



Revista EIA  
ISSN: 1794-1237  
revista@eia.edu.co  
Escuela de Ingeniería de Antioquia  
Colombia

# DISEÑO GEOMÉTRICO DE UN PROPAGADOR DE RAYOS ÓPTICOS SOBRE UN SISTEMA ACOPLADO DE LENTES

Usma, Jorge Iván; Madrigal Argáez, Jairo; Pérez, John A

DISEÑO GEOMÉTRICO DE UN PROPAGADOR DE RAYOS ÓPTICOS SOBRE UN SISTEMA ACOPLADO DE LENTES

Revista EIA, vol. 15, núm. 29, 2018

Escuela de Ingeniería de Antioquia, Colombia

**Disponible en:** <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=149256546007>

Los artículos publicados en la REVISTA EIA están protegidos por derechos de autor y pueden ser utilizados con fines no comerciales. Los usuarios pueden acceder, descargar, copiar, traducir, y extraer los datos que se requieran del texto, las imágenes, los gráficos y las ilustraciones, siempre y cuando el usuario cumpla con los siguiente requerimientos: • Citar el artículo usando una cita bibliográfica correspondiente. Para tal efecto revise en las referencias el destacado «para citar este artículo». • Utilizar el artículo, su información y elementos gráficos para fines no comerciales. • Mantener la integridad del artículo. • Cualquier traducción, para la cual no se ha establecido un acuerdo de traducción previa con el Fondo Editorial EIA, casa editora de la Revista EIA, debe mostrar claramente la afirmación: «esta es una traducción no oficial de un artículo que apareció en la Revista EIA, y el Fondo Editorial EIA no ha aprobado esta traducción». Para obtener permiso para utilizar los artículos de la Revista EIA, más allá de lo permitido aquí, comunicarse con el Fondo Editorial EIA.

Los artículos publicados en la REVISTA EIA están protegidos por derechos de autor y pueden ser utilizados con fines no comerciales. Los usuarios pueden acceder, descargar, copiar, traducir, y extraer los datos que se requieran del texto, las imágenes, los gráficos y las ilustraciones, siempre y cuando el usuario cumpla con los siguiente requerimientos: • Citar el artículo usando una cita bibliográfica correspondiente. Para tal efecto revise en las referencias el destacado «para citar este artículo». • Utilizar el artículo, su información y elementos gráficos para fines no comerciales. • Mantener la integridad del artículo. • Cualquier traducción, para la cual no se ha establecido un acuerdo de traducción previa con el Fondo Editorial EIA, casa editora de la Revista EIA, debe mostrar claramente la afirmación: «esta es una traducción no oficial de un artículo que apareció en la Revista EIA, y el Fondo Editorial EIA no ha aprobado esta traducción». Para obtener permiso para utilizar los artículos de la Revista EIA, más allá de lo permitido aquí, comunicarse con el Fondo Editorial EIA.



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional.

# DISEÑO GEOMÉTRICO DE UN PROPAGADOR DE RAYOS ÓPTICOS SOBRE UN SISTEMA ACOPLADO DE LENTES

GEOMETRICAL DESIGN OF AN OPTICAL RAY PROPAGATOR OVER A LENS-COUPLED SYSTEM  
DESENHO GEOMÉTRICO DE UM RAIOS ÓPTICOS PROPAGATOR EM UM SISTEMA DE LENTES ACOPLADAS

Jorge Iván Usma [jorgeusma@itm.edu.co](mailto:jorgeusma@itm.edu.co)

*Institución Universitaria, Colombia*

Jairo Madrigal Argáez [jairomadrigal@itm.edu.co](mailto:jairomadrigal@itm.edu.co)

*Institución Universitaria, Colombia*

John A Pérez [jhonperez@itm.edu.co](mailto:jhonperez@itm.edu.co)

*Institución Universitaria, Colombia*

Revista EIA, vol. 15, núm. 29, 2018

Escuela de Ingeniería de Antioquia,  
Colombia

Redalyc: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=149256546007>

**Resumen:** Se presenta un esquema modular computacional para cálculo analítico y trazado geométrico de vectores los cuales al cruzarse satisfacen la ley de Snell. Este esquema es extendido a un sistema modular de lentes acoplados, dando lugar a un sistema óptico compuesto de conjuntos de lentes incrustados sobre el eje óptico. Las lentes son parametrizadas por un índice de refracción homogéneo asociado a una región de puntos cartesianos acotados por dos radios de curvatura separados y la pupila de entrada; en tanto que la refracción (en las superficies de la lente) es calculada como la intercepción de dos vectores geométricos bajo el régimen de la ley de Snell.

