el conteo de las letras de dicha palabra.

El vocabulario del idioma español se basa en el uso de un alfabeto que permite la formación de palabras y facilita la comunicación. Este alfabeto está conformado por un conjunto de letras, dígitos y caracteres específicos y bien definidos.

Definición 1. 1

Un alfabeto Σ es un conjunto finito de letras, dígitos y caracteres que, en el idioma español, está compuesto por los siguientes elementos (Balari, 2014):

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} Á, A, a, á, B, b, C, c, D, d, É, E, e, é, F, f, G, g, H, h, Í, I, i, í, J, j, K, k, L, l, M, m, N, n, \\ Ñ, ñ, Ó, O, o, ó, P, p, Q, q, R, r, S, s, T, t, Ú, U, u, ú, V, v, W, w, X, x, Y, y, Z, z, 0, 1, 2, 3, \\ 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, '',), (, \$, \%, \#, \end{array} \right\}$$

(1)

Según Balari, el término *cadena*, *palabra* o *vocablo P* se define como una secuencia finita de letras o símbolos pertenecientes al alfabeto Σ unidos por la operación de concatenación. En otras palabras, P se representa como $l_1 l_2 l_3$... ln donde cada li es un elemento del conjunto de letras del alfabeto Σ y $n \in N$ es un número natural. La palabra vacía se representa con el símbolo ε y es aquella que no contiene ninguna letra, dígito o carácter. En caso de que no haya ninguna letra, se utiliza el símbolo ϕ. La palabra vacía actúa como el elemento identidad de la operación de concatenación, de manera que $\varepsilon P = \varepsilon l_1 l_2\ l_3 \ldots l_n = l_1\ l_2 l_3 \ldots l_n \varepsilon = P\varepsilon = P$. La tabla 1 muestra ejemplos de palabras y sus respectivas letras.

Tabla 1

Palabras del idioma español y las letras que las forman

Nombre	Palabra	Letras
P	Yo	l1 = Y, l2 = o
Q	Número	l1 = N, l2 = ú, l3 = m, l4 = e, l5 = r, l6 = o
R	Uno	l1 = U, l2 = n, l3 = o
S	Mano	l1 = M, l2 = a, l3 = n, l4 = o
T	Ecuación	l1 = e, l2 = c, l3 = u, l4 = a, l5 = c, l6 = i, l7 = ó, l8 = n
U	Álgebra	l1 = Á, l2 = l, l3 = g, l4 = e, l5 = b, l6 = r, l7 = a

Fuente: elaboración propia.

La cardinalidad o longitud de una palabra P se define como el número natural n de letras que la componen, y se representa como $||\ P\ ||$. Dos palabras $P = l_1 l_2\ l_3 \ldots l_n$ y $Q = a_1 a_2 a_3 \ldots a_m$ se consideran iguales si tienen la misma cardinalidad, es decir, $n = m$ y si cada una de sus letras o símbolos correspondientes es igual, es decir, $l_i = a_i$. Por lo tanto, las palabras $P = aAa$ y $Q = Aaa$ y son diferentes. Si consideramos las palabras de la tabla 1, se observa que tienen diferentes cardinalidades: $||\ P\ || = 2$, $||\ Q\ || = 6$, $||\ S\ || = 4$ y $||\ U\ || = 7$.

Una vez establecidas estas definiciones, se procede a explicar el método elegido para el conteo de letras de una palabra utilizando la mano derecha.

Definición 1. 2

a. La mano derecha se representa mediante el conjunto $\mu = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$, donde cada dj corresponde a uno de los dedos, con $j = 1, 2, 3, 4, 5$. El dedo meñique se identifica como d_1, el dedo anular como d_2, el dedo medio como d_3, el dedo índice como d_4 y el dedo pulgar como d_5, tal como se muestra en la figura 1.

b. La operación del conteo de letras de una palabra P con los dedos de la mano derecha se define como la asociación de cada letra de la palabra con uno de los dedos de la mano, representado como $l_j \mapsto d_j$. El conteo comienza en el dedo meñique (en el orden de los dedos con dirección a las manecillas del reloj siguiendo la regla de la mano derecha (Weisstein, 2023) y continúa hasta llegar al dedo pulgar. Si la longitud de la palabra supera 5, es decir, $||\ P\ || > 5$ se continúa el conteo a partir del dedo meñique con la siguiente letra, siguiendo la dirección de las manecillas del reloj.

Figura 1

Identificacion de cada uno de los dedos d_j de la mano derecha μ

Fuente: elaboración propia. Nota: esta figura y las siguientes están basadas en la pintura que se muestra en la figura 4.

En seguida, se presentan algunos ejemplos de conteo de palabras y la correspondencia de sus letras con los dedos de la mano derecha:

a. Consideremos la palabra $O = a$. La asignación de letras a los dedos que las cuentan es la siguiente: $a \mapsto d_1$, mientras que el resto de los dedos (d_2, d_3, d_4, d_5), no tienen ninguna letra asignada (figura 2a).
b. Ahora tomemos la palabra $P = yo$. La asignación de letras a los dedos que las cuentan es la siguiente: $y \mapsto d_1$, $o \mapsto d_2$, mientras que el resto de los dedos (d_3, d_4, $d5$), no tienen ninguna letra asignada (figura 2b).
c. Consideremos la palabra $Q = sol$. La asignación de letras a los dedos que las cuentan es la siguiente: $s \mapsto d_1$, $o \mapsto d_2$, $l \mapsto d_3$, mientras que el resto de los dedos, ($d_4 \mapsto \phi$, $d_5 \mapsto \phi$) no tienen ninguna letra asignada (figura 2c).
d. Consideremos la palabra $R = mano$. La asignación de letras a los dedos que las cuentan es la siguiente: $m \mapsto d_1$, $a \mapsto d_2$, $n \mapsto d_3$, $o \mapsto d_4$, mientras que ($d_5 \mapsto \phi$) no tiene ninguna letra asignada (figura 2d).
e. Sea la palabra $S = color$,, la identificación de la letra y el dedo que la cuenta es la siguiente: $c \mapsto d_1$, $o \mapsto d_2$, $l \mapsto d_3$, o $\mapsto d_4$, $r \mapsto d_5$ (figura 2e).
f. Sea la palabra $T = ecuación$, la identificación de la letra y el dedo que la cuenta es la siguiente: $e \mapsto d_1$, $c \mapsto d_2$, $u \mapsto d_3$, $a \mapsto d_4$, $c \mapsto d_5$, $i \mapsto d_1$, ó $\mapsto d_2$, $n \mapsto d_3$, $\phi \mapsto d_4$, $\phi \mapsto d_5$ (figura 2f). En esta palabra se identifican los cinco dedos y se vuelven a usar tres dedos.

