Ciencia, Docencia y Tecnología
ISSN: 0327-5566
ISSN: 1851-1716
cdyt@uner.edu.ar
Universidad Nacional de Entre Ríos
Argentina

Conocimientos previos de números complejos en Ingeniería

Ndjatchi, Mbe Koua Christophe
Conocimientos previos de números complejos en Ingeniería
Ciencia, Docencia y Tecnología, vol. 30, núm. 58, 2019
Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina

Conocimientos previos de números complejos en Ingeniería

Previous knowledge of complex numbers in engineering

Conhecimento prévio de números complexos em Engenharia

Mbe Koua Christophe Ndjatchi
UPIIZ Instituto Politécnico Nacional, México

Ciencia, Docencia y Tecnología, vol. 30, núm. 58, 2019

Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina

Recepción: 05 Julio 2018
Aprobación: 27 Febrero 2019

Redalyc: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14560146012

Resumen: El presente artículo tiene como objetivo identificar los conocimientos matemáticos previos que tienen los estudiantes de Ingeniería en Sistemas Computacionales antes de tomar el curso de números complejos mediante el desarrollo de los procesos cognitivos de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias. Para lo cual se muestra el diseño de un instrumento con base en estos procesos cognitivos, el cual se aplica a una muestra por conveniencia de estudiantes. Los datos se analizan cuantitativamente y los resultados muestran las dificultades que tienen los estudiantes en los conocimientos previos básicos de la educación.

Palabras clave: Matemática en el contexto de las ciencias, Matemática en contexto, Proceso cognitivo, Construcción de conocimiento, Conocimiento previo.

Abstract: This paper's objective is to identify the previous mathematical knowledge that computer systems engineering students have before taking the course of complex numbers through the development of cognitive processes of the theory of mathematics in the context of science. For this purpose, an instrument based on these cognitive processes has been designed. This instrument has been applied to convenience sample of students. The data was analyzed quantitatively, and the results show the difficulties that students have on the basic previous knowledge of education.

Keywords: Mathematics in the Context of Sciences, Mathematics in Context, Cognitive Process, Construction of Knowledge, Previous knowledge.

Resumo: Este artigo tem como objetivo identificar os conhecimentos matemáticos prévios que os estudantes da Engenharia em Sistemas Computacionais têm antes de fazer o curso de números complexos através do desenvolvimento dos processos cognitivos da teoria da Matemática no Contexto das Ciências. Para isso é mostrado o desenho de um instrumento baseado nesses processos cognitivos, que é aplicado a uma amostra por conveniência de estudantes. Os dados são analisados quantitativamente e os resultados mostram as dificuldades que os estudantes têm nos conhecimentos prévios básicos da educação.

Palavras-chave: Matemática no contexto das ciências, Matemática em contexto, Processo cognitivo, Construção do conhecimento, Conhecimento prévio.

I. Introducción

Durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ocurren diversos problemas que son de tipo didáctico, epistemológico, curricular, etcétera, los cuales impiden que este proceso se lleve a cabo con éxito (Camarena, 2015). En la última década, varios investigadores en el área de la didáctica de la matemática se han dedicado a determinar las diferentes problemáticas que se presentan. Cerizola, Pérez, Martínez y Franzini (2000) y Dolores y Catalán (2000) explican que los diferentes problemas relacionados con el aprendizaje de las matemáticas en los niveles de secundaria y de bachillerato se deben a la incomprensión de ciertas nociones y conceptos básicos.

Por su lado, Camarena (2003) y Carrillo (2009) apuntan que la dificultad en el aprendizaje de las matemáticas se debe a la naturaleza y al anidamiento de los temas de aprendizaje. En esta disciplina de la ciencia exacta, siempre se busca la abstracción y generalización para construir proposiciones, teoremas, lemas, corolarios, entre otros; y, además si el alumno no ha construido un concepto, no puede construir los subsecuentes que se derivan de este. De lo anterior, es fácil entender que, si los estudiantes del nivel educativo medio superior en sus estudios ya realizados no construyeron el conocimiento matemático necesario que les permita entender el saber nuevo, entonces, se enfrentarán al nivel superior con deficiencias que repercutirán en su futura formación. Por ello, es importante conocer los conocimientos previos de los alumnos sobre un tema de matemáticas de nivel superior antes de que ellos lo puedan cursar.

Camarena (2003) añade que durante este proceso se presentan varios tipos de obstáculos: didácticos, ontológicos, epistemológicos, cognitivos, curriculares, contextuales y docentes; en particular, en el tema de los números complejos, se tienen obstáculos relacionados con concepciones epistemológicas en el sentido de Brousseau (1998). Estos son de tipo algebraico, analítico, geométrico y formal, los cuales han estado presentes a lo largo de la historia (Pardo y Gómez, 2007):

El problema algebraico se identificó con las primeras apariciones de las raíces cuadradas de cantidades negativas, consideradas como «raíces sin sentido». El caso analítico apareció con la aceptación y la generalización del uso de las expresiones imaginarias a partir del análisis infinitesimal. Estas expresiones se consideran imaginarias por el hecho de que son cantidades imposibles por su naturaleza; debido a que no pueden ser números reales positivos, negativos o nulos. El problema geométrico tuvo lugar con la introducción de un eje imaginario, el cual es perpendicular al eje real. Por último,

existió durante la historia de los números complejos, una dificultad asociada con su formalización; debido a que se consideraron como pares ordenados de números reales.

Además de las dificultades de formalidad del concepto mencionadas, en los alumnos de la carrera de Licenciatura en matemáticas, Pardo y Gómez (2007) identificaron otro obstáculo relacionado con los conceptos previos asociados a este tema de números complejos; como las propiedades de los números reales. Para ello, en el presente trabajo se indaga acerca de la pregunta: ¿qué conocimientos matemáticos previos tienen los estudiantes de Ingeniería en Sistemas Computacionales (isc) antes de tomar el curso de números complejos?

Cabe mencionar que, para abordar esta problemática, se diseña un instrumento de acuerdo con los procesos cognitivos que determinan la construcción del conocimiento matemático para indagar sobre los saberes matemáticos previos que tienen los alumnos de isc antes de tomar el curso de números complejos. Lo anterior determinará la factibilidad de construir su conocimiento; ya que, el estudiante construye su conocimiento cuando relaciona el conocimiento nuevo con los conocimientos previos en sus estructuras cognitivas (Camarena, 1984; Ausubel, 1968).

Así, mediante una investigación experimental se toma una muestra de dos grupos de 15 estudiantes, cada uno del cuarto semestre de la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería campus Zacatecas del Instituto Politécnico Nacional (upiiz-ipn).

En esta investigación se analizan e identifican los conocimientos matemáticos previos de los números complejos de dos grupos, porque es la base de trabajos futuros de investigación donde se aplicará la teoría de la Matemática en el Contexto de la Ciencia (mcc). Es decir, en próximas investigaciones, se analizará cómo favorece la didáctica de la Matemática en Contexto (mc), de la teoría de la mcc, la construcción del conocimiento de los números complejos en los alumnos de ingeniería; donde la teoría de la mcc, para la construcción del conocimiento, toma en cuenta la conexión entre el tema de estudio (en este caso los números complejos) y los conocimientos previos.

