EconoQuantum, volumen 19, número 2, julio-diciembre de 2022, pp. 83-92
DOI: https://doi.org/10.18381/eq.v19i2.7270

Subastas simultáneas de bienes idénticos mediante el mecanismo del primer precio con premio para los compradores

Simultaneous auctions of identical items by first-price close mechanism with a bonus for buyers

Karla Flores-Zarur
William Olvera-Lopez

Resumen.
Objetivo: Estudiar, desde el punto de vista del vendedor, la manera de subastar un conjunto finito de bienes idénticos donde se otorga un cierto premio al postor que obtenga el conjunto completo de bienes, tomando en cuenta el comportamiento estratégico de los postores.
Metodología: Se modela la situación como un juego bayesiano considerando el espacio de estrategias de cada jugador como $\mathbb{R}_+^m$.
Resultados: Se muestra un equilibrio bayesiano simétrico y se demuestra que el vendedor es indiferente entre algunas maneras de ofrecer la utilidad extra, al obtener el mismo rendimiento esperado.
Limitaciones: El modelo soló considera el caso de bienes idénticos.
Originalidad: Se encuentra la puja de equilibrio para un caso de m subastas simultáneas y n postores, bajo el mecanismo del primer precio considerando utilidad extra modeladas mediante juegos bayesianos.
Conclusiones: Los cambios en el rendimiento esperado del vendedor no son sensibles ante algunas maneras de otorgar el incentivo.
Palabras Clave: Subastas Simultáneas, Mecanismo del Primer Precio, Juegos Bayesianos, Equilibrio Bayesiano Simétrico, Rendimiento Esperado del Vendedor.
Clasificación JEL: C72, C73

Abstract.
Objective: In this paper we study, from the seller's perspective, how to auction a finite set of identical items when the buyer who obtains the whole set of goods (if any) gets a bonus, such that the seller maximizes his expected revenue and taking into account the strategic behavior of the bidders.
Methodology: We use Bayesian Games for modelling the situation considering a strategy space equal to $\mathbb{R}_+^m$ for each bidder.
Results: We show a Symmetric Bayesian Equilibrium for the model as well as the seller's indifference between several natural ways for offering the bonus to a bidder getting the whole set of items, because he obtains the same expected revenue.
Limitations: The model regards only identical items.
Originality: We show an equilibrium bid for a n-personal model of m Simultaneous Auctions under first-price close mechanism considering that there is a kind of extra profit.
Conclusions: The seller is indifferent between several ways to offer the bonus. It could be interesting to contrast the theoretical results under an experimental framework.
Key Words: Auctions, First Price Mechanism, Bayesian Games, Symmetric Bayesian Nash Equilibrium, Seller's Expected Revenue.
JEL Classification: C72, C73

Karla Flores-Zarur: Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México. karla.zarur@uaslp.mx, ORCID: 0000-0002-5639-1560
William Olvera-Lopez: Universidad Autónoma de San Luis Potosí. México. william.olvera@uaslp.mx,ORCID: 0000-0001-5383-9051

Recepción: 27/01/2022. **Aceptación:** 02/06/2022

Introducción

Las subastas analizadas como juegos bayesianos, propuestos por Harsanyi (1967), permiten estudiar el comportamiento estratégico de postores y vendedores. Normalmente estos modelos consideran que los postores no poseen información certera acerca de cómo sus oponentes valoran los objetos, tal y como sucede en el modelo clásico de la subasta cerrada del primer precio por un único bien, donde se asume que la falta de información es compensada en el modelo por variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas asociadas a la valoración del objeto subastado. Este supuesto modela una especie de simetría con respecto a la falta de información entre los postores y el hecho de que la manera en que cada postor valora el objeto no se ve influenciada por la forma en que los demás lo hacen. Este tipo de modelos han sido estudiados satisfactoriamente por Vickery (1962), Milgrom y Weber (1982) y mas recientemente por Krishna (2009).

Al cambiar a un contexto de subastas simultáneas donde existe la posibilidad de obtener una ganancia extra condicionada a ganar cierto número de subastas, y además se preserva el mecanismo cerrado del primer precio, los resultados en la literatura referentes al comportamiento estratégico se vuelven escasos, a pesar de sus múltiples aplicaciones dentro del comercio electrónico y otros ámbitos. Krishna y Rosenthal (1996) muestran algunos resultados para el caso de subastas simultáneas bajo el mecanismo del segundo precio y bienes con sinergias. Por otro lado, Rosenthal y Wang (1996) muestran condiciones necesarias y suficientes que una estrategia debe cumplir para ser Equilibrio Bayesiano Simétrico (EBS) en un caso particular de subastas simultáneas del primer precio. Posteriormente, Szentes y Rosenthal (2003) exponen un caso bipersonal de tres subastas simultaneas por bienes idénticos, donde se considera que la valoración por un solo bien es cero pero cuando se ganan dos o mas bienes la valoración del conjunto es positiva e idéntica entre los postores y esta información es de conocimiento común. El resultado principal en dicho estudio muestra un equilibrio en estrategias mixtas el cual es obtenido mediante una técnica constructiva y posee interesantes interpretaciones geométricas.