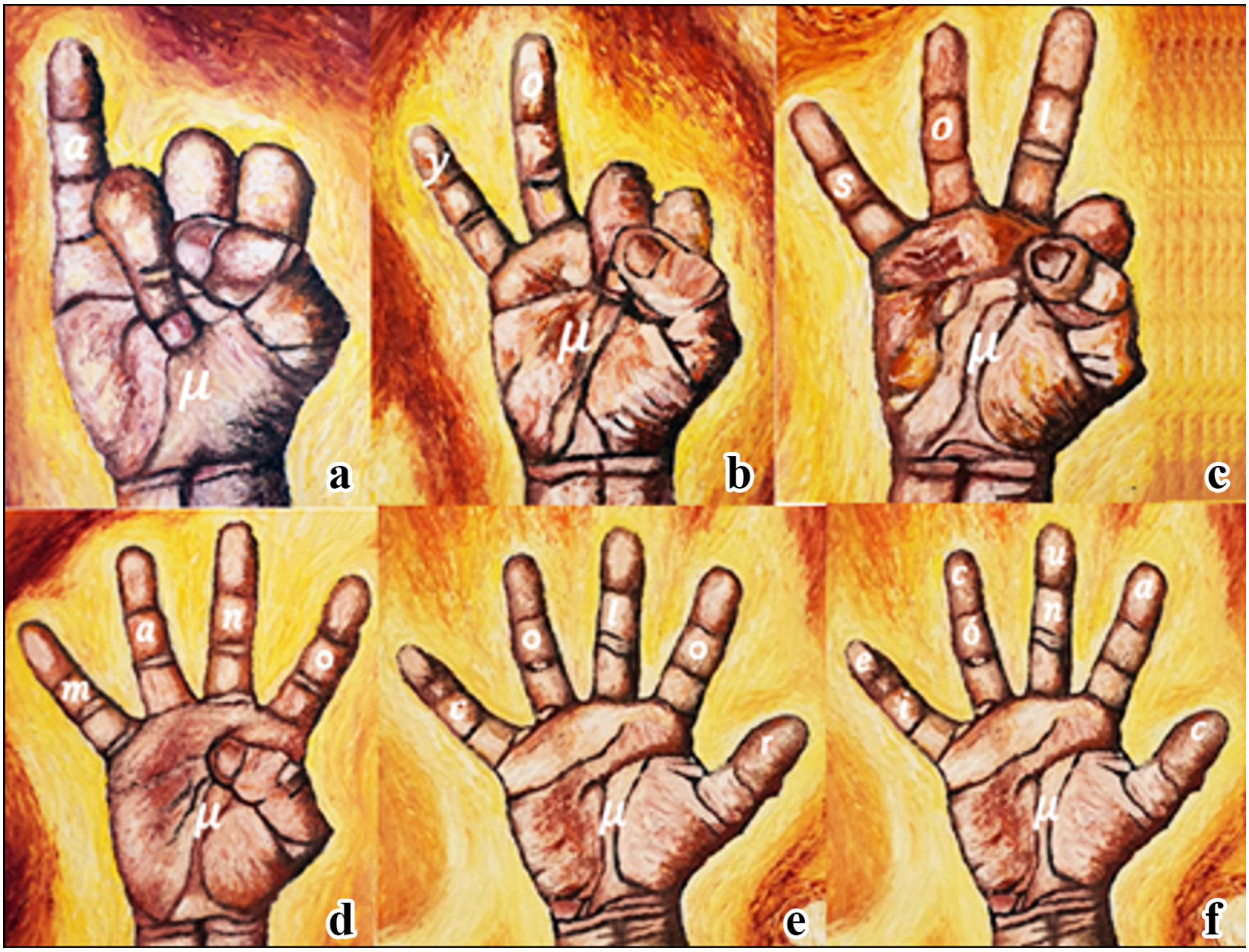

Figura 2

Conteo de las letras de palabras: *a*, *yo*, *sol*, *mano*, *colory ecuación*

Fuente: elaboración propia. Nota: en la figura también se muestra la identificación de cada letra de la palabra con los dedos correspondientes de la mano derecha.

Ahora estamos en posición de explicar un procedimiento para repetir el conteo de las letras de la palabra si fuera necesario hasta que no quede un dedo ni una letra sin ser identificados al contar las letras de la palabra, y sin importar el número de veces que se repita el conteo de las letras de la palabra con los dedos de la mano derecha.

Definición 1. 3

Se dice que una palabra P es de repetición si se tiene que contar sus letras r veces hasta que no quede un dedo ni una letra identificado. Además, se dice que una palabra es unitaria si su cardinalidad es un múltiplo de 5, $|| P ||$ = 5m, con $m \in \mathbb{N}$, y las letras se contarán una sola vez sin que falte un dedo o una letra en la identificación.