Es importante comunicar que se construirán a futuro eventos contextualizados ligados al objeto de estudio de la isc, como lo establece la estrategia didáctica de la mc de la teoría de la mcc. Para la implementación de la didáctica de la mc, se aplicará a uno de los dos grupos de estudiantes (grupo experimental) la estrategia didáctica de la mc, mientras que el otro grupo de estudiantes (grupo control) tomará un curso basado en el método tradicional de enseñanza de las matemáticas. Además, en esa próxima investigación, se

examinará el nivel de aprendizaje que alcanzarán los estudiantes del grupo experimental con respecto a los del grupo control.

II. Marco teórico

El marco teórico expone que antes de aplicar cualquier método para la enseñanza de las matemáticas, siempre es indispensable que los alumnos dominen los conocimientos previos del tema matemático a estudiar. Todo ello permitirá que construyan con menos dificultad su nuevo conocimiento matemático (Camarena, 1984; Ausubel, 1968).

II.1. Método de enseñanza tradicional y aprendizaje de las Matemáticas

En todos los niveles educativos, las matemáticas son consideradas como un área de conocimiento cuya enseñanza se dificulta por los obstáculos que los docentes enfrentan; y su aprendizaje es un reto para los alumnos a causa de la abstracción que representan (Camarena, 1984). Debido a ello, en las últimas décadas, diversas investigaciones en el área de la educación matemática se han enfocado en la determinación de los obstáculos y/o la manera adecuada para enfrentarlos (Brousseau, 1998).

Camarena (2003), irem d'Aquitaine (2013) y Carrillo (2009) argumentan que, durante la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, pueden surgir algunas dificultades relacionadas a su naturaleza, otras generadas por las circunstancias de enseñanza, debido a los profesores y su metodología didáctica. Los docentes de esta rama de las ciencias usan siempre los mismos recursos materiales (libros, pizarrón y gis o marcadores) y la misma didáctica, es decir el método tradicional de enseñanza. En esta metodología el docente es considerado como el centro del conocimiento y el activo del proceso, su papel es primordial, mientras el alumno es el receptor y pasivo. El rol del estudiante en el proceso de enseñanza tradicional le pide que aprenda o memorice el contenido del tema de estudio. Sin embargo, durante este proceso, el docente debe asegurarse de que sus alumnos tengan los conocimientos previos necesarios relacionados al tema de estudio (Camarena, 1984; Ausubel, 1968).

Por último, existen dificultades relacionadas con el alumno mismo, como sus características psicológicas y cognitivas, lo que se ha denominado obstáculos ontogénicos y cognitivos (Brosseau, 1998; Camarena, 2003). Esto se debe a que no todos los alumnos tienen ni dominan los conocimientos previos requeridos para abordar un tema de estudio. Además, no siempre tienen el grado de abstracción o la habilidad que se exige en sus diferentes niveles y/o temas de estudio.

Así, todos estos obstáculos son una barrera para que el alumno aprenda exitosamente la Matemática. Estos hacen que el estudiante no vea su sentido durante sus estudios. Derivado de esto, no logra conectar o vincular los temas de esta materia con su entorno ni con su experiencia, pues al final no tienen sentido para él (Ruiz, 2008; Carrillo, 2009; Camarena, 1984).

II.2. Matemática en el Contexto de las Ciencias

La Matemática en el Contexto de las Ciencias (mcc) es una teoría educativa diseñada por Camarena desde 1982, la cual aborda la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en profesiones donde la matemática no es una meta por sí misma, como las ingenierías. Esta nació en el Instituto Politécnico Nacional (ipn) de México y reflexiona sobre la relación que debe existir entre la matemática y las demás ciencias que la requieren, entre la matemática y las futuras actividades profesionales y laborales, así como entre la matemática y las actividades de la vida cotidiana (Camarena, 1984; Ruiz, 2014).

Camarena (2017) comenta que a teoría de la mcc es de tipo constructivista, donde los pilares son los trabajos de tres grandes autores: Piaget, Vigotsky y Ausubel.

> El enfoque Psicogenético del biólogo sueco Jean Piaget (1896-1980), donde se menciona que la competencia cognitiva está determinada por el nivel de desarrollo intelectual; que cualquier aprendizaje depende del nivel cognitivo inicial del sujeto e incluye su modelo de equilibración, donde los conocimientos en el individuo son graduales, pasando de lo concreto a lo abstracto (Piaget,1991).

> El enfoque Sociocultural del ruso Lev Vigotsky (1896-1934), quién dice que el aprendizaje es un proceso fundamentalmente social, donde el diálogo y el lenguaje ocupan un papel central en la instrucción y el desarrollo cognoscitivo, poniendo especial énfasis en el aprendizaje cooperativo, sin embargo, con las notaciones que se dan al trabajo colaborativo y cooperativo, realmente este autor se refiere al trabajo colaborativo. Vigotsky crea el concepto de Zona de Desarrollo Próximo (zdp), el cual lo define como «Distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema, con la intervención de otro» (Vigotsky, 1978).
>
> El enfoque Cognitivo de Aprendizaje Significativo del norte americano David P. Ausubel (1918-2008), conceptualiza el aprendizaje como una reestructuración activa de las percepciones, ideas, conceptos y esquemas, mediante la relación sustantiva entre la nueva información y las ideas previas de los estudiantes, luego, el aprendizaje no se reduce a simples asociaciones memorísticas. Durante el
>
> aprendizaje significativo el alumno relaciona de manera no arbitraria y sustancial la nueva información con los conocimientos y experiencias previas que ya posee en su estructura de conocimientos o cognitiva. Asimismo, menciona que el sujeto es un procesador activo de la información, no obstante para que se logre un aprendizaje significativo, es muy importante su disposición y motivación hacia el aprendizaje (Ausubel et al., 1990).
>
> (Camarena, 2017: 4)

Así, la mcc se sustenta en la teoría de aprendizajes significativos de Ausubel y se fundamenta en los siguientes paradigmas: la Matemática es una herramienta de apoyo y disciplina formativa, también tiene una función específica en el nivel universitario y los conocimientos nacen integrados (Camarena, 2015). Insiste sobre los conocimientos previos del tema que se quiere impartir y de la asignatura del contexto, con la cual se busca la vinculación con el tema de las matemáticas.

La teoría de la mcc mira al ambiente de aprendizaje como un sistema complejo, donde hacen presencia cinco fases que constituyen la teoría: Fase Curricular, Fase Didáctica, Fase Cognitiva, Fase Epistemológica y Fase Docente Camarena (1984, 2015). La curricular desarrollada desde 1984, la didáctica iniciada desde 1987, la epistemológica abordada en 1988, la docente definida en 1990, y la cognitiva estudiada desde 1992.