El interés teórico alrededor de este tema se centra en que no siempre es posible llevar los casos de subastas simultáneas a ser estudiados como juegos bayesianos debido a la complejidad de las expresiones probabilísticas asociadas a cada posible modelo.

Además de los estudios teóricos antes mencionados, existen diversas aplicaciones practicas que motivaron nuestro estudio. Una de ellas es la reciente técnica de comercialización de productos en condiciones especiales que algunas empresas están realizando mediante diferentes mecanismos de subastas. Por ejemplo, en el caso de las empresas dedicadas a la fabricación de productos electrónicos, las cuales destinan algunos de sus productos a sus departamentos de reparación o reensamblaje para su reacondicionamiento debido a defectos de fabricación y/o fallas en su funcionamiento. Los productos que salen de estos talleres ya no poseen las mismas características técnicas que ofrece un producto completamente nuevo, sin embargo, existen distintas categorías conocidas por los compradores, las cuales describen el grado de modificación que a sufrido el producto. Posteriormente, tales productos salen de esos talleres para ser subastados en lotes de bienes idénticos mediante páginas de comercio electrónico. Las características de este ejemplo muestran que cada posible comprador esta interesado en adquirir cierta cantidad dada de bienes idénticos y que además puede expresar la valoración del conjunto completo de objetos de acuerdo a la cantidad de bienes que conforman el lote subastado. Bajo el esquema de única subasta podemos destacar que, para los posibles compradores, cambiar a un mecanismo que ofrezca asignar cada objeto de manera individual implicaría que la disposición a pagar por un objeto adicional sería constante debido al interés de los participantes por obtener el lote completo.

Así, al considerar que la disposición a pagar de los posibles compradores es constante, surge nuestro interés por estudiar diferentes maneras de subastar lotes de productos idénticos. Particularmente, exploramos el caso de un mecanismo de subastas simultaneas con premio para los compradores donde posiblemente podrían generarse ingresos más altos para los vendedores debido a que la forma de pujar de cada postor no solo tomaría en cuenta la valoración individual de bien si no también el posible premio.

En esta investigación proponemos un modelo personal para un caso de subastas simultáneas por bienes idénticos bajo el mecanismo cerrado del primer precio con la particularidad de que si algún postor llegase a obtener el lote completo de bienes obtendrá una utilidad extra, la cual representa un premio que el vendedor ofrece para incentivar a los postores a realizar pujas más altas. Dicho incentivo puede ser una oferta de envío gratis o bien incluir algunas piezas extras para el ganador, lo cual es información de conocimiento común entre los postores. Así, vemos que para este caso la valoración del conjunto completo de bienes es mayor a la suma de las valoraciones individuales de los objetos para todos los postores. Con ello, proponemos que los postores racionalizan sus pujas considerando la valoración del objeto y la utilidad extra de acuerdo a una función bivariada. Además, asumimos que la utilidad extra está dada en función de la valoración individual del objeto de acuerdo a una función $H(\cdot)$. El marco anterior nos permitirá llevar esta situación a un juego bayesiano y encontrar los equilibrios asociados al comportamiento estratégico de los postores y analizar con especial atención el rendimiento esperado del vendedor cuando enfrenta esta situación. Particularmente, comprobaremos si el rendimiento esperado del vendedor se ve afectado ante diferentes propuestas para la función $H(\cdot)$ y compararemos nuestro caso con la situación donde el vendedor decide subastar el lote completo de objetos junto con el incentivo adicional mediante una única subasta cerrada del primer precio.

El artículo se organiza de la siguiente manera: En la Sección 2 mostraremos el modelo general y explicaremos la construcción que nos lleva a nuestro primer teorema. En la Sección 3 analizaremos el rendimiento esperado del vendedor en diferentes casos. Finalmente, en la Sección 4 cerramos nuestra investigación analizando los resultados y explicando algunos casos abiertos para posteriores investigaciones.

Modelo general

Sea N={1,2,…,n} el conjunto de postores y M={1,2,-,m} el conjunto de bienes. Cada postor, $i \in N$, tiene una valoración individual por cada bien $j \in M$ denotada por a_i^j y una utilidad extra denotada por c_i que obtendrá si obtiene todos los bienes a subastar. Así, la utilidad del jugador i por cualquier subconjunto $J \subset M$ está dada por $\sum_{j \in J} a_i^j$ y por el conjunto completo de bienes queda dada por $c_i + \sum_{j \in M} a_i^j$.

Siguiendo la metodología clásica, modelaremos como un juego bayesiano la situación donde n postores enfrentan m subastas simultáneas cerradas del primer precio. Asumiremos que cada jugador racionaliza su puja de acuerdo a una estrategia de puja $b(\cdot)$. El juego será analizado desde la perspectiva del postor 1 ya que se considera que los jugadores son simétricos. Denotaremos por b_i^j la puja del postor $i \in N$ por el bien $j \in M$. Así, $\{b_i^j\}_{j \in M}$ representa el conjunto de pujas del jugador i.