Vamos a ejemplificar esta definición al calcular el conteo de letras con repetición de algunas palabras. Al respecto, cada color representa su conteo una vez como se muestra en la figura 3.

a. Sea la palabra $B = m$, cuya cardinalidad es $|| B || = 1$. Al contar la letra con los dedos de la mano derecha, quedan cuatro dedos sin identificar. Al repetir el conteo de la letra (la segunda vez) quedan tres dedos sin identificar, y así sucesivamente, hasta repetirla cinco veces de tal forma que no queda ningún dedo ni letra sin identificarse. Por lo tanto, la palabra $B = m$ es de repetición $r = 5$ (figura 3a).

b. Sea la palabra W = *tú* cuya cardinalidad es $|| W ||$ = 2. En este caso, la palabra W es de repetición r = 5 (figura 3b).
c. Sea la palabra N = *sol* cuya cardinalidad es $|| N ||$ = 3. La palabra N es de repetición r = 5 (figura 3c).
d. Sea la palabra K =*tres* cuya cardinalidad es $|| K ||$ = 4. La palabra K es de repetición r = 5 (figura 3d).
e. Sea la palabra Q =*número* cuya cardinalidad es $|| Q ||$ = 6. La palabra Q es de repetición r = 5 (figura 3e).
f. Sea la palabra D =función cuya cardinalidad es $|| D ||$ = 7. Así, la palabra D, es de repetición r = 5 (figura 3f).

De acuerdo con esto, podemos decir que las palabras V = color, H = caramelito, Y = pantalones, T = magnetizaciones son todas palabras unitarias, porque su cardinalidad es múltiplo de 5 y se cuentan una sola vez.

Por los ejemplos anteriores, es posible intuir que al contar las letras con repetición usando los cinco dedos de la mano derecha todas las palabras son de repetición 5. Esto se confirma enunciando el siguiente teorema.

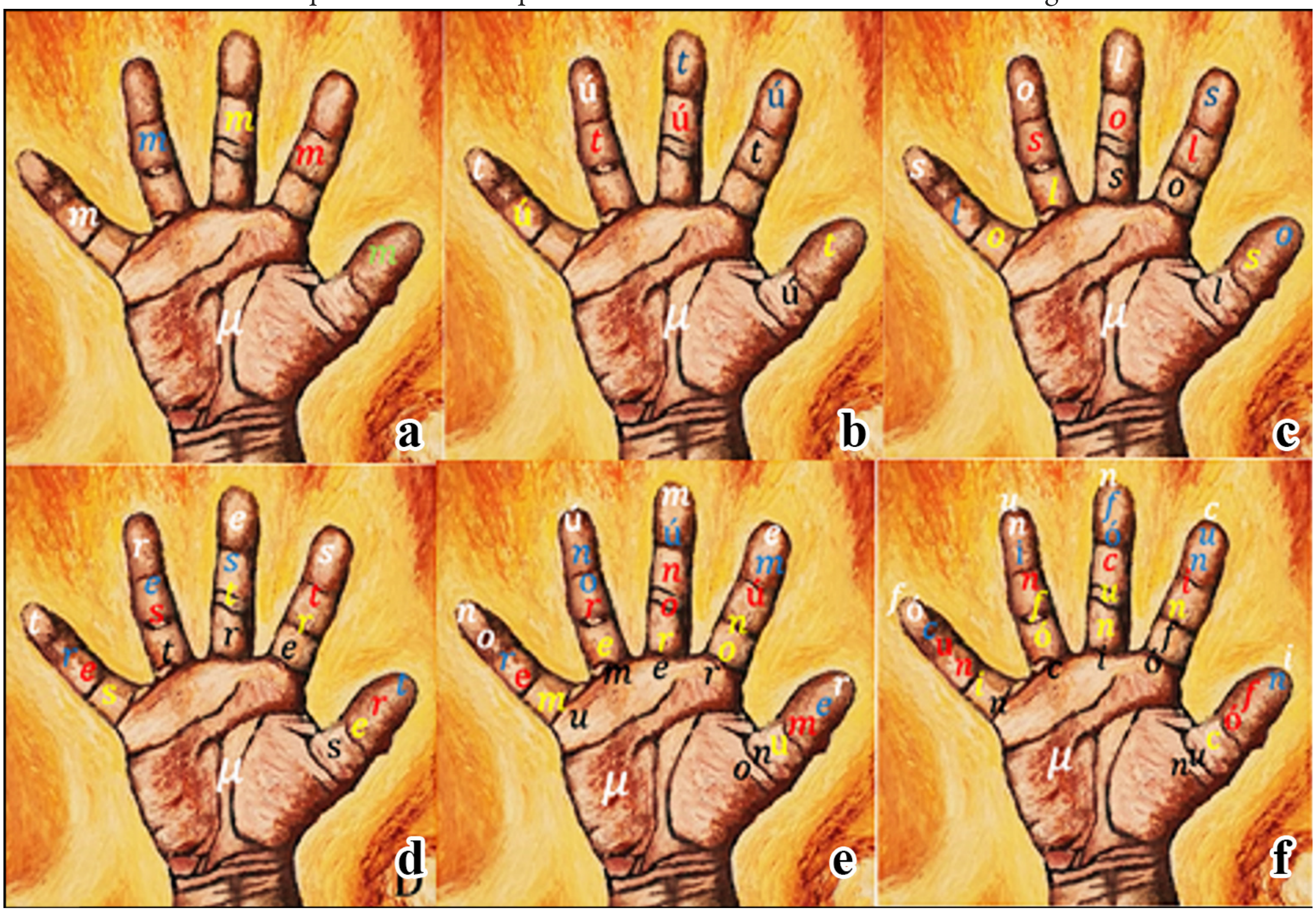

Figura 3
Conteo con repetición de las palabras *m*, *tú*, *sol*, *tres*, *número* y *función*
Fuente: elaboración propia.

Teorema 1. 1

El conteo de letras con repetición de cualquier palabra P no vacía cumple solo una de las dos siguientes afirmaciones:

a. La palabra P es unitaria.
b. La palabra P es de repetición 5.