Camarena (2008), menciona que:

> En la fase didáctica se aplica la estrategia didáctica de la Matemática en Contexto, que tiene como objetivo lograr que el alumno adquiera y desarrolle habilidades para resolver problemas contextualizados referentes a la vida real y a su profesión de estudio. (Citado en Ruiz 2014: 24)

Como se mencionó, durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (en particular el tema de los números complejos), el método de enseñanza tradicional es utilizado por los docentes, el cual genera una desvinculación entre esta disciplina y las demás materias de especialidad de la carrera de ingeniería, lo que propicia el desinterés de los alumnos (Ruiz, 2014; Camarena, 1984, 2015).

Camarena (2002, 2015) diseña la didáctica de la Matemática en Contexto (MC), la cual se desarrolla en el ambiente de aprendizaje a través de eventos contextualizados. Estos pueden ser problemas, proyectos o estudios de caso que encierran la idea del tema de estudio de la asignatura de Matemática.

En este mismo sentido, Camarena y Flores escriben:

> En la teoría de la Matemática en el Contexto de la Ciencias se ha identificado, a través de investigaciones, que para la construcción del conocimiento de las ciencias básicas de física, química y matemáticas es necesario que el estudiante desarrolle los procesos cognitivos (ProCog) que se enmarcan en la Tabla 1 (Camarena, 2002). (2012: 154).

Así, el alumno construye su conocimiento de un tema matemático, cuando desarrolla los procesos cognitivos que determinan la construcción del conocimiento matemático de la Tabla 1, propios de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, los cuales toman en cuenta los conocimientos previos del tema de estudio.

Proceso Cognitivo	Descripción del Proceso Cognitivo
ProCog 1	Construcción conceptual de temas y conceptos de cada disciplina involucrada. Entre los aspectos que identifican este proceso están los conocimientos previos, el tránsito entre registros semióticos y el tránsito entre el lenguaje natural y el matemático y viceversa.
ProCog 2	La operatividad de cada disciplina. Refiriéndose a operaciones mecánicas.
ProCog 3	Un manejo o ejecución de procedimientos, técnicas y métodos de cada disciplina.
ProCog 4	La contextualización, en donde el estudiantes identifica los contenidos disciplinares que intervienen en un evento dado y las conexiones entre estos contenidos.

Fuente: Camarena y Flores, 2012.

Tabla 1

Procesos Cognitivos que determinan la construcción del conocimiento de las ciencias básicas

III. Metodología

Con el propósito de identificar los conocimientos matemáticos previos que tienen los alumnos de isc antes de tomar el curso de números complejos, en esta investigación se diseña un instrumento para evaluar el conocimiento previo de los estudiantes referente al tema de números complejos. Para ello, se trabaja con dos grupos, uno experimental, es decir el que recibirá un curso de números complejos con apoyo a la teoría mcc en trabajos futuros. En ese curso se vinculará la matemática con las demás asignaturas de la profesión. Este hecho ayudará al ingeniero a utilizar el conocimiento de las ciencias y la experiencia para encontrar los mejores resultados de los problemas que enfrentará durante su labor profesional (Camarena, 2015), mientras el otro conocido como grupo control tomará una clase de números complejos bajo el proceso de enseñanza tradicional, la cual se caracteriza por la memorización del contenido del tema de estudio y por la generación de una desvinculación entre la matemática y las demás materias de especialidad de la profesión de ingeniería, provocando el desinterés de los alumnos (Camarena, 2015). En el actual artículo se denominará «grupo A» al grupo control y el «grupo B» al grupo experimental.

III.1. La muestra de la investigación

La muestra de estudio son dos grupos de 15 estudiantes cada uno, ambos están conformados antes del experimento: son grupos intactos o naturalmente formados, ya que eran los únicos grupos formados por la institución antes de tomar el curso que incluye los números complejos.

III.2. El Instrumento de evaluación

Para saber si los alumnos construyeron el conocimiento matemático previo necesario para tomar un curso de números complejos, se diseña un instrumento de acuerdo a los procesos cognitivos que determinan la construcción del conocimiento matemático de la Tabla 1, el cual se presenta en el apéndice de este artículo.

III.3. El método de trabajo

El instrumento se aplica a ambos grupos del mismo semestre en horario fuera de clases. Por el tipo de conocimientos a evaluar, a los alumnos no se les permite usar calculadora; se les da tiempo ilimitado, sin embargo, en promedio usaron una hora para contestar el instrumento.

IV. Diseño del instrumento

Como se comentó anteriormente, se diseñó un instrumento de acuerdo a los procesos cognitivos que determinan la construcción del conocimiento matemático de la Tabla 1, propios de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, tomando en cuenta la bibliografía recomendada para la unidad de aprendizaje Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería, donde se imparten los números complejos. Kreyszig (2013) comenta que el cálculo y aplicación con números reales es el prerrequisito necesario para los números complejos.

De esta manera, los ejercicios del instrumento del apéndice se escogieron de la parte sobre números reales del libro de Stewart, Redlin y Watson (2012) uno de los textos más usados en la asignatura de cálculo diferencial e integral, tomando en cuenta los procesos cognitivos de la Tabla 1 como se muestra a continuación. Dicho de otra forma, el cálculo con números reales y su aplicación son los conocimientos que, en este artículo, se identificarán en los alumnos.

Según el ProCog 1, el estudiante debe realizar actividades que conecten los conocimientos previos con los conocimientos nuevos. Esta situación conduce a que el estudiante desarrolle actividades de conexión entre el cálculo con los números reales y los conocimientos previos para éstos, entre los que se encuentran la definición de los números naturales, enteros, racionales e irracionales. Asimismo, que maneje las diferentes propiedades que los rigen, así como, el tránsito entre registros de representación de los números reales, para lo cual el alumno debe poder pasar del registro numérico al gráfico, es decir, dados los números en su representación numérica, debe graficarlos en la recta numérica, que es la representación gráfica.

Con respecto a las propiedades de los números reales, Protter y Morrey (1980) enuncian las siguientes:

Si se tienen tres números reales a, b, c tales que a<b y b<c (a es menor que b y b es menor que c) entonces a<c (a es menor que c).

También, si a, b, c son números reales tales que a=b y b=c (a es igual a b y b es igual a c) entonces a=c (a es igual a c).

Para ordenar los números reales y ubicarlos en la recta numérica, el estudiante debe conocer la Ley de Tricotomía, que establece que dados dos números a y b, entonces, a<b, a>b o a=b.

Para la identificación de este proceso cognitivo (ProCog 1) se diseñan preguntas que debe abordar el estudiante y éstas constituyen la actividad 1, las cuales corresponden a un propósito muy claro de acuerdo a los procesos cognitivos, como se describen en la Tabla 2.