Nótese que cada jugador puede obtener 2^m posibles subconjuntos de bienes como resultado de las subastas. Si excluimos el caso donde el postor 1 pierde todas las subastas, hay 2^m-1 términos ponderados por sus respectivas probabilidades, relevantes para la utilidad esperada del jugador 1. Así, la utilidad esperada del postor 1 está dada por:

$$\pi(\{b_1^j\}_{j\in M}) = \textstyle\sum_{J\subset M}\left[\sum_{j\in J}(a_1^j - b_1^j)P\left(\left\{\max_{i\in N\setminus\{1\}}\{b_i^j\} < b_1^j\right\}_{j\in J}, \left\{\max_{i\in N\setminus\{1\}}\{b_i^j\} > b_1^j\right\}_{j\in M\setminus J}\right)\right] + \left(\sum_{j\in M}(a_1^j - b_1^j) + c_1\right)P\left(\left\{\max_{i\in N\setminus\{1\}}\{b_i^j\} < b_1^j\right\}_{j\in M}\right), \tag{1}$$

donde para todo $i\in N\setminus\{1\}$ y todo $j \in M$, cada b_i^j es una variable aleatoria independiente son soporte en $\mathbb{R}_+$. Factorizando el término $\left(a_1^j - b_1^j\right)$ de la ecuación anterior, podemos observar que el término probabilístico asociado es la probabilidad marginal de la variable aleatoria $\max_{i\in N\setminus\{1\}}\{b_i^j\}$. Tomando en cuenta lo anterior y reescribiendo la expresión general dada por la ecuación (1) obtenemos:

$$\pi(\{b_1^j\}_{j\in M}) = \sum_{j\in M}\left[(a_1^j - b_1^j)P\left(\max_{i\in N\setminus\{1\}}\{b_i^j\} < b_1^j\right)\right] + c_1 P\left(\left\{\max_{i\in N\setminus\{1\}}\{b_i^j\} < b_1^j\right\}_{j\in M}\right) \tag{2}$$

Ahora, suponemos que cada postor racionaliza su puja del mismo modo de acuerdo a una función bivariada $b(\cdot)$ que considera dos criterios de decisión. Además, asumamos que los postores que no son el postor 1 pujan de acuerdo a la valoración individual del bien y la utilidad extra. Lo anterior implica que para todo $i \in N \setminus\{1\}$ se tiene que $b_i^j = b\left(a_i^j, c_i\right)$con $b(\cdot)$ una función creciente entrada a entrada. Dadas estas condiciones, el postor 1 tendrá que averiguar cuál es su mejor respuesta ante esta situación, lo cual es equivalente a elegir $\{x_j\}_{j\in M}$ y y que maximicen su utilidad esperada:

$$\pi(\{x_j\}_{j\in M}, y) = \sum_{j\in M}\left[\left(a_1^j - b(x_j, y)\right)P\left(\max_{i\in N\setminus\{1\}}\{b(a_i^j, c_i)\} < b(x_1^j, y)\right)\right] + c_1 P\left(\left\{\max_{i\in N\setminus\{1\}}\{b(a_i^j, c_i)\} < b(x_j, y)\right\}_{j\in M}\right). \tag{3}$$

Con esta construcción podemos desarrollar diferentes casos dependiendo de la información que los postores tengan en cada situación.

En este artículo, desarrollaremos el caso que considera que los bienes subastados son idénticos y que la valoración individual es un valor privado e independiente. También, supondremos que la utilidad extra esta definida en función de la valoración individual. Algunos ejemplos de dicho incentivo se dan bajo el contexto del comercio electrónico, como lo puede ser ofrecer envió gratis, o bien, una cantidad extra de artículos.

Considerando que los bienes son idénticos tenemos que para todo $i \in N$ y $j \in M, a_i^j = a_i$, donde a_i representa la valoración del postor i por un bien. Así, tenemos que todo $i \in N$ recibe un tipo a_i que será elegido de manera independiente por la función de distribución $F(\cdot)$ con densidad $f(\cdot)>0$ en el intervalo $[0,\bar{a}]$.

Por su parte, la utilidad extra estará dada por una función $H:[0,\bar{a}]\to\mathbb{R}_+$ la cual es de conocimiento común entre los postores y se interpreta como la regla que determina el valor de la utilidad extra, la cual dependerá de como se valore el bien de manera individual, esto es, $c_i\equiv H(a_i)$. Por ejemplo, si consideramos $H_c(a_i)=c$ con $c \in\mathbb{R}_+$ significa que la utilidad extra está dada por una cantidad fija y conocida por los postores, como lo puede ser la oferta de envío gratis. Por otro lado, si consideramos que $H_k(a_i)=ka_i$, con $k \in\mathbb{N}$, significa que la utilidad extra estaría dada por una cantidad adicional de bienes. Denotamos entonces por v_i a la valoración del jugador $i \in N$ por el conjunto completo de bienes, la cual está dada por $v_i \equiv ma_i+H(a_i)$.