Demostración: la demostración la dividiremos en dos partes de acuerdo con el enunciado del teorema:

Parte a): Si consideramos una palabra P con cardinalidad $|| P || = 5m$, donde $m \in N$ es un número natural (múltiplo de 5), entonces la representación de P puede ser expresada como $P = l_1 l_2 l_3 ... l_{5m}$. Para establecer una relación de identificación de las letras l_1, y los dedos d_j con $i = 1, 2, 3, 4, 5$ y $j = 1, 2, 3, ... 5_m$, se utiliza la tabla 2, donde se ilustra cómo cada letra de la palabra se relaciona con los dedos de la mano, lo cual garantiza que no quede ningún dedo o letra sin ser asociados en el conteo, por lo que la palabra P es unitaria.

Tabla 2

Identificación de cada letra de P con cada dedo de la mano derecha

d1	d2	d3	d4	d5
l1	l2	l3	l4	l5
l6	l7	l8	l9	l10
...	...	...	...	...
l5m - 4	l5m - 3	l5m - 2	l5m - 1	l5m

Fuente: elaboración propia.

Nota: esta tabla corresponde a la parte *a*) de la demostración del teorema 2.1.

Parte b): si la palabra P tiene cardinalidad $|| P || = n$, y no es múltiplo de 5, entonces es de la forma $P = l_1 l_2 l_3 ... l_n$, al contar las letras y repetirla 5 veces, el número de letras que se cuentan es un múltiplo de 5, es decir, $5n$. Entonces, aplicando la identificación que se muestra en la tabla 2, se obtiene el resultado del inciso anterior. Por lo tanto, esto se cumple para cualquier palabra con repetición 5.

Fin de la demostración ▪

A partir de este punto, haremos referencia al conteo de letras con repetición de una palabra P, cuando se han contado consecutivamente cinco veces sus letras. La relación de identificación del conteo de letras con repetición de la palabra P se denota por I: $P \to \mu$, donde μ representa la mano derecha compuesta por los cinco dedos d_j. La regla de correspondencia aplicada a cualquier palabra P se encuentra en la tabla 2.

En el siguiente teorema exploraremos una propiedad fundamental del conteo que se relaciona con la forma en la que cada letra se identifica con cada dedo.

Teorema 1. 2

Para toda palabra P se cumple lo siguiente:

a. Si la cardinalidad de la palabra P es 5, $|| P || = 5$, y todas sus letras son distintas, entonces la relación identificación I es biyectiva Esto significa que a cada letra le corresponde un único dedo, y viceversa.
b. Si la cardinalidad de la palabra P es mayor que 5, $|| P || > 5$, entonces la relación identificación I es sobreyectiva. Esto implica que a cada dedo le corresponde al menos una letra.

Demostración: la demostración del teorema 1.2 se divide en dos partes, de acuerdo con el enunciado del teorema:

Parte a): la palabra P se representa como $P = l_1 l_2 l_3 l_4 l_5$ con cada letra distinta, , $l_i \neq l_j$. En este caso, la relación de identificación I se define mediante la regla I: $P \to \mu$, donde $I(l_i) = d_i$, es decir $l_1 \to d_1$, $l_2 \to d_2$, $l_3 \to d_3$, $l_4 \to d_4$, $l_5 \to d_5$. Cada letra se corresponde con un único dedo, lo que implica que la identificación es inyectiva. Además, cada dedo se corresponde con una letra, lo que implica que es sobreyectiva. Por lo tanto, la relación de identificación I es biyectiva.

Parte b): consideremos el caso en el que la cardinalidad de la palabra P es mayor que 5, es decir, $|| P || = 5$. Supongamos en específico que $|| P || = 6$. En este caso, la identificación de las letras de la palabra P con los dedos de la mano derecha se muestra a continuación:

$$l_1 \to d_1, l_2 \to d_2, l_3 \to d_3, l_4 \to d_4, l_5 \to d_5, l_6 \to d_1$$

Al realizar el conteo de las letras una vez, se observa que el dedo d_1 tiene asignadas dos letras, mientras que los otros dedos tienen asignada una letra cada uno. Esto demuestra que la relación identificación I es sobreyectiva en este caso. De manera similar, al considerar casos donde la cardinalidad de la palabra P es mayor que 6, se advierte que la relación I asigna a cada dedo d_i más de una letra, lo cual confirma que la relación identificación es sobreyectiva en estos casos también.

Fin de la demostración ▪

Tabla 3

Identificación al conteo con repetición de la palabra $W = tú$

d1	d2	d3	d4	d5
t	ú	t	ú	t
ú	t	ú	t	ú

Fuente: elaboración propia.

Nota: la identificación es como se muestra en la figura 3B.

Una vez establecida la relación entre las letras de una palabra P y los dedos $d_i$de la mano derecha μ mediante la regla de correspondencia de identificación *I,* se genera una tabla que organiza esta información, la cual consta de renglones horizontales, que representan las letras de la palabra, y columnas verticales, que representan los dedos de la mano derecha. En la tabla 2 se presenta un ejemplo.

Si consideramos las palabras $W = tú$ y $N = sol$, es posible obtener las tablas correspondientes a la identificación de las letras con los dedos. Estas tablas se presentan como tabla 3 y tabla 4 respectivamente, donde se separan las letras por renglones y los dedos por columnas.

Tabla 4

Identificación al conteo con repetición de la palabra $N = sol$

d1	d2	d3	d4	d5
s	o	l	s	o
l	s	o	l	s
o	l	s	o	l

Fuente: elaboración propia.

Nota: la identificación es como se muestra en la figura 3c.