Preguntas de la actividad 1	Intención de la pregunta
De ser posible, ordene los números y ubíquelos en la recta numérica: $\sqrt{3}, \sqrt{2}, \left\|-\sqrt{1}\right\|, 0, \sqrt{4}, 1.$ (Argumente su respuesta).	Orden y ubicación en la recta númerica de los números reales definidos a través de : • las raíces cuadradas de un número racional positivo. • un número racional. • el valor absoluto del opuesto de la raíz cuadrada de un número racional positivo. un número irracional positivo.
De ser posible, ordene los números y ubíquelos en la recta numérica: $2, 3, 1, -10, 2+\sqrt{2}, \left\|-9\right\|$ (Argumente su respuesta).	Orden y ubicación en la recta númerica de los números reales definidos a través de : • un número racional. • la suma de un número racional con un irracional. el valor absoluto de un números entero.
De ser posible, ordene los números y ubíquelos en la recta numérica: $1, \sqrt{\frac{1000}{1000}}, \sqrt{1}, 1^{10000}, 1000^{0}$ (Argumente su respuesta).	Orden y ubicación en la recta númerica de los números reales definidos a través de: • las raíces cuadradas de números racionales positivos. números racionales elevados a un exponente entero.

Tabla 2

El proceso cognitivo (ProCog 1)

Para el ProCog 1, el objetivo es identificar si el alumno sabe que los números reales son un conjunto ordenado, porque los números reales tienen la propiedad de ser números ordenados a diferencia de los números complejos (Kreyszig, 2013), luego, el alumno debe poder ordenarlos ya sea que se trate de números racionales (naturales, enteros, fracciones) o irracionales, donde se observa la relación con los conocimientos previos. Asimismo, se identifica el tránsito entre registros semióticos de representación.

En el ProCog 2, se requiere el dominio de la operatividad entre números reales, es decir, se necesita que los estudiantes puedan realizar operaciones aritméticas con estos números. El objetivo para este proceso es saber si pueden realizar operaciones aritméticas con los números reales, así como, saber qué manejo tienen los alumnos con raíces cuadradas, que se emplean para la definición del módulo de un número complejo (z=x +iy, donde x, y son números reales) y de sus raíces. De hecho, el cálculo de la raíz cuadrada de los números complejos resulta ser una tarea no sencilla (Kreyszig, 2013); además, los estudiantes usarán raíces cuadradas de números reales negativos en el conjunto de los números complejos. Así, si las raíces cuadradas de números reales positivos no las dominan, lo cual es un conocimiento previo necesario para los números complejos como lo comentan Kreyszig (2013) y Lehmann (2015), habrá un obstáculo con los números complejos. Para la identificación de este proceso cognitivo (ProCog 2) se diseñan preguntas que constituyen la actividad 2, las cuales corresponden a los procesos cognitivos 2, como se describen en la Tabla 3.

Preguntas de la actividad 2	Intención de la pregunta
Calcule $(\sqrt{3})\,(\sqrt{3})$. (Argumente su respuesta.)	Multiplicación de las raíces cuadradas de dos números reales positivos.
Calcule $(\sqrt{3})\,(\sqrt{1})\,(\sqrt{3})\,(\sqrt{1})$. (Argumente su respuesta.)	Multiplicación de las raíces cuadradas de varios números reales positivos.
Calcule $(2+\sqrt{3})+\sqrt{1}+(1+\sqrt{3})$. (Argumente su respuesta.)	Suma de las raíces cuadradas de números reales positivos con los números enteros.
Calcule $(2+\sqrt{3})\,(2-\sqrt{3})$. (Argumente su respuesta.)	Multiplicación de dos números reales definidos por la suma de la raíz cuadrada de un número real positivo y un número entero.
Calcule $\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$. (Argumente su respuesta.)	División entre números reales definidos por la suma de la raíz cuadrada de un número real positivo y número entero.

Tabla 3
El proceso cognitivo (ProCog 2)

En el ProCog 3, el estudiante debe manejar procedimientos y técnicas, situación que se refleja en la resolución de ecuaciones en el conjunto de los números reales. Así, para este ProCog, el objetivo es identificar que los alumnos puedan hallar la solución de una ecuación de segundo grado, es decir, de la forma ax2+bx+c=0, en el conjunto de los números reales; ya que, en un futuro, cuando trabajen con números complejos, tendrán que resolver ecuaciones de este tipo, lo que las convierte en conocimiento previo de los números complejos.

De manera análoga a los ProCog anteriores, para la identificación de este proceso cognitivo (ProCog 3) se diseñan preguntas que debe afrontar el estudiante, éstas constituyen la actividad 3, que corresponden a un propósito de acuerdo a los procesos cognitivos 3, como se describen en la Tabla 4.

Preguntas de la actividad 3	Intención de la pregunta
Resuelva $\forall x \in R$, la ecuación $x^2 + x = 0$	Determinar la solución de una ecuación con una incógnita de grado dos.
Resuelva $\forall x \in R$, la ecuación $x^2 + 2x = -1$	Búsqueda de las raíces de una ecuación cuadrática.

Tabla 4.
El proceso cognitivo (ProCog 3)

V. Resultados y discusión

Después de aplicar el instrumento a ambos grupos, se realizó el cálculo de porcentaje de respuestas correctas de cada pregunta en ambos grupos con la siguiente relación de porcentajes:

> Porcentaje de respuestas correctas de una pregunta = (Número de estudiantes que respondió correctamente a dicha pregunta) *100 / Número total de estudiantes del grupo.

Además, se elaboraron cálculos y gráficas del análisis de la información (grupo A en color azul, grupo B en color naranja) con el paquete Microsoft Excel.

Para identificar a los estudiantes, se emplea la siguiente notación: A-n, donde A representa el grupo A y n es el enésimo alumno de 15 estudiantes del grupo A. De manera análoga, B-n representa al enésimo alumno del grupo B.

A continuación, se obtuvieron los siguientes resultados de la Actividad 1 para detectar los conocimientos previos.

Actividad 1

En esta actividad, en general, los dos grupos tuvieron la misma cantidad de respuestas correctas en el segundo interrogante. En la primera pregunta, la diferencia es de una solución correcta a favor del grupo B, lo que no es representativo. En la última pregunta, son dos respuestas correctas de diferencia a favor del grupo A. Con las preguntas de esta actividad, estos alumnos desarrollaron los diferentes aspectos que identifican el ProCog1, debido a que manejaron adecuadamente los conocimientos previos de los números reales como los números naturales, enteros, racionales, entre otros. También, ellos hicieron el tránsito entre registros semióticos de representación. Sin embargo, los porcentajes de respuestas correctas en esta actividad, sobre el orden y la ubicación de los números reales, muestran que aproximadamente la mitad de los estudiantes de ambos grupos tiene los conocimientos básicos, es decir, solamente esta cantidad de alumnos puede ordenar correctamente los números reales ya sean números racionales o irracionales, ver la Tabla 5 y la Figura 1.