Dado que los bienes son valorados de la misma manera, asumimos que los postores pujan la misma cantidad en todas las subastas. Entonces, tenemos que para todo $i \in N$ y $j \in M$, $b_i^j=b_i$. Notemos que al pujar la misma cantidad en cada subasta los posibles resultados de las subastas son ganar o perder todo el conjunto de bienes. Reescribiendo la ecuación (2) con estas implicaciones obtenemos:

$$\begin{aligned}\pi(b_1) &= \sum_{j\in M}\left[(a_1 - b_1)P\left(\max_{i\in N\setminus\{1\}}\{b_i\} < b_1\right)\right] + H(a_1)P\left(\left\{\max_{i\in N\setminus\{1\}}\{b_i\} < b_1\right\}_{j\in M}\right)\\ &= [m(a_1 - b_1) + H(a_1)]P\left(\max_{i\in N\setminus\{1\}}\{b_i\} < b_1\right).\end{aligned} \tag{4}$$

Ahora, si suponemos que cada postor racionaliza su puja de acuerdo a la función bivariada $b(\cdot)$ y que los criterios de puja en los que se basan los postores $i \in N \setminus \{1\}$ son la valoración individual del bien y la utilidad extra tenemos que $b_i = b(a_i, H(a_i))$. Así, definimos la función $\alpha(a_i) \equiv b(a_i, H(a_i))$ la cual conserva las propiedades de ser creciente, no negativa y $\alpha(0)=0$. De este modo la utilidad esperada del postor 1 queda dada por:

$$\text{(5)} \quad \pi(x) = \left[m\left(a_1 - \alpha(x)\right) + H(a_1)\right] P\left(\max_{i \in N \setminus \{1\}} \{\alpha(a_i)\} < \alpha(x)\right).$$

Dada la ecuación (5) podemos ofrecer un equilibrio bayesiano simétrico determinando la mejor respuesta del postor 1 dado que los demás postores pujan de acuerdo a $\alpha(a_i)$. Así, nuestro primer resultado queda dado por el siguiente Teorema:

Teorema:

Para el caso de m subastas simultáneas cerradas del primer precio y n postores donde se considera que los bienes subastados son idénticos, la valoración individual es un valor privado e independiente, la utilidad extra está definida por $H(\cdot)$ y la estrategia de puja está dada por $\alpha(\cdot)$, $b_i = b(a_i, H(a_i)) = \alpha^*(a_i)$, con

$$\text{(6)} \quad \begin{aligned} \alpha^*(a_i) &= \frac{(n-1)\int_0^{a_i} xF(x)^{n-2} f(x)dx}{F(a_i)^{n-1}} + \frac{(n-1)\int_0^{a_i} H(x)F(x)^{n-2} f(x)dx}{mF(a_i)^{n-1}} \\ &= \frac{(n-1)\int_0^{a_i}\left(x + \frac{H(x)}{m}\right)F(x)^{n-2} f(x)dx}{F(a_i)^{n-1}}, \end{aligned}$$

es un Equilibrio Bayesiano Simétrico.

Prueba: Notemos que,

$$P\left(\max_{i \in N \setminus \{1\}} \{\alpha(a_i)\} < \alpha(x)\right) = P\left(\alpha\left(\max_{i \in N \setminus \{1\}} \{a_i\}\right) < \alpha(x)\right)$$

debido a que $\alpha(\cdot)$ es una función creciente. Después, aplicando su inversa en ambos lados de la desigualdad obtenemos:

$$\text{(7)} \quad \pi(x) = \left[m\left(a_1 - \alpha(x)\right) + H(a_1)\right] P\left(\max_{i \in N \setminus \{1\}} \{a_i\} < x\right).$$

Sea $F_x(\cdot)$ la función de distribución de la variable aleatoria asociada al máximo de las valoraciones individuales. Considerando que las valoraciones individuales están dadas por valores privados e independientes tenemos que

$$P\left(\max_{i \in N \setminus \{1\}} \{a_i\} < x\right) = F_X(x) = F(x)^{n-1}$$

y así obtenemos:

$$\text{(8)} \quad \pi(x) = \left[m\left(a_1 - \alpha(x)\right) + H(a_1)\right]F(x)^{n-1}.$$

Después, tomando la derivada de π con respecto de x obtenemos:

$$\text{(9)} \quad -1)F(x)^{n-2} f(x)\left[m\left(a_1 - \alpha(x)\right) + H(a_1)\right] - m\alpha$$

Aplicando las condiciones de primer orden y haciendo $x=a_1$, por la definición de equilibrio simétrico, obtenemos la siguiente condición:

$$\text{(10)} \quad (n-1)F(a_1)^{n-2} f(a_1)\left[m\left(a_1 - \alpha(a_1)\right) + H(a_1)\right] = m\alpha'(a_1)F(a_1)^{n-1}.$$

Reacomodando algunos términos obtenemos la siguiente igualdad:

$$\text{(11)} \quad m[\alpha(a_1)F(a_1)^{n-1}]' = [ma_1 + H(a_1)](n-1)F(a_1)^{n-2} f(a_1).$$

Después, aplicando el Teorema Fundamental del Calculo, tenemos:

$$\text{(12)} \quad m\alpha(a_1)F(a_1)^{n-1} = (n-1)\int_0^{a_1} [(mx + H(x)]F(x)^{n-2} f(x)dx.$$