El concepto de *matriz* en álgebra lineal ha sido muy estudiado debido a su utilidad en diversos temas tanto abstractos como aplicados (Grossmann, 1994; Aranda, 2016). En este artículo establecemos una relación entre la tabla de identificación del conteo con repetición de una palabra y una matriz cuyos elementos son las letras de la palabra. En particular, la matriz se construye de la siguiente manera:

Definición 1. 4

Se asocia a cada conteo de letras con repetición de una palabra $P = l_1 l_2 l_3 \ldots l_n$ una matriz de tamaño, n renglones por 5 columnas, $n \times 5$, que denominamos matriz asociada $M(P)$ y la representamos mediante la ecuación (2):

$$M(P) = [l_{ij}] = \begin{bmatrix} & l_{1\,1} & l_{2\,2} & l_{3\,3} & l_{4\,4} & l_{5\,5} & \\ & l_{6\,1} & l_{7\,2} & l_{8\,3} & l_{9\,4} & l_{10\,5} & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ l_{5i-4\,1} & l_{5i-3\,2} & & l_{5i-2\,3} & l_{5i-1\,4} & & l_{5i\,5} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{5n-4\,1} & l_{5n-3\,2} & & l_{5n-2\,3} & l_{5n-1\,4} & & l_{5n\,5} \end{bmatrix}$$

(2)

En la matriz asociada M (P) el índice i = 1, 2, ..., n representa las filas y se refiere a las letras de la palabra P y, por otro lado, el índice j = 1, 2, 3, 4, 5 a las columnas y se relaciona con los dedos correspondientes de la mano derecha.

La tabla 5 expone algunos ejemplos de la matriz asociada M (P) al contar las letras con repetición de diferentes palabras.

Tabla 5

Conteo de repetición de las letras de algunas palabras y su matriz asociada

Palabra P	Tabla asignada al conteo de letras con repetición de la palabra P	Matriz asociada M(P)
B = m	d1 d2 d3 d4 d5 m m m m m	M(B) = [m m m m m]
C = El	d1 d2 d3 d4 d5 E l E l E l E l E l	M(C) = [E l E l E l E l E l]
D = son	d1 d2 d3 d4 d5 s o n s o n s o n s o n s o n	M(D) = [s o n s o n s o n s o n s o n]
K = tres	d1 d2 d3 d4 d5 t r e s t r e s t r e s t r e s t r e s	M(K) = [t r e s t r e s t r e s t r e s t r e s]
V = color	d1 d2 d3 d4 d5 c o l o r	M(V) = [c o l o r]
Q = número	d1 d2 d3 d4 d5 n ú m e r o n ú m e r o n ú m e r o n ú m e r o n ú m e r o	M(K) = [n ú m e r o n ú m e r o n ú m e r o n ú m e r o n ú m e r o]
L = función	d1 d2 d3 d4 d5 f u n c i ó n f u n c i ó n f u n c i ó n f u n c i ó n f u n c i ó n	M(K) = [f u n c i ó n f u n c i ó n f u n c i ó n f u n c i ó n f u n c i ó n]
Fuente: elaboración propia.		

Fuente: elaboración propia.

Las observaciones siguientes se derivan de los ejemplos presentados en la tabla 5.

a. Si la palabra P tiene una cardinalidad en el rango de 1 a 4 (1≤ || P || ≤ 4), se observa que todas las letras de la palabra aparecen al menos una vez tanto en el conjunto de filas como en el conjunto de columnas de la matriz asociada.
b. Si la cardinalidad de la palabra P es igual a 5 (|| P || = 5), se observa que la palabra completa aparece en el conjunto de filas de la matriz asociada.
c. Si la cardinalidad de la palabra P es mayor o igual a 6 (|| P || ≥ 6, se observa que todas las letras de la palabra aparecen en cada una de las columnas de la matriz asociada.

2. Conteo de letras de una frase

Cuando nos comunicamos en el idioma español nos valemos de palabras que al combinarse forman frases u oraciones con un significado específico. En este apartado nos centraremos en el conteo de palabras en las frases. Destaca que la aceptabilidad de una oración no es necesariamente equivalente a su gramaticalidad. La aceptabilidad se refiere a la naturalidad con la que una frase puede ser utilizada en un grupo social, en tanto que la gramaticalidad se relaciona con el cumplimiento de las reglas inconscientes que vinculan sonidos y significados (Chomsky, 1970; Chomsky, 1978; Birchenall y Müller, 2014).

Ahora, se exploran las definiciones básicas de una frase f y la identificación del conteo de letras en una frase f con el objetivo de construir la matriz asociada a la frase $M(f)$ para un análisis más detallado.

Definición 2. 1

Una frase f se define como la concatenación de dos o más palabras separadas por un espacio en blanco. La combinación específica de palabras en una frase da lugar a un significado propio y específico. Representamos una frase como $f = P_1P_2P_3 \dots P_n$, donde cada P_i es una palabra y hay un espacio en blanco entre cada palabra (Lasnik y Lohndal, 2010; Birchenall y Müller, 2014). Cabe destacar que cada palabra individual también se considera una frase en sí misma. En la tabla 6 se presentan algunos ejemplos de frases junto con las palabras que las componen para ilustrar esta relación de concatenación.

Tabla 6

Ejemplos de frases y las palabras que las conforman

Nombre	Frase	Palabras
f	Me divierto contando letras	$P_1 = MeP_2$ =divierto P_3 =contando P_4 = letras
g	Cuenta las vocales	P_1 =Cuenta las P_2 =vocales
h	La matemática es un arte	P$_1$ =La P_2 =matemática P_3 =es P_4 = un P_4 = arte

Fuente: elaboración propia.

De manera similar a las palabras individuales, en el caso de una frase f, al concatenar todas las palabras que la componen, se obtiene una única palabra total formada por todas las letras sin espacios en blanco. En otras palabras, la palabra total de una frase es el resultado de combinar todas las letras de las palabras que la conforman. A esta palabra total se le aplica la definición 1.2 *b*) del conteo de letras de una palabra, lo que permite el conteo de letras de la frase f. En otras palabras, el conteo de letras de la frase f se realiza asignando las letras a los dedos de la mano derecha . Si es necesario, se repite el conteo de las letras de la frase hasta que cada dedo y cada letra hayan sido identificados sin importar cuántas veces se repita el proceso.

Teorema 2. 1

El conteo de letras con repetición de cualquier frase f, excepto la frase vacía, cumple únicamente una de las siguientes condiciones:

La frase f es de repetición 5.

La frase f es una palabra unitaria.