**Palabras clave:** lente geométrica, sistema modular de lentes, ley de Snell, óptica geométrica.

**Abstract:** In this paper a computational modular scheme to calculate and draw a set of vectors which satisfy the Snell Law is presented. This scheme can be extended to build a modular coupled lenses system, so a compound optical system containing inlayed lenses over an optical axis can be admitted. The lenses are parametrized by a homogeneous refractive index which is associated to a Cartesian Coordinates System in which a region is limited by two separated radii of curvature and an entrance pupil while the refraction over the lens surface is calculated as the interception between two geometric vectors under Snell Law regime.

**Keywords:** geometric lens, modular lenses system, Snell law, geometrical optics.

**Resumo:** Apresenta-se um esquema modular computacional para o cálculo analítico e traçado geométrico de vetores os quais ao se cruzarem satisfazem a lei de Snell. Esse esquema é estendido a um sistema modular de lentes acopladas, dando lugar a um sistema óptico composto por conjuntos de lentes incorporados sobre o eixo óptico. As lentes são parametrizadas por um índice de refração homogêneo associado a uma região de pontos cartesianos dimensionais por dois raios de curvatura separado e a pupila de entrada; em quanto a refração (nas superfícies da lente) é calculada como a intercepção dos vetores geométricos embaixo do regime da lei de Snell.

**Palavras-chave:** lente geométrica, sistema de lentes modular, lei de Snell, óptica geométrica.

## Introducción.

La historia de la Óptica Geométrica e Instrumental está relacionada con la historia de las lentes. El descubrimiento de las leyes de la reflexión y de la refracción en el siglo XVII por Snell[1] [A] Willebrord Snellius (Snell) (1581-1626) matemático y astrónomo holandés (profesor en la universidad de Leiden) que se dedicó al estudio de la óptica geométrica. Catorce siglos después de los experimentos de Tolomeo, Snell consiguió medir los ángulos que forman los rayos incidentes a la superficie de separación de dos medios, así como los que forman los rayos refractados y a partir de tales mediciones, formuló la ley de la refracción conocida como ley de Snell, desarrollada posteriormente por Descartes. dio lugar a un modelo para la comprensión de la formación de las imágenes y en consecuencia, al desarrollo de instrumentos ópticos como el telescopio, el microscopio y el espectroscopio, de los cuales la mayoría de los instrumentos ópticos posteriores son modificaciones de éstos. En el siglo XIX Karl Friedrich Gauss estableció la teoría de primer orden de la óptica geométrica, basada en la ley de Snell mediante consideraciones geométricas para el cálculo de la posición y el tamaño de las imágenes en lentes.

A la fecha el avance tecnológico ha proporcionado un escenario que ha favorecido el desarrollo del cálculo numérico, con lo cual ha sido posible diseñar instrumentos ópticos con mayor precisión, mediante simulación computacional y elevar así la calidad de los dispositivos ópticos, ajustando los parámetros de diseño previos a su construcción.

En este documento se expone el esquema de un modelo de representación geométrica de puntos y las relaciones entre estos, que dan lugar a un conjunto de vectores y de superficies esféricas donde se satisface la ley de Snell y está estructurado de la siguiente manera:

En la sesión 1 se establecen los parámetros topológicos de la región geométrica que acota los puntos que estructuran la lente.

La sección 2 expone el enfoque vectorial del trazado de rayos y del cálculo de la intersección de rayo - lente bajo el régimen de la ley de Snell.

La sección 3 presenta la descripción paramétrica de la lente geométrica y el acople modular del sistema de lentes en un arreglo matricial.

En la sección 4 se expone el esquema modular para el acople de lentes en la modelación de un sistema óptico compuesto por un grupo de lentes en secuencia.

La sección 5 presenta gráficamente el comportamiento de un vector, que cruza la región constituida por un sistema acoplado de lentes, aplicado a: un dispositivo tipo Tessar y a un modelo propio desarrollado por los autores nombrado dispositivo de telescopio Jairus.