Despejando y separando las integrales de la derecha, obtenemos la siguiente expresión:

$$\text{(13)} \quad \alpha^*(a_1) = \frac{(n-1)\int_0^{a_1} xF(x)^{n-2} f(x)dx}{F(a_1)^{n-1}} + \frac{(n-1)\int_0^{a_1} H(x)F(x)^{n-2} f(x)dx}{mF(a_1)^{n-1}}.$$

La expresión (13) proporciona la forma funcional de la puja dada por $\alpha*(\cdot)$. Para demostrar que dicha expresión en verdad representa un equilibrio bayesiano simétrico, debemos probar que, dado que los postores $i \in N \setminus \{1\}$ pujan de acuerdo a $\alpha^*(a_i)$, la utilidad esperada del postor 1 se maximiza cuando $x=a_1$. Para lograrlo analizaremos el cambio de signo en $\pi'(\cdot)$ cuando $x \neq c_1$.

Sea $x<c_1$. De la ecuación (11) tenemos que

$$\alpha'(a_1) = \frac{(n-1)F(a_1)^{n-2}f(a_1)[m(a_1-\alpha(a_1))+H(a_1)]}{mF(a_1)^{n-1}}.$$

Usando lo anterior y evaluando $\pi'(\cdot)$ en x obtenemos:

$$(14) \quad \pi'(x) = (n-1)F(x)^{n-2}f(x)[m(a_1-\alpha(x))+H(a_1)] - \frac{mF(x)^{n-1}(n-1)F(x)^{n-2}f(x)[m(x-\alpha(x))+H(x)]}{mF(x)^{n-1}}.$$

Simplificando la ecuación (14) obtenemos:

$$(15) \quad \pi'(x) = (n-1)F(x)^{n-2}f(x)[m(a_1-x)] > 0$$

Con un razonamiento similar podemos probar que si $x>c_1$, $\pi'(x)<0$.

Notemos que

$$\alpha^*(a_i) = \frac{(n-1)\int_0^{a_i} xF(x)^{n-2}f(x)dx}{F(a_i)^{n-1}} + \frac{(n-1)\int_0^{a_i} H(x)F(x)^{n-2}f(x)dx}{mF(a_i)^{n-1}}$$

es creciente en a_i y por tanto es un equilibrio bayesiano simétrico que asegura que quien valora más el conjunto de bienes ganará todas las subastas, excluyendo la posibilidad de que algún postor pudiese obtener utilidad negativa al obtener sólo un subconjunto de bienes.

Por otro lado observamos que la puja de equilibrio $\alpha*(\cdot)$ se compone de dos términos, donde el término de la izquierda corresponde a la bien conocida expresión de la puja de equilibrio de la subasta cerrada del primer precio por un bien valorado en ai. Por su parte, el término de la derecha se interpreta como la cantidad adicional que los postores están dispuestos a pujar en cada subasta dado que se ofrece un incentivo dado por $H(\cdot)$. Por ejemplo, si consideramos $H_c(x)$, donde la utilidad extra está dada por una cantidad fija c, tenemos que $\alpha*(\cdot)$ queda dada por la siguiente expresión:

$$(16) \quad \frac{(n-1)\int_0^{a_i} H_c(x)F(x)^{n-2}f(x)dx}{mF(a_i)^{n-1}} = \frac{c\int_0^{a_i}(n-1)F(x)^{n-2}f(x)dx}{mF(a_i)^{n-1}} = \frac{c}{m}.$$

Lo anterior muestra que la cantidad adicional que los postores pujan por cada bien equivale a distribuir en m partes iguales el valor de la utilidad extra. Ahora bien, si consideramos $H_k(x)$, o sea cuando la utilidad extra está dada por un número adicional de unidades:

$$(17) \quad \frac{(n-1)\int_0^{a_i} H_k(x)F(x)^{n-2}f(x)dx}{mF(a_i)^{n-1}} = \frac{k}{m}\frac{(n-1)\int_0^{a_i} xF(x)^{n-2}f(x)dx}{F(a_i)^{n-1}},$$

lo cual muestra que la cantidad adicional que los postores pujan en este caso equivale a distribuir la puja de equilibrio del primer precio en $\frac{k}{m}$ partes iguales, esto debido a que el incentivo está dado por k unidades adicionales del bien y cada postor tiene su propia valoración personal, por lo que la cantidad adicional que pujan está en función de la propia valoración y de la distribución de las valoraciones de los oponentes.