Pregunta	Grupo A		Grupo B	
	Respuestas correctas	Porcentaje de respuestas correctas	Respuestas correctas	Porcentaje de respuestas correctas
1	7/15	46.66	8/15	53.33
2	8/15	53.33	8/15	53.33
3	7/15	46.66	5/15	33.33

Tabla 5

Resultados de la actividad 1 para detectar los conocimientos previos en ambos grupos (ProCog 1)

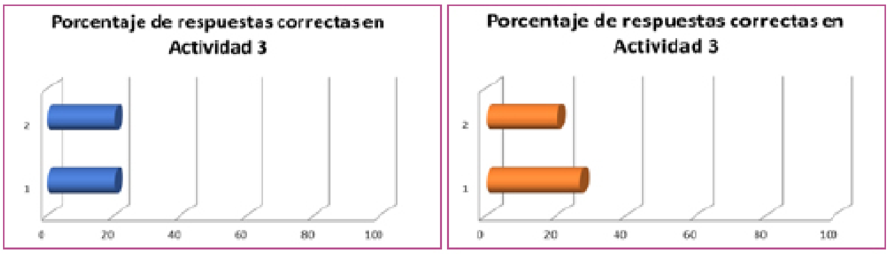


Figura 1

Gráficas del análisis de la información de la actividad 1 del grupo A (color azul) y del grupo B (color naranja)

Como evidencia de lo mencionado, se muestra el caso del alumno A-7 (ver Figura 2), quien pertenece a la porción de estudiantes que sí tienen estos procesos cognitivos desarrollados. Él contesta bien a las dos primeras preguntas de la actividad 1, pero no aborda la última, lo cual en promedio no afecta sus resultados totales.

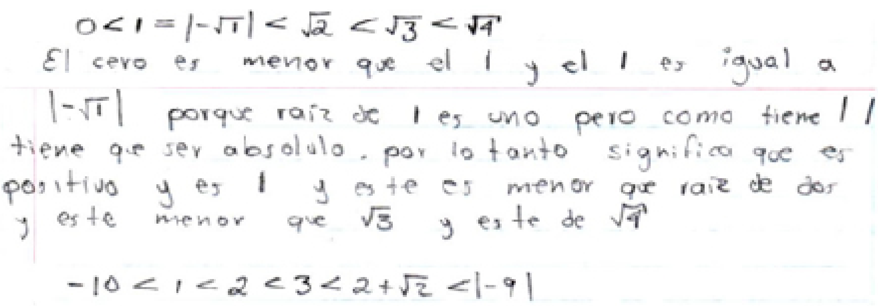


Figura 2

Evidencia del alumno A-7 del grupo A

Por otro lado, en la otra mitad de los alumnos de cada grupo, quienes tienen más deficiencias, se incluye al estudiante B-10, quien tiene algunas dificultades con respecto al ordenamiento de los números reales. El alumno B-10 escribió $2<3>1>-10<2+\sqrt{2}<|-9|$, ver la Figura 3. Con base en las propiedades de las desigualdades enunciadas en Protter y Morrey (1980), este estudiante no escribe correctamente la relación que existe entre los números. Él anotó dos relaciones contrarias, es decir, es menor que (<) y es mayor que(>) en una misma expresión matemática, para comparar dichos números, lo que muestra confusión por parte del alumno. Él debió escribir:

$-10<1<2<3<2+\sqrt{2}<|-9|$ o bién $|-9|>2+\sqrt{2}>3>2>1>-10$

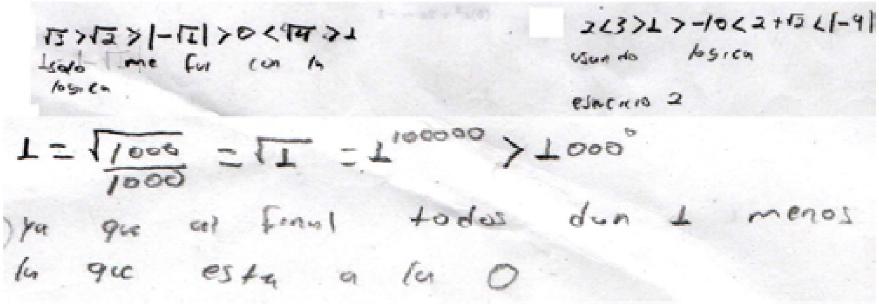


Figura 3
Evidencia del estudiante B-10 del grupo B

Así, esta porción de alumnos de ambos grupos de estudio, que incluye al estudiante B-10, no pueden ordenar correctamente los números reales definidos por los números racionales y los irracionales, y tampoco puede ordenarlos

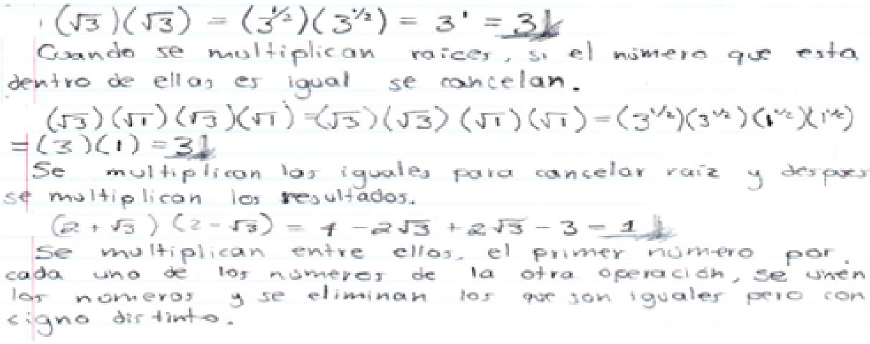
en la recta numérica; pues a estos estudiantes se les dificulta comparar los números racionales con los irracionales; de esta manera ellos no pudieron desarrollar algunos aspectos que determinan el ProCog 1 de los conocimientos que miden la actividad 1, como los conocimientos previos (los números racionales y los irracionales), el tránsito entre registros semiótico de los números reales definidos por los números racionales y los irracionales, entre otros.

Actividad 2

En esta actividad, se puede observar que en las preguntas uno, dos y cuatro, sobre la multiplicación de los números reales definidos por las raíces

cuadradas de números reales positivos y/o números enteros, más de la mitad de los estudiantes de cada grupo respondió correctamente; sin embargo, los estudiantes del grupo A tuvieron más respuestas correctas que los del B. Cabe aclarar que en ambas agrupaciones, contestaron a estas preguntas con mucha claridad, lo cual presupone que ellos tenían los conocimientos suficientes sobre los temas de estas preguntas (1, 2 y 4). Así, ellos desarrollaron los aspectos que determinan el ProCog 2 como la operación mecánica de la multiplicación de números reales y la de la multiplicación junto con de la adición de números reales.

Como evidencia, se tiene al alumno A-1 del grupo A, quien contesta correctamente a las preguntas uno, dos y cuatro de la actividad 2, ver la Figura 5.



$(\sqrt{3})(\sqrt{3}) = (3^{1/2})(3^{1/2}) = 3^1 = 3$

Cuando se multiplican raíces, si el número que esta dentro de ellas es igual se cancelan.

$(\sqrt{3})(\sqrt{1})(\sqrt{3})(\sqrt{1}) = (\sqrt{3})(\sqrt{3})(\sqrt{1})(\sqrt{1}) = (3^{1/2})(3^{1/2})(1^{1/2})(1^{1/2})$
$= (3)(1) = 3$

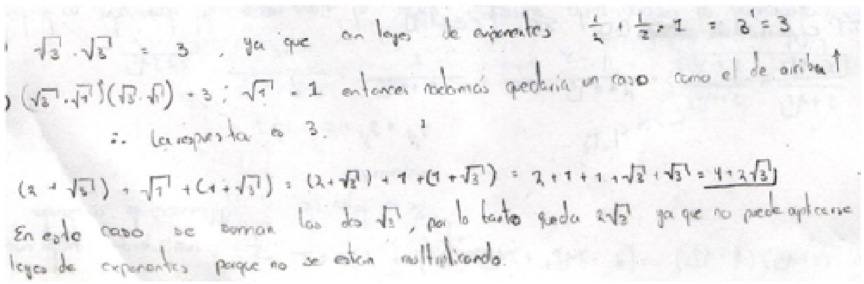
Se multiplican las iguales para cancelar raíz y despues se multiplican los resultados.