Los cálculos y representaciones geométricas han sido desarrolladas en Matlab como ambiente portador y entre los resultados alcanzados se dispone de la modelación de lentes rápidas tales como el dispositivo Tessar, además de situaciones asociadas a los sistemas ópticos del tipo de aberración esférica.

## 1. Modelo Geométrico de la lente.

En términos geométricos, la lente se acota por la superficie que denota el conjunto de puntos asociados a parámetros que describen su forma y posición sobre el eje óptico. Esta superficie es parametrizada mediante por un índice de refracción,  $n$ , encerrado entre dos superficies curvas con radios curvatura,  $R_1$  para la primera superficie y  $R_2$  para la segunda, cuyos vértices están separados por una distancia  $d$  que determina el grosor de la lente (Thompson, 2001). El parámetro  $\alpha$  es asociado al ángulo visual que determina la dimensión de la pupila de la lente (Gómez González, 2012), esta descripción es ilustrada en la Figura 1.

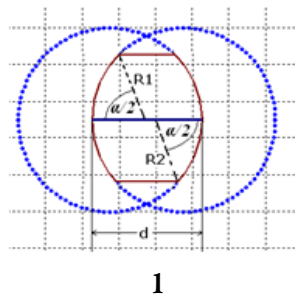


Figura 1

Figura 1 Construcción de la lente

Así la lente es parametrizada en términos de la localización del vértice de la primera superficie los radios de curvatura el grosor de la misma y un índice de refracción asociado a la región acotada entre los radios de curvatura separados una distancia  $d$ . En ésta, las coordenadas cartesianas de los puntos de cada superficie curva, satisfacen las ecuaciones (1), (2) y (3) (Lehmann, 1989).

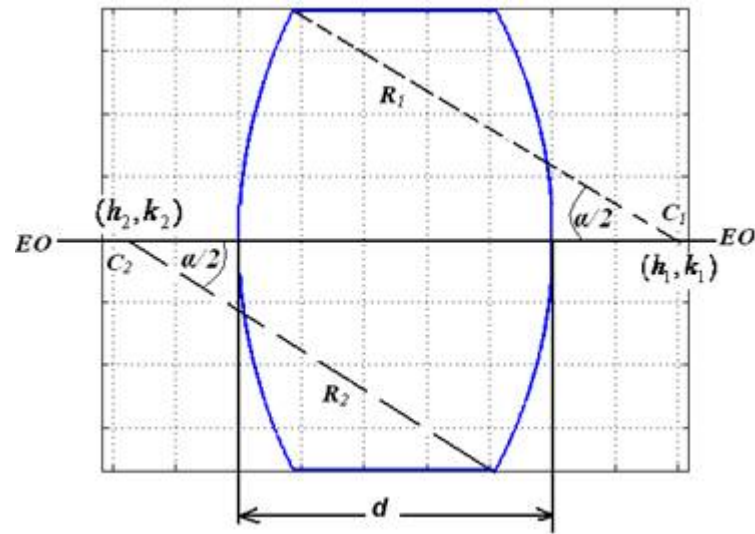
$$R_l = \sqrt{(x - h_l)^2 + (y - k_l)^2} \quad [1]$$

$$x_{il} = h_l + R_l * \cos(\theta_i) \quad [2]$$

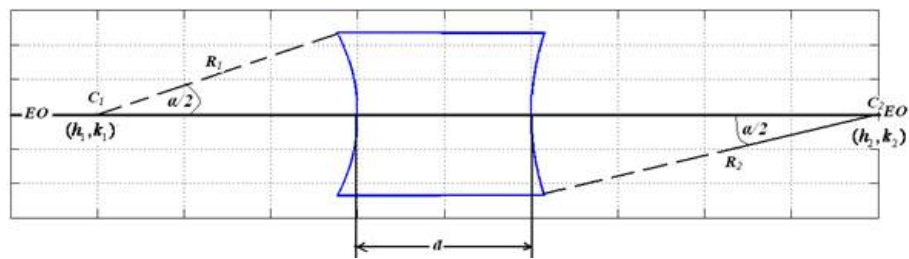
$$y_{il} = k_l + R_l * \sen(\theta_i) \quad [3]$$

siendo  $(h_l, k_l)$  las coordenadas del centro de la lente  $l$ .  $x_{il}$  e  $y_{il}$  son las coordenadas cartesianas de los puntos de la superficie de la lente para  $\theta_i$ , descrito por la ecuación (4) que define los rangos de la pupila de la lente. La convención de los signos para los radios de curvatura considera a  $R$  positivo si su centro está a la derecha del vértice y será negativo si su centro está a la izquierda, siempre y cuando, la dirección de los rayos de luz vaya de izquierda a derecha en la forma como aumenta la coordenada sobre el eje óptico (Hugh D. Young, 2009).