Como ejemplo, veamos el equilibrio obtenido asumiendo que las valoraciones individuales de los bienes siguen una distribución uniforme en [0,1]. Con ello, estaremos analizando el caso donde los postores desconocen por completo la manera en que cada objeto es valorado por sus oponentes y de esa forma obtener una expresión de la puja de equilibrio más fácil de interpretar. Reescribiendo la expresión (6) para el caso de $H_c(\cdot)$ tenemos:

$$(18) \quad \alpha^*(a_i) = \frac{(n-1)\int_0^{a_i} x^{n-1}dx}{a_i^{n-1}} + \frac{(n-1)c\int_0^{a_i} x^{n-2}\,dx}{ma_i^{n-1}} = \frac{(n-1)}{n}a_i + \frac{c}{m}.$$

Ahora bien, considerando el caso para $H_k(\cdot)$ tenemos:

$$(19) \quad \alpha^*(a_i) = \left(1+\frac{k}{m}\right)\frac{(n-1)\int_0^{a_i} x^{n-1}dx}{a_i^{n-1}} = \left(1+\frac{k}{m}\right)\frac{(n-1)}{n}a_i.$$

Notemos que las expresiones (18) y (19) son crecientes en el número de jugadores, lo que significa que entre mayor sea el número de postores mayor será la puja. Del mismo modo ambas son crecientes respecto de la utilidad extra lo que nos hace plantearnos si existe alguna manera de ofrecer la utilidad extra para que el vendedor incremente su rendimiento esperado.

Rendimiento esperado del vendedor

En esta sección analizaremos la ganancia esperada del vendedor para nuestro caso de subastas simultáneas. Nuestro análisis se centra en estudiar diferentes propuestas respecto a la función $H(\cdot)$, la cual describe la forma en que está definida la utilidad extra para los postores.

Se asume que el vendedor tiene una cantidad fija de bienes junto con la utilidad extra para ofertar a los postores, donde debería de poder analizar cómo subastar estos bienes de modo que los postores reciban un mejor incentivo y posiblemente lograr pujas más altas para obtener un mejor rendimiento esperado.

Por ejemplo, si suponemos que el vendedor posee una cantidad fija de bienes idénticos e indivisibles dada por $r \in \mathbb{N}$, donde $r=k+m$, y consideramos $H_k(x)$, tenemos un caso donde para los postores es de conocimiento común que si alguno de ellos gana las m subastas obtendría k unidades extra de bienes. Por otro lado, si consideramos $H_c(x)$, tendríamos que la utilidad extra estaría dada por una cantidad fija y conocida dada por c. Una manera de sintetizar el análisis de ambos casos es definiendo $H_{k,c}(x) \equiv kx+c$, con $k \in \mathbb{N}$ y $c \in \mathbb{R}_+$ y analizando la utilidad esperada del vendedor para este caso.

Denotamos por R^1 la ganancia esperada del vendedor para nuestro caso de subastas simultáneas cuando los postores siguen como estrategia de puja $\alpha^*(\cdot)$. Entonces:

$$R^1 = \mathbb{E}\left(m\alpha^*\left(\max_{i\in N}\{a_i\}\right)\right) = m\mathbb{E}\left(\alpha^*\left(\max_{i\in N}\{a_i\}\right)\right). \tag{20}$$

Dado que la valoración individual del bien está dada por un valor privado e independiente tenemos que si $F_M(\cdot)$ es la distribución asociada a la variable aleatoria $\max_{i\in N}\{a_i\}$, entonces $F_M(x)=F(x)^n$ y por tanto $f_M(x)=nF(x)^{n-1}f(x)$. Así, la ganancia esperada del vendedor queda dada por:

$$R^1 = m\int_0^{\bar{a}} \alpha^*(x) nF(x)^{n-1} f(x)dx. \tag{21}$$

Considerando el caso donde la utilidad extra está dada por $H_{k,c}(\cdot)$ y el vendedor posee r bienes idénticos e indivisibles y una cantidad fija c>0 para dar como incentivo, determinaremos si la manera en que el vendedor distribuye los r bienes entre las m subastas y los k objetos extras que ofrece en promoción implica algún cambio en su rendimiento esperado. También analizaremos cómo afecta el monto adicional dado por c. Reescribiendo (21) bajo estos supuestos obtenemos la siguiente expresión:

$$R^1 = m\int_0^{\bar{a}} \left[\frac{(n-1)\int_0^x \left(y+\frac{ky}{m}+\frac{c}{m}\right)F(y)^{n-2}f(y)dy}{F(x)^{n-1}}\right] nF(x)^{n-1}f(x)dx. \tag{22}$$

Reacomodando algunos términos obtenemos la siguiente equivalencia:

$$\begin{aligned} R^1 &= m\int_0^{\bar{a}} \left[\frac{(n-1)\int_0^x \left(1+\frac{k}{m}\right)yF(y)^{n-2}f(y)dy}{F(x)^{n-1}}\right] nF(x)^{n-1}f(x)dx \\ &\quad + m\int_0^{\bar{a}} \left[\frac{(n-1)\int_0^x \frac{c}{m}F(y)^{n-2}f(y)dy}{F(x)^{n-1}}\right] nF(x)^{n-1}f(x)dx. \end{aligned} \tag{23}$$

Notemos que

$$\frac{(n-1)\int_0^x \frac{c}{m}F(y)^{n-2}f(y)dy}{F(x)^{n-1}} = \frac{\frac{c}{m}\int_0^x (n-1)F(y)^{n-2}f(y)dy}{F(x)^{n-1}} = \frac{c}{m}. \tag{24}$$