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3 = 1$

Se multiplican entre ellos, el primer número por cada uno de los números de la otra operación, se unen los numeros y se eliminan los que son iguales pero con signo distinto.

Figura 5
Evidencia del alumno A-1 del grupo A

Por su lado, el estudiante B-1 del grupo B, argumenta bien sus respuestas a las preguntas uno, dos, tres; como se muestra en la Figura 6.



$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3$, ya que en leyes de exponentes $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 = 3^1 = 3$

$(\sqrt{3}\cdot\sqrt{1})(\sqrt{3}\cdot\sqrt{1}) = 3$; $\sqrt{1} = 1$ entonces [illegible] quedaria un caso como el de arriba

∴ la respuesta es 3.

$(2+\sqrt{3}) + \sqrt{1} + (1+\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3}) + 1 + (1+\sqrt{3}) = 2+1+1+\sqrt{3}+\sqrt{3} = 4+2\sqrt{3}$

En este caso se suman los dos $\sqrt{3}$, por lo tanto queda $2\sqrt{3}$ ya que no puede aplicarse leyes de exponentes porque no se estan multiplicando.

Figura 6
Evidencia del estudiante B-1 del grupo B

En las interrogantes tres y cinco se tiene la suma o la división de números reales, los cuales están definidos por las raíces cuadradas de números reales positivos y/o números enteros. Aquí, aunque los alumnos del grupo B contestaron mejor al instrumento que el grupo A, se identifica de la Tabla 6 y su gráfico en la Figura 4, que menos de la mitad de los alumnos de ambos grupos contestaron correctamente a estas dos preguntas.

Pregunta	Grupo A		Grupo B	
	Respuestas correctas	Porcentaje de respuestas correctas	Respuestas correctas	Porcentaje de respuestas correctas
1	14/15	93.33	9/15	60
2	13/15	86.66	9/15	60
3	4/15	26.66	6/15	40
4	10/15	66.66	9/15	60
5	4/15	26.66	3/15	20

Tabla 6
Resultados de la actividad 2 para detectar los conocimientos previos en ambos grupos (ProCog 2)

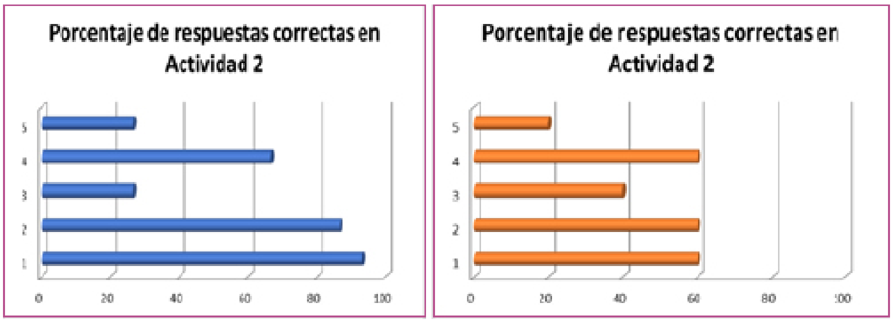


Figura 4
Gráficas del análisis de la información de la actividad 2 del grupo A (color azul) y del grupo B (color naranja)

En general ambas agrupaciones tienen los conocimientos básicos sobre la multiplicación de los números reales definidos por las raíces cuadradas de números reales positivos y/o números enteros. Pues, en esta actividad 2, al realizar la operación de la multiplicación en las preguntas 1, 2 y 4, las raíces cuadradas desaparecen usando la ley de los exponentes, y los números reales resultantes son definidos por números enteros, los cuales son fáciles de manipular por parte de los alumnos. Sin embargo, los estudiantes tienen problemas con las operaciones de suma y división de números reales definidos por las raíces cuadradas de números reales positivos y/o números enteros, ya que en esta actividad 2, cuando se resuelven las preguntas 3 y 5, no desaparecen las raíces cuadradas en la expresión matemática; y ellos no aplican adecuadamente las raíces cuadradas ni sus diferentes propiedades para hallar las respuestas correctas de estas preguntas. Esto significa que los estudiantes presentan algunas deficiencias para realizar operaciones aritméticas con los números reales definidos por las raíces cuadradas. Lo anterior indica que un porcentaje elevado de estudiantes de ambos grupos no desarrolló el ProCog 2 de los conocimientos que miden esta actividad.

Actividad 3

En esta tarea sobre el cálculo de la raíz de una ecuación de grado dos, son pocos los estudiantes de ambos grupos que contestan correctamente a las preguntas; es decir, menos del 27 por ciento de los alumnos de cada grupo respondió correctamente a las dos interrogantes. Pues, se constata que ambos grupos de alumnos tienen problemas para hallar las raíces de una ecuación de segundo grado que estudian en nivel de preparatoria (Stewart, Redlin y Watson, 2012).

El estudiante A-8 no construyó ningún conocimiento claro acerca de este tema, el cual se estudió en los niveles educativos anteriores; pues él no contesta a la pregunta, ver Figura 8.

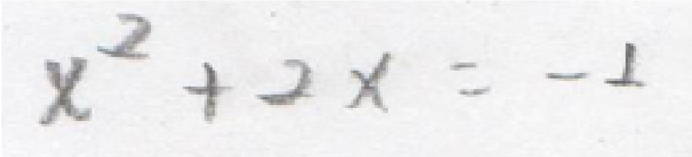


Figura 8
Evidencia del estudiante A-8 del grupo A

Mientras que el alumno B-7 (ver Figura 9), aunque trató de responder a las preguntas, él no tiene las ideas claras sobre el tema; ya que, en la primera ecuación, argumenta que la respuesta es x= −1, siendo una respuesta incompleta pues le falta la otra raíz, es decir x=0.