Demostración: la demostración se divide en dos partes de acuerdo con el enunciado del teorema:

Parte a): consideremos la frase $f = P_1P_2P_3\dots$ Pm compuesta por m palabras, donde cada palabra tiene una cardinalidad $|| P_k || = n_k$ para k = 1, 2, 3, ... m. El número total de letras sin espacios en la frase se calcula como la suma de las cardinalidades de cada palabra, es decir, $n_1 + n_2 + \dots n_m = n$. Si no es un múltiplo de 5, al contar las letras y repetir la frase 5 veces, el número total de letras contadas será un múltiplo de 5, es decir, 5n. Por lo tanto, es posible definir una función de asignación que relacione cada letra $l_i$para i = 1, 2, 3, ... n, con un dedo $d_j$para j = 1,2,3,4,5,, de acuerdo con la tabla 2 del 2.1.

Parte b): si al contar todas las letras de cada palabra de la frase como una palabra total, es decir, si la suma $n_1 + n_2 + \ldots n_m = n$, resulta ser un múltiplo de 5, entonces la frase es una palabra unitaria. En este caso, se aplica el conteo de letras como se ha demostrado.

Fin de la demostración ▪

Dado que las frases están compuestas por palabras y espacios entre ellas, al realizar el conteo de letras con repetición en una frase f, los espacios no se toman en cuenta. Por ende, de manera análoga al conteo en palabras, asociamos a la frase f su correspondiente matriz asociada $M(f)$.

Ejemplo 2. 1: matriz asociada a una frase. Para la frase g = *La física es hermosa*, su matriz asociada se muestra en la ecuación (3):

$$M(g) = \begin{bmatrix} l & a & f & í & s \\ i & c & a & e & s \\ h & e & r & m & o \\ s & a & l & a & f \\ í & s & i & c & a \\ e & s & h & e & r \\ m & o & s & a & l \\ a & f & í & s & i \\ c & a & e & s & h \\ e & r & m & o & s \\ a & l & a & f & í \\ s & i & c & a & e \\ s & h & e & r & m \\ o & s & a & l & a \\ f & í & s & i & c \\ a & e & s & h & e \\ r & m & o & s & a \end{bmatrix}$$

(3)

Se define el conjunto de todas las matrices asociadas, $M(F(\Sigma))$, a partir del conjunto de todas las frases del conteo de letras con repetición, $F(\Sigma)$, como sigue: $M(F(\Sigma)) = \{M(f): f \in F(\Sigma)\}$, donde Σ representa el alfabeto previamente definido.

Para el conjunto de matrices asociadas $M(F(\Sigma))$, se establece una operación binaria interna de unión por concatenación de matrices de la siguiente manera:

$$M(F(\Sigma)) \times M(F(\Sigma)) \rightarrow M(F(\Sigma))$$

con la regla de correspondencia $(M(f), M(g)) \rightarrow M(f)M(g) = M(fg)$. Aquí, la matriz $M(fg)$ se define como la matriz asociada a la palabra total que resulta de la concatenación de la palabra total de la frase f y la palabra total de la frase g (primero se colocan las letras de la frase f y luego las letras de la frase g).

Esta definición establece una relación entre las frases del conteo con repetición y sus matrices asociadas.

Ejemplo 2. 2: unión por concatenación de matriz asociada al conteo con repetición de dos frases. Consideremos las frases: h = *Los estudiantes* y f = *Escuchamos música*. La matriz de unión por concatenación asociada a estas frases se obtiene de acuerdo con la ecuación (4):

$$M(h)M(g)=\begin{bmatrix} L & o & s & e & s \\ t & u & d & i & a \\ n & t & e & s & l \\ o & s & e & s & t \\ u & d & i & a & n \\ t & e & s & l & o \\ s & e & s & t & u \\ d & i & a & n & t \\ e & s & l & o & s \\ e & s & t & u & d \\ i & a & n & t & e \\ s & l & o & s & e \\ s & t & u & d & i \\ a & n & t & e & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & s & c & u & c \\ h & a & m & o & s \\ m & ú & s & i & c \\ a & E & s & c & u \\ c & h & a & m & o \\ s & m & ú & s & i \\ c & a & E & s & c \\ u & c & h & a & m \\ o & s & m & ú & s \\ i & c & a & E & s \\ c & u & c & h & a \\ m & o & s & m & ú \\ s & i & c & a & E \\ s & c & u & c & h \\ a & m & o & s & m \\ ú & s & i & c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L & o & s & e & s \\ t & u & d & i & a \\ n & t & e & s & E \\ s & c & u & c & h \\ a & m & o & s & m \\ ú & s & i & c & a \end{bmatrix}=M(hg). \tag{4}$$

Teorema 2. 2

El conjunto de matrices asociadas $M(F(\Sigma))$, con la operación de unión por concatenación de matrices, forma un monoide (Jacobson, 2009; Garay, 2019).

Demostración: un monoide es una estructura algebraica que posee una operación binaria asociativa y un elemento identidad (Lang, 2005; Garay, 2019). Para demostrar que el conjunto de matrices asociadas a las frases cumple estas propiedades, debemos verificar la asociatividad de la operación y la existencia de un elemento neutro.

En primer lugar, consideremos tres frases: f, g y h. Deseamos demostrar que $(M(f)M(g))M(h)$ es igual a $M(f)((M(g)M(h))$. Utilizando la definición de la operación de unión por concatenación de matrices, tenemos que $(M(f)M(g))M(h)=M(fg)M(h) = M(fgh)$.

Por otro lado, $M(f)((M(g)M(h)) = M(f)M(gh) = M(fgh)$. Esto demuestra la asociatividad de la operación de unión por concatenación de matrices en el conjunto $M(F(\Sigma))$.

En cuanto al elemento neutro, se le representa por la matriz asociada a la palabra vacía ε, denotada como $M(\varepsilon)$. Para cualquier frase f, se cumple que $M(\varepsilon)M(f)$ es igual a $M(\varepsilon f)$, que es igual a $M(f)$. Por lo tanto, $M(\varepsilon)$ actúa como el elemento neutro en la operación de unión por concatenación de matrices en $M(F(\Sigma))$.