De igual manera vemos que

$$m\int_0^{\bar{a}} \frac{c}{m} nF(x)^{n-1}f(x)dx = cF(\bar{a}) = c. \tag{25}$$

Denotando por

$$\widehat{b^*}(x) \equiv \frac{(n-1)\int_0^x yF(y)^{n-2}f(y)dy}{F(x)^{n-1}}$$

la bien conocida puja de equilibrio de la subasta cerrada del primer precio por un bien valorado en x, sustituyendo (23) en (21) y factorizando el término $\left(1+\frac{k}{m}\right)$ obtenemos:

(26)

$$R^1 = (m+k)\int_0^{\bar{a}} \widehat{b^{*}}(x) nF(x)^{n-1} f(x)dx + c = r\int_0^{\bar{a}} \widehat{b^{*}}(x) nF(x)^{n-1} f(x)dx + c.$$

La expresión anterior muestra que sin importar cómo el vendedor distribuya los r bienes, entre las m subastas y los k bienes extras, su ingreso esperado es el mismo. También, observemos que cuando parte del incentivo ofrecido por el vendedor está dado por una constante $c > 0$, sucede que el vendedor siempre recupera dicho valor por lo que tampoco influye de manera determinante en su ingreso esperado. Esta conclusión resulta ser un tanto contraintuitiva debido a que se esperaría que en la práctica los postores cambiaran la manera de pujar cuando el incentivo que les ofrecen cambia.

Ahora buscaremos determinar el rendimiento esperado del vendedor cuando decide subastar el conjunto completo de bienes junto con la utilidad extra mediante una sola subasta cerrada del primer precio. Supongamos que los postores $i \in N$ pujan en equilibrio de acuerdo a la valoración del conjunto completo de bienes, del mismo modo que si se subastara un bien cuya valoración para el postor i estuviera dada por v_i=ma_i+$H(a_i)$.

Modelaremos esta situación como un juego bayesiano considerando el caso donde la utilidad extra está dada por $H_{k,c}(\cdot)$. Sea A la variable aleatoria en el intervalo $[0,\bar{a}]$ con función de distribución $F(\cdot)$ y densidad $f(\cdot)$ y sea $V \equiv rA+c$ la variable aleatoria en el intervalo $[c,r\bar{a}+c]$ con función de distribución $F_v(\cdot)$ y densidad $f_v(\cdot)$. Así, tenemos que v_i=ra_i+c es un valor privado e independiente que representa la valoración del postor i por el conjunto de bienes. Entonces, la expresión general de utilidad esperada para el postor 1 es

(27) $$\pi(b_1) = (v_1 - b_1)P\left(\max_{i\in N\setminus\{1\}}\{b_i\} < b_1\right)$$

donde b_i representa la puja del jugador $i \in N$. Siguiendo la metodología clásica considerando que los jugadores pujan de acuerdo a una función $\hat{b}(\cdot)$ creciente y no negativa tal que $\hat{b}(0)$=0 tenemos:

(28) $$\begin{aligned}\pi\left(\hat{b}(y)\right) &= \left(v_1 - \hat{b}(y)\right)P\left(\max_{i\in N\setminus\{1\}}\{\hat{b}(v_i)\} < \hat{b}(y)\right)\\ &= \left(v_1 - \hat{b}(y)\right)P\left(\hat{b}\left(\max_{i\in N\setminus\{1\}}\{v_i\}\right) < \hat{b}(y)\right)\\ &= \left(v_1 - \hat{b}(y)\right)P\left(\max_{i\in N\setminus\{1\}}\{v_i\} < y\right).\end{aligned}$$

Notemos que

$$P\left(\max_{i\in N\setminus\{1\}}\{v_i\} < x\right) = F_v(x)^{n-1}$$

y así obtenemos la siguiente expresión para la utilidad esperada:

(29) $$\pi(y) = \left(v_1 - \hat{b}(y)\right)F_v(y)^{n-1}.$$

De la ecuación (29) obtenemos la puja de equilibrio para este caso:

(30) $$\hat{b}(v_1) = \frac{(n-1)\int_c^{v_1} yF_v(y)^{n-2} f_v(y)dy}{F_v(v_1)^{n-1}}.$$

Como

$$F_v(y) = P(V < y) = P(rA + c < y) = P\left(A < \tfrac{y-c}{r}\right) = F\left(\tfrac{y-c}{r}\right)$$

y sustituyendo esto en (30) obtenemos la siguiente equivalencia:

(31) $$\hat{b}(v_1) = \frac{(n-1)\int_c^{v_1} yF\left(\frac{y-c}{r}\right)^{n-2} f\left(\frac{y-c}{r}\right)dy}{F\left(\frac{v_1-c}{r}\right)^{n-1}}.$$

Haciendo el cambio de variable $x = \frac{y-c}{r}$, obtenemos:

(32) $$\hat{b}(v_1) = \frac{(n-1)\int_0^{\frac{v_1-c}{r}} (rx+c)F(x)^{n-2} f(x)dx}{F\left(\frac{v_1-c}{r}\right)^{n-1}}.$$

Además, si sustituimos que v_1=ra_1+c, tenemos:

(33)

$$\hat{b}(ra_1 + c) = \frac{(n-1)\int_0^{a_1}(rx + c)F(x)^{n-2}f(x)dx}{F(a_1)^{n-1}}$$

$$= \frac{r(n-1)\int_0^{a_1}xF(x)^{n-2}f(x)dx}{F(a_1)^{n-1}} + \frac{c\int_0^{a_1}(n-1)F(x)^{n-2}f(x)dx}{F(a_1)^{n-1}},$$

donde finalmente resolviendo la integral de la derecha y sustituyendo $b\hat{*}(x)$ donde corresponde, obtenemos:

$$\hat{b}(ra_1 + c) = r\widehat{b^*}(a_1) + c. \tag{34}$$

La ecuación (34) demuestra que al vendedor le da igual implementar cualquiera de los dos mecanismos ya que obtiene el mismo rendimiento esperado, conclusión poco esperada ya que se esperaría que el vendedor pudiese obtener un mejor rendimiento si ofrece algun tipo de utilidad extra como incentivo.

Conclusiones

Como principal conclusión del estudio, tenemos dos situaciones donde los postores eligen sus estrategias en diferentes espacios, lo cual al analizarse desde la perspectiva teórica, vemos que era difícil de inferir que la manera en que los postores pujan fuera tan similar en ambos casos cuando se considera que la utilidad extra está dada por una función $H_{k,c}(\cdot)$. Del mismo modo, no era fácil anticipar que al cambiar el mecanismo y sin importar cómo el vendedor distribuyera los r bienes entre las m subastas y los k incentivos, éste obtendrá el mismo rendimiento esperado.

Si tratamos de comparar ambas situaciones desde la perspectiva empírica existen varias razones para suponer que los postores no deberían de actuar de formas tan similares en ambas situaciones. Una de las razones es que para en el caso de m subastas simultáneas es posible que algún postor pudiera obtener utilidad negativa si se pujara por encima de la valoración del objeto y éste sólo obtuviera un subconjunto de bienes. Otra razón podría deberse a que para el caso de m subastas simultáneas la manera de actuar de los otros postores podría ser un tanto menos predecible ya que habría que tomar en cuenta que los oponentes racionalizarán m pujas posiblemente distintas. Por otro lado, si se comparara el rendimiento esperado del vendedor de manera experimental, podría esperarse que debido a las distintas maneras en que los postores perciben ambas situaciones, éstos no racionalizaran sus pujas de manera tan similar como se muestra en nuestro modelo; más bien, se esperaría como resultado que el vendedor obtuviera rendimientos diferentes en cada situación debido a que en situaciones reales es común observar que ante un cambio de mecanismo la manera en que se comportan los agentes ante las distintas situaciones es diferente.

Experimentalmente sería interesante observar bajo cuál ejercicio se obtiene el mayor rendimiento para el vendedor, y por otro lado, considerar la posibilidad de que éste cambie la manera de otorgar el incentivo con la intención de averiguar si existe una relación entre el cambio en el incentivo y el cambio en el rendimiento. Este tipo de análisis queda abierto para una investigación posterior abordada desde el área de la economía experimental.

Por otro lado, desde la perspectiva teórica tenemos que una generalización directa de este modelo es considerar más de un único valor privado e independiente, por ejemplo, considerar dos subastas simultáneas por bienes diferentes donde cada postor tiene una valoración personal por cada uno de ellos y así mismo considerar a la utilidad extra como un valor conocido, o bien, también un valor privado e independiente. Cabe destacar que para este caso no podría asumirse que las pujas sean iguales en cada subasta y por tanto la expresión general de la utilidad esperada no podría simplificarse de la misma manera en cómo se hizo en este modelo.

Otra generalización de interés podría considerar que existe más de un valor relacionado con la utilidad extra, por ejemplo, si se consideran m

subastas podría existir un valor de utilidad extra asociado a cada subconjunto de bienes, el cual seguiría siendo un caso abierto tanto si los bienes son idénticos o distintos.

Referencias

J. Harsanyi, Games with incomplete information played by bayesian players, I–III part I. The basic model. Management Science, 14.3 (1967), 159-182. https://doi.org/10.1287/mnsc.14.3.159

O. Morgenstern and A. Tucker, W. Vickrey, Auctions and bidding games, in Recent advances in game theory Princeton University Press, Princeton, 1962.

P. R. Milgrom and R. J. Weber, A theory of auctions and competitive bidding, Econometrica, 50 (1982), 1089–1122. https://doi.org/10.2307/1911865

V. Krishna, Auction theory, Academic press, (2009). https://doi.org/10.1006/game.1996.0092

V. Krishna and R. W. Rosenthal, Simultaneous auctions with synergies, Games and Economic Behavior, 17 (1996), 1–31. https://doi.org/10.1006/game.1996.0092

R. W. Rosenthal and R. Wang, Simultaneous auctions with synergies and common values, Games and Economic Behavior, 17 (1996), 32–55. https://doi.org/10.1006/game.1996.0093

Szentes and R. W. Rosenthal, Three-object two-bidder simultaneous auctions: chopsticks and tetrahedra, Games and Economic Behavior, (2003), 44 (1), 114-133. https://doi.org/10.1016/S0899-8256(02)00530-4