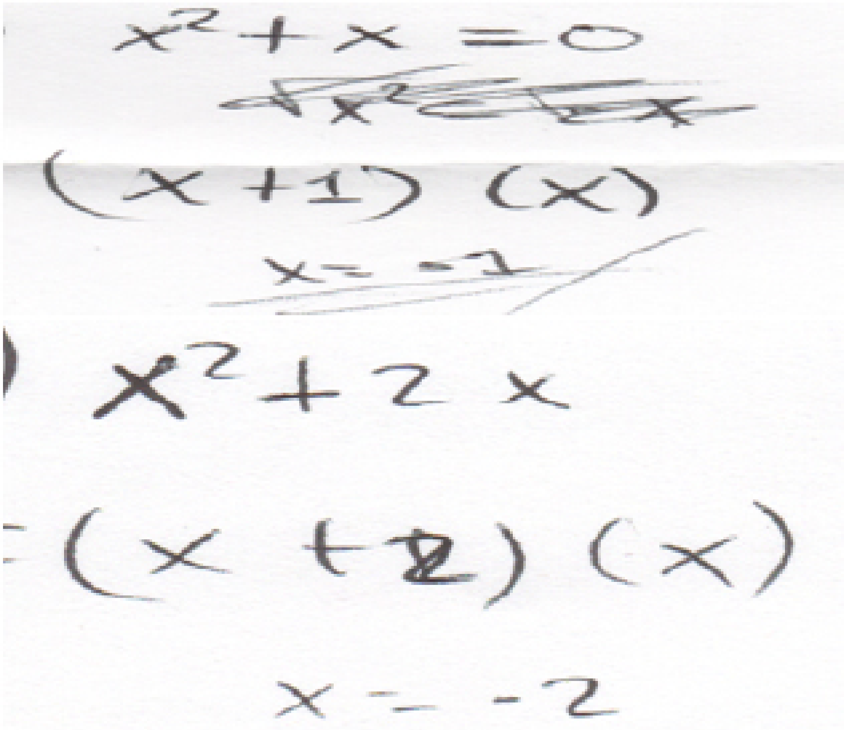


Figura 9
Evidencia del alumno B-7 del grupo B

El alumno B-7 (ver Figura 9) tampoco resuelve bien la segunda ecuación. Primero, no escribe correctamente la ecuación que se tiene que resolver, él escribió x2 + 2x en lugar de x2 + 2x = −1. Cabe mencionar que, lo que él escribió no es una ecuación, ya que una ecuación incluye el signo igual a (=). Segundo, la solución de la ecuación x2 + 2x = −1 no es x = −2 como él menciona, debido a que Stewart, Redlin y Watson (2012) comentan que para la resolución de una ecuación de segundo grado en el conjunto de los números reales ax2 + bx + c = 0, #x ∈ R, a ≠ 0, además de los métodos de resolución como el método gráfico, de completación de un binomio al cuadrado, entre otros; se puede manejar el método de fórmula general . Con cualquiera de los métodos mencionados, se tiene que las soluciones de la ecuación x2 + 2x = −1 son x1 + x2 = −1.

Así, los estudiantes de ambos grupos no pudieron manejar o ejecutar ningunos de los diferentes métodos de resolución de las ecuaciones cuadráticas, los cuales se incluyen en los programas de estudio de secundaria (sep, s.f.); así como en el libro de Pre-cálculo: matemáticas para el pre-cálculo de Stewart, Redlin y Watson (2012), el cual, como cualquier libro de esta disciplina de nivel de preparatoria, trabaja todos los temas mencionados de la actividad.

Con estas evidencias, la información de la Tabla 7 y su correspondiente Figura 7, se concluye que ambos grupos presentan muchas dificultades para desarrollar el ProCog 3 que se aborda en la actividad 3.

Preguntas	Grupo A		Grupo B	
	Respuestas correctas	Porcentaje de respuestas correctas	Respuestas correctas	Porcentaje de respuestas correctas
1	3/15	20	4/15	26.66
2	3/15	20	3/15	20

Tabla 7
Resultados de la actividad 3 para detectar los conocimientos previos en ambos grupos (ProCog 3)

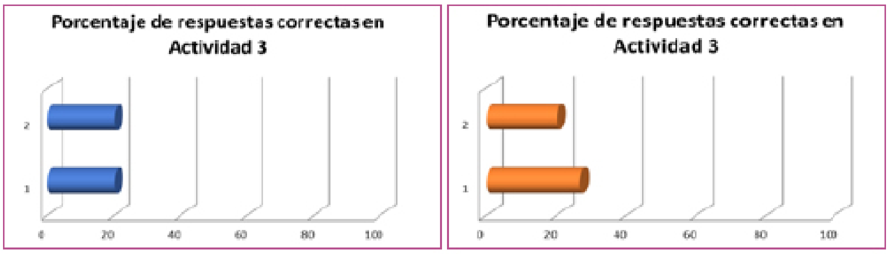


Figura 7
Gráficas del análisis de la información de la actividad 3
del grupo A (color azul) y del grupo B (color naranja)

VI. Conclusiones

En este trabajo, la pregunta de investigación ¿qué conocimientos matemáticos previos tienen los estudiantes antes de tomar el curso de números complejos? y su objetivo perseguido «Identificar en los estudiantes de isc los conocimientos matemáticos previos que tienen antes de tomar el curso de números complejos», fueron contestados mediante la aplicación de un instrumento sobre los conocimientos previos acerca de los números complejos, diseñado de acuerdo con los procesos cognitivos que determinan la construcción del conocimiento matemático, propios de la teoría de la Matemática en Contexto de las Ciencias. El instrumento constaba de tres actividades.

Con los resultados de la primera actividad, donde se determina el desarrollo del ProCog1, se pudo observar que, a partir de los datos de la Tabla 5 y la Figura 1, ambos grupos tienen los conocimientos básicos sobre la raíz cuadrada de un número real positivo y sus diferentes propiedades; más aún se constató que los dos grupos de estudio son similares con respecto al dominio de los conocimientos que mide esta actividad, debido a que aproxidamente la mitad de los estudiantes de ambos grupos pudieron ordenar correctamente los números reales, ya sean números racionales o irracionales, la otra mitad de los alumnos de cada grupo presentaron algunas dificultades serias con respecto al ordenamiento de estos números, como lo muestra la evidencia de la Figura 3 del alumno B-10, quien contestó de manera muy confusa a la pregunta de ordenamiento de dichos números. Todo ello, confirma que sólo la mitad de los estudiantes desarrollaron el ProCog1.

En la segunda actividad sobre la realización de operaciones aritméticas con dichos elementos de este conjunto, la cual determina la construcción del ProCog 2, los datos de la Tabla 6 y la Figura 4 permitieron constatar que ambos grupos tenían los conocimientos básicos, puesto que en las preguntas uno, dos y cuatro, sobre la multiplicación de los números reales definidos por las raíces cuadradas de números reales positivos y/o números enteros, los estudiantes las respondieron con muchas claridad, porque las raíces cuadradas desaparecen usando la ley de los exponentes, y los números reales resultantes son defnidos por números enteros, los cuales son muy fáciles de manipular por parte de ellos, como lo muestran las figuras 5 y 6. Sin embargo, en las preguntas tres y cinco sobre la suma o la división de números reales definidos por las raíces cuadradas de números reales positivos y/o enteros, más de la mitad de ambos grupos no las contestaron correctamente, esto, debido a que no desaparecen las raíces cuadradas en la expresión matemática, lo que implica que ellos tuvieron algunos problemas para realizar operaciones

aritméticas con los números reales definidos por raíces cuadradas. Además, en esta tarea no se notó mucha diferencia de conocimientos entre los dos grupos de estudiantes, sin embargo, se observó que sólo un porcentaje bajo de alumnos desarrolló el ProCog 2.