En conclusión, el conjunto de matrices asociadas $M(F(\Sigma))$ con la operación de unión por concatenación de matrices forma un monoide, ya que cumple con la propiedad de asociatividad y posee un elemento neutro.

Fin de la demostración ▪

Los monoides tienen una relevancia significativa en la resolución del *problema de las palabras* en la teoría combinatoria de grupos. Este problema, propuesto por Max Dehn (1911), se enfoca en determinar si dos palabras en un grupo dado son equivalentes o iguales.

En el contexto del *problema de las palabras*, se considera un grupo G con una presentación finita $\langle S \mid R \rangle$, donde S es un conjunto finito de generadores y R es un conjunto finito de relaciones entre esos generadores. Se eligen dos elementos a y b del grupo G y se expresan como productos de los elementos de S y sus inversos. El objetivo es decidir si a = b como elementos del grupo, es decir, si su producto es igual a la identidad del grupo.

Los monoides desempeñan un papel crucial en este problema, ya que un grupo se puede ver como un monoide con la adición de la inversa de cada elemento. Se emplean técnicas algebraicas y algoritmos para simplificar y manipular las palabras en el monoide asociado al grupo, lo que facilita la resolución del problema de equivalencia entre palabras.

Si se desea profundizar en el tema, la monografía de R. Book y F. Otto (1993) es una opción, así como el artículo de Cohen (1993). Más reciente, Ghadbane (2022)ha presentado un criptosistema basado en el *problema de las palabras* en un grupo G.

Prospectiva

Al modelar el conteo de letras con repetición de una palabra mediante una matriz se abre un camino a diversas posibilidades de análisis. En la actualidad, nuestra perspectiva desde el punto de vista algebraico se centra en dos direcciones diferentes. En primer lugar nos enfocamos en estudiar la generalización del conteo de letras de una palabra o frase considerando la necesidad de repetir el conteo una o varias veces, no solo limitado a cinco repeticiones cuando se utilizan los cinco dedos. Para esto, utilizamos una matriz con n filas (correspondientes al número de letras de la palabra) y 5 columnas (que representan los cinco dedos de la mano). En este sentido, nos hemos planteado resolver la siguiente pregunta: ¿Para qué valores m, aparte de 5, se cumple que el conteo de las letras se repita exactamente una o m veces manteniendo las mismas condiciones que para cinco repeticiones? La segunda dirección algebraica se enfoca en analizar el conteo de letras con repetición según el número de letras presentes en la palabra; en esta dirección, se busca la estructura de grupo para las matrices que contengan dos y cuatro letras diferentes. Además, nuestra perspectiva desde el punto de vista del área de la física está centrado en investigar el grupo de matrices que puedan aplicarse en temas de física. Finalmente, se explora la posibilidad de diseñar algunas secuencias didácticas para la enseñanza de conceptos algebraicos en estudiantes de ciencias e ingenierías a partir de los resultados obtenidos hasta ahora y de los que vendrán en el futuro. Con base en lo anterior, debido a la extensión del tema, se pretende darle continuidad a este artículo.

Conclusiones o resultados

Se han abordado varios conceptos fundamentales relacionados con el conteo de letras y las palabras, para lo cual se ha definido con precisión los términos de *palabra, longitud de una palabra* y la operación de conteo de letras utilizando los dedos de la mano derecha. Además, se ha demostrado que el conteo de letras con repetición de cualquier palabra P, *excluyendo* la palabra vacía, se clasifica como unitaria o de repetición 5.

En el análisis se observa un resultado interesante relacionado con las palabras de longitud 5 que tienen letras distintas. En estos casos particulares, se establece que la relación de identificación I es biyectiva y, por otro lado, cuando la cardinalidad de la palabra supera 5 la función de identificación I es sobreyectiva.

Además, hemos introducido el concepto de *matriz asociada*$M(P)$ para el conteo con repetición de una palabra mediante el cual se ha estudiado el conteo de letras con repetición en frases distintas de la vacía, donde se encuentra que estas frases pueden clasificarse como de repetición 5 o unitarias.

Por último, se define la operación binaria de unión por concatenación para el conjunto de matrices asociadas $M(F(\Sigma))$. Al explorar esta operación, se concluye que el conjunto de matrices asociadas $M(F(\Sigma))$, junto con la operación de unión por concatenación de matrices, forma un monoide.

De acuerdo con lo expuesto, los hallazgos abren nuevos caminos para futuras investigaciones del tema.

Figura 4
Contando con los dedos
Fuente: Fernando R. González Díaz, óleo sobre tela, 55 cm x 40 cm, 2020.

Agradecimientos

Agradecemos a los árbitros por su compromiso, tiempo, dedicación y valiosos comentarios para mejorar la calidad y claridad del artículo.

Fernando Ricardo González Díaz agradece sinceramente a Ignacio González Díaz y José Macario Moreno Calzada por su valioso apoyo en la realización de la pintura y por contribución al artículo. Ricardo García Salcedo desea expresar su gratitud por el apoyo proporcionado a los proyectos SIP20230505-IPN, así como por las becas COFAA-IPN y EDI-IPN del Instituto Politécnico Nacional. Asimismo, es importante mencionar que este trabajo ha recibido un respaldo parcial del proyecto FORDECYT-PRONACES-CONACYT CF-MG-2558591.

Referencias

Aranda, E. (2016). *Álgebra lineal con aplicaciones y Python*. España.

Balari, S. (2014). *Teoría de lenguajes formales: una introducción para lingüistas*. https://ddd.uab.cat/record/116304>

Birchenall, L. B. y Müller, O. (2014). La teoría lingüística de Noam Chomsky: del inicio a la actualidad. *Lenguaje*, *42*(2), 417-442.

Bender, A., & Beller, S. (2012). Nature and culture of finger counting: Diversity and representational effects of an embodied cognitive tool. *Cognition*, *124*(2), 156-182.

Book, R. V., & Otto, F. (1993). String-rewriting systems. In R. V. Book & F. Otto, *String-rewriting systems* (pp. 35-64). New York: Springer Verlag.