La tercera y última actividad sobre la resolución de las ecuaciones de segundo grado en el conjunto de los números reales, permitió detectar el desarrollo del ProCog 3. Con los datos de la Tabla 7 y la Figura 7, se percibió que los dos grupos presentaron los mismos problemas para abordar dicha actividad, debido a que menos del 27 por ciento de los alumnos de ambos grupos la contestó correctamente. Los estudiantes presentaron muchas dificultades para encontrar las raíces de ecuaciones de segundo grado que se estudian en el nivel de preparatoria como se observó en las figuras 8 y 9; son muy pocos los que desarrollaron este proceso cognitivo.

De esta forma, los estudiantes de ambos grupos tienen dificultades para desarrollar los diferentes Procesos Cognitivos que determinan la construcción de conocimientos previos necesarios para los números complejos, tanto en el manejo de la aritmética como el manejo de álgebra elemental, temas de suma importancia para el futuro prometedor de estudiantes de ingeniería, en particular de la Ingeniería en Sistemas

Computacionales. Con estos resultados, los alumnos de ambos grupos pueden tener problemas para construir el conocimiento sobre números complejos, debido a que ellos lucharán para conectar el conocimiento nuevo con los conocimientos previos deficientes en sus estructuras cognitivas.

Estos resultados ponen una alerta a los docentes para tomar las medidas necesarias en los cursos previos a los cursos con números complejos. Así, se recomienda que el docente de matemáticas para el caso de los números complejos enfatice en los conocimientos matemáticos previos para que los estudiantes puedan construir o reforzar su conocimiento previo y no sea un obstáculo para los cursos que incluyan números complejos.

Por lo último, se puede concluir que los conocimientos previos de ambos grupos son semejantes. Además, con esta investigación se tiene una información clara sobre los conocimientos previos de los estudiantes, la cual es necesaria para la implementación del método tradicional de enseñanza de las matemáticas, así como, para la implementación de la didáctica de la teoría de la mcc durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Situación que permitirá ver más claramente las diferencias entre ambos grupos al implementar la estrategia didáctica de la mc en el curso de números complejos en trabajos futuros.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D. P. (1968). Educational psychology: A cognitive view. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Ausubel, D. P., Novak, J. D. y Hanesian, H. (1990). Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo. Editorial Trillas.

Brousseau, G. (1998). Les obstacles epistemologiques, problemes et ingenierie didactique. In G. Brousseau, Théorie des situations didactiques, 115-160. Grenoble La Pensée Sauvage.

Camarena, G. P. (1984). El currículo de las matemáticas en ingeniería. Memorias de las Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el ipn. México.

Camarena, G. P. (2002). Metodología curricular para las ciencias básicas en ingeniería. México: Revista Innovación Educativa. 2(10), 22-28, primera parte y 2(11), 4-12 segunda parte.

Camarena, G. P. (2003). Reporte técnico del proyecto de investigación titulado: La matemática en el contexto de las ciencias y la didáctica disciplinaria, Núm. de registro: 20030491-cgpi-ipn, Editorial esime-ipn, México.

Camarena, G. P. y Flores A. I. P. (2012). La interdisciplinariedad: nivel superior. Colección: Experiencias de investigación. Tomo III: Procesos de enseñanza y aprendizaje: estudios en el ámbito de la educación media superior y superior. Coordinadores: Gutiérrez R. D., Ceniceros D. C., Monárrez V. H. pp. 150- 167. Editorial redie.

Camarena, G. P. (2015). A treinta años de la teoría educativa «Matemática en el contexto de las Ciencias». Innovación Educativa, ISSN: 1665-2673 vol. 13, número 62. México.

Camarena, G. P. (2017). Didáctica de la Matemática en Contexto. Revista Educação Matemática Pesquisa, Vol. 19, Núm. 2, pp. 1-26, Brasil.

Carrillo, S.B. (2009). Dificultades en el aprendizaje matemático. Innovación y Experiencias Educativas. Número 16. marzo 2009: Pág.1-10.

Cerizola, N.R., Pérez, N.H., Martínez, R. y Franzini, D. (2000). Resolución de ecuaciones con Valor Absoluto. Una experiencia en el nivel medio superior. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 13. Editorial Iberoamérica. ISBN: 979-625- 227-4. Pág. 8-19.

Dolores, C.y Catalán, A. (2000). El comportamiento variacional de la función lineal: Una experiencia didáctica con estudiantes del bachillerato. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 13, pp.-36-41.

Irem d'aquitaine, Groupe didactique des mathematiques (2013). L'erreur dans l'apprendissage des mathématiques, Petit x, 93, 7-28.

Kreyszig, E. (2013). Matemáticas avanzadas para ingeniería. México: Limusa.

Lehmann, H. (2015). Álgebra. México: Limusa.

Pardo, S. T. y Gómez, A. B. (2007). La enseñanza y aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario. pna, 2(1), 3-15.

Piaget, J. (1991) Introducción a la epistemología genética: El pensamiento matemático. México: Editorial Paidós, Psicología Evolutiva.

Protter, H.M y Morrey, B.C. (1980). Cálculo con geometría analítica. México: Fondo Educativo Interamericano.

Ruiz, M. L. (2014). La transformada de Laplace en el contexto de los circuitos eléctricos. Tesis de Doctorado en Educación, Universidad kino, México.

Ruiz, S. J. M. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. Revistas Iberoamericano de Educación. Número 47/3. Pág.1-8.

SEP (s.f.). Aprendizajes clave para la educación integral: plan y programas de estudio para la educación básica. Recuperado de: http://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). Precálculo: Matemáticas para el cálculo. Sexta edición. México: Cengage learning.

Vigotsky, L. S. (1978). Mind in Society: The development in higher psychological processes. Harvard University Press.

Apéndice

Instrumento de evaluación en conocimientos previos al curso de los números complejos.

Actividad 1

De ser posible, ordene los números y ubíquelos en la recta numérica: $\sqrt{3}, \sqrt{2}, |-\sqrt{1}|, 0, \sqrt{4}, 1.$. (Argumente su respuesta).

De ser posible, ordene los números y ubíquelos en la recta numérica: $2, 3, 1, -10, 2+\sqrt{2}, |-9|$ (Argumente su respuesta).

De ser posible, ordene los números y ubíquelos en la recta numérica: $1, \sqrt{\frac{1000}{1000}}, \sqrt{1}, 1^{10000}, 1000^0$ (Argumente su respuesta).

Actividad 2

1) Calcule $(\sqrt{3})(\sqrt{3})$. (Argumente su respuesta.)
2) Calcule $(\sqrt{3})(\sqrt{1})(\sqrt{3})(\sqrt{1})$.. (Argumente su respuesta.)
3) Calcule $(2+\sqrt{3})+\sqrt{1}+(1+\sqrt{3})$.. (Argumente su respuesta.)
4) Calcule $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$.. (Argumente su respuesta.)
5) Calcule . (argumente su respuesta.)

Actividad 3

1) Resuelva *#x # R*, la ecuación $x^2 + x = 0$
2) Resuelva *#x # R*, la ecuación $x^2 + 2x = -1$