Butterworth, B. (1999). *What counts: How every brain is hardwired for math.* Free Press.

Cayley, A. (2009). *The collected mathematical papers.* Cambridge: Cambridge University Press.

Ceballos, H. A. Z. y De Armas, T. R. A. (2013). Redefinición de grupos y subgrupo difusos. *Scientia Et Technica, 18*(2), 363-368.

Chomsky, N. (1970). *Aspectos de la teoría de la sintaxis*. Madrid: Aguilar.

Chomsky, N. (1978). *Estructuras sintácticas*. México: Siglo XXI.

Cohen, D. E. (1993). String rewriting — A survey for group theorists. In Graham A. Niblo & Martin A. Roller, *Geometric Group Theory 1*, 37-47.

Dehn, M. (1911). Über unendliche diskontinuierliche Gruppen. *Mathematische Annalen, 71*(1), 116-144. https://doi.org/10.1007/BF01456932

DeRocher, J. E., Miron, M. S., Patten, S. M., & Pratt, C. C. (1973). *The counting of words: A review of the history, techniques and theory of word counts with annotated bibliography*. New York: Syracuse University Research Corporation.

Domahs, F., Moeller, K., Huber, S., Willmes, K., & Nuerk, H. C. (2010). Embodied numerosity: implicit hand-based representations influence symbolic number processing across cultures. *Cognition, 116*(2), 251-266. http://doi.org/10.1016/j.cognition.2010.05.007

Gao, Z., MacFie, A., & Panario, D. (2011). Counting Words by Number of Occurrences of Some Patterns. *The Electronic Journal of Combinatorics, 18*(1).

Garay, C. E. (2019). *Monoides abelianos en álgebra y geometría.* México: CIMAT. http://personal.cimat.mx:8181/~cristhian.garay/escuela.pdf

Gavin, M. (2020). Is there a text in my data? (Part 1): On counting words. *Journal of Cultural Analytics*, *5*(1).

Gelman, R., & Butterworth, B. (2005). Number and language: how are they related?. *Trends in Cognitive Sciences, 9*(1), 6-10.

Ghadbane, N. (2022). On public key cryptosystem based on the word problem in a group. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography, 25*(6), 1563-1568.

Grossman, S. I. (1994). *Elementary linear algebra.* USA: Cole Publishing Company Pacific Grove.

Ifranh, G. (1987). *Las cifras: historia de una gran invención.* Madrid: Alianza.

Jacobson, N. (2009). *Basic Algebra I* (second edition). New York: Dover Publications.

Jonsson, D. (2019). Magnitudes Reborn: Quantity Spaces as Scalable Monoids.*Rings and Algebras*. https://arxiv.org/abs/1911.07236

Lang, S. (2005). *Undergraduate Algebra* (3rd ed.). Berlin: Springer-Verlag.

Lasnik, H., & Lohndal, T. (2010). Government–binding/principles and parameters theory. WIREs. **Wiley Interdisciplinary Revie**ws. *Cognitive Science, 1*(1), 40-50.

Liaqat, I., & Younas, W. (2021). Some important applications of semigroups. *Journal of Mathematical Sciences & Computational Mathematics, 2*(2), 317-321.

Lluis-Puebla, E. (2015). Teorías matemáticas, matemática aplicada y computación. CIENCIA *ergo-sum*, *13*(1), 91-98. https://cienciaergosum.uaemex.mx/article/view/7894

Lothaire, M. (2005). *Applied combinatorics on words.* Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781107341005

Luzardo, D., & Peña, A. J. (2006). Historia del álgebra lineal hasta los albores del siglo XX. *Divulgaciones Matemáticas, 14*(2), 153-170.

Maclellan, E. (1995). Counting all, counting on, counting up, counting down: The role of counting in learning to add and subtract. *Education 3-13, 23*(3), 17-21.

Previtali, P., Rinaldi, L., & Girelli, L. (2011). Nature or nurture in finger counting: a review on the determinants of the direction of number–finger mapping. *Frontiers in Psychology, 2*, 363.

Rosales, A. (2008). Evolución histórica del concepto de matriz. *Mathematics, Education and Internet Journal, 9*(1), 1-20. https://doi.org/10.18845/rdmei.v9i1.2038

Sabando Álvarez, M. C. (2020). *Numerical monoids, numerical operads and applications to combinatorics* (Bachelor's thesis, Universidad de Investigación de Tecnología Experimental Yachay).

Soylu, F., Lester Jr, F. K., & Newman, S. D. (2018). You can count on your fingers: The role of fingers in early mathematical development. *Journal of Numerical Cognition, 4*(1), 107-135.https://doi.org/10.5964/jnc.v4i1.85

Steinberg, B. (2016). *Representation theory of finite monoids*. Springer.

Sylvester, J. J. (2009). XXXVII. On the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1*(4), 295-305. https://doi.org/10.1080/14786445108646735

Weisstein, E. W. (2023). *Right-Hand Rule*. *MathWorld*. https://mathworld.wolfram.com/Right-HandRule.html

Ycart, B. (2012). *Letter counting: astem cell for Cryptology, Quantitative Linguistics, and Statistics*. https://arxiv.org/abs/1211.6847

Financiamiento

Fuente: Instituto Politécnico Nacional
Nº de contrato: SIP20230505-IPN

Información adicional

redalyc-journal-id: 104

Enlace alternativo

https://cienciaergosum.uaemex.mx/article/view/20935 (html)

Fernando Ricardo González Díaz, Ricardo García Salcedo

Conteo de letras de una frase con los dedos y matrices
Counting letters of a sentence with fingers and matrices

CIENCIA ergo-sum, Revista Científica Multidisciplinaria de Prospectiva
vol. 31, núm. 1, 234, 2024
Universidad Autónoma del Estado de México, México
ergosum@uaemex.mx

ISSN: 1405-0269
ISSN-E: 2395-8782

DOI: https://doi.org/10.30878/ces.v31n0a19