$$\theta_i \begin{cases} [\pi - \alpha/2, \pi + \alpha/2] & R < 0 \\ [-\alpha/2, \alpha/2] & R > 0 \end{cases} \quad [4]$$



A  
A



B  
B

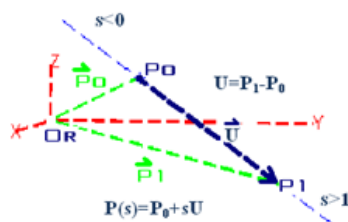
Figura 2 Convención de Signos para los radios de curvatura. A) Semicírculos acotados con  $R_1 > 0$  y  $R_2 < 0$  lente convexa. B) Semicírculos acotados con  $R_1 < 0$  y  $R_2 > 0$  lente cóncava.

## 2. Trazado de rayos.

Dado que las trayectorias en los medios homogéneos e isotrópicos son rectilíneas sobre el plano (Thompson, 2001), el rayo de luz es tratado como un vector geométrico de dos dimensiones y es definido mediante la correspondencia entre dos puntos que denotan los extremos de un segmento de recta (Mortenson, 1999), la versión paramétrica del vector presentada en la ecuación (5) e ilustrada gráficamente en la Figura 3

$$P(s) = P_0 + s\vec{U} \quad [5]$$

En esta ecuación,  $P(s)$  representa el punto geométrico de la cabeza del vector  $\vec{r}$  de magnitud  $s$  y con origen en el punto  $P_0$ .



3

Figure 3

Figure 3 Representación geométrica de un vector

El vector entre los puntos  $P_0$  y  $P_1$  es calculado mediante la diferencia relativa entre sus coordenadas paralelas como se describe en la ecuación (6).

$$U(x, y, z) = \begin{bmatrix} x_i - x_0 \\ y_i - y_0 \\ z_i - z_0 \end{bmatrix} \quad [6]$$

### 2.1 Cruce del rayo de luz con la lente.

El punto de incidencia del rayo con la lente es calculado mediante la intersección de dos vectores. Uno de ellos, el vector  $V_s$ , es tangente a la superficie de la lente con el origen en  $p_{v2}$  como se escribe paramétricamente en la ecuación (7), es construido por dos puntos sucesivos del conjunto de puntos que definen la lente, planteado en la sección I. EL otro vector  $V_i$  con origen  $p_{v1}$ , descrito paramétricamente por la ecuación (8) (Mortenson, 1999) representa al rayo incidente como lo muestra la Figura 4.

$$P_2 = p_{v2} + \delta V_s \quad [7]$$

$$P_1 = p_{v1} + \kappa V_i \quad [8]$$

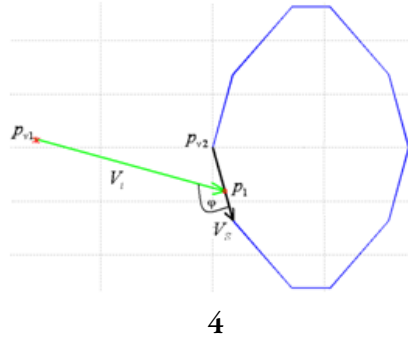


Figura 4

Figura 4 Intersección del rayo de luz con la lente

El punto de intersección es calculado cuando  $P_1 = P_2$ , esto lo determina el resultado de la solución del sistema de ecuaciones paramétricas (7) y (8) como sigue:

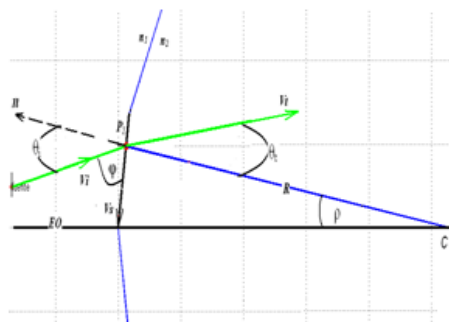
$$[V_i - V_s]^{-1}[p_{v2} - p_{v1}] = \begin{bmatrix} \kappa \\ \delta \end{bmatrix} \quad \{0 \leq \delta \leq 1\} \quad [9]$$

## 2.2 Ley de Snell.

La ley de Snell determina la dirección (con respecto al vector normal a la superficie) de un rayo de luz que emerge de un medio con índice de refracción  $n_i$  a otro de índice  $n_t$  diferente (Wolf, 1970) (Serrano, 2005). Este es calculado a través de la ecuación (10) y descrita gráficamente en la Figura 5

$$\theta_t = \text{sen}^{-1} \left( \frac{n_i}{n_t} \text{sen}(\theta_i) \right) \quad [10]$$

El rayo incidente parte la fuente de iluminación y va dirigido hacia la lente, hasta el punto de incidencia el cual es calculado a través de la ecuación (9), y es la base para el cálculo del vector normal de la curva que da forma a la lente. Esta situación es ilustrada en la Figura 5.



5

Figura 5

El rayo incidente, el reflejado, el transmitido o refractado y el vector normal a la superficie en el punto de incidencia, están en el mismo plano.

### 2.3 Transformación de coordenadas

Los ángulos de incidencia y de refracción son transformados al sistema de referencia fijado por el eje óptico. En la descripción geométrica exhibida en la Figura 5, se observan las relaciones angulares descritas en la ecuación (11).

$$\begin{cases} \alpha_i = \theta_i - \rho \\ \alpha_t = \theta_t - \alpha_t \end{cases} \quad [11]$$

donde  $\rho$  es el ángulo del vector normal,  $\alpha_i$  el ángulo del rayo incidente y  $\alpha_t$  el ángulo entre el rayo refractado con respecto al Eje Óptico (EO) (Thompson, 2001). La Figura 6, ilustra cuatro situaciones de intersección para el cálculo del ángulo de refracción  $\theta_t$ . Dos situaciones se presentan cuando el rayo entra en la región de la lente, una a cada lado del eje óptico, e igualmente cuando el rayo sale. Éstas son presentadas en función del radio de curvatura y la inclinación respecto al eje óptico del vector incidente, de la manera como se plantea en la Tabla 1.

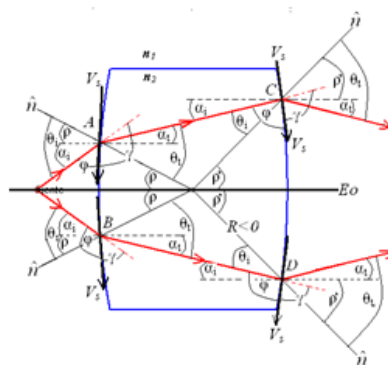
$R$	$\phi$	$\alpha_t$	Lugar geométrico
$R > 0$	$\phi > \pi/2$	$\alpha_t = \theta_t - \rho$	Punto B
$R > 0$	$\phi < \pi/2$	$\alpha_t = \rho - \theta_t$	Punto A
$R < 0$	$\phi > \pi/2$	$\alpha_t = \theta_t - \rho$	Punto D
$R < 0$	$\phi < \pi/2$	$\alpha_t = \rho - \theta_t$	Punto C

Tabla 1

Tabla 1

Tabla 1. Relaciones entre la geometría de la lente y el ángulo de refracción como resultado de esta selección se construye el vector  $V_t$ .





6

Figura 6

Figura 6 Esquema de doble refracción

De esta manera el vector que representa el rayo refractado puede ser calculado de la manera descrita en la ecuación (12).

$$\begin{bmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \end{bmatrix} + d * \begin{bmatrix} \cos(\alpha_t) \\ \sin(\alpha_t) \end{bmatrix} \quad [12]$$

La propagación del rayo dentro de la lente el vector refractado en la primera superficie hace las veces de el vector incidente de la segunda superficie, en la cual el rayo emerge de la lente. Este procedimiento hace posible generalizar el cálculo de los vectores de incidencia y refracción de los rayos que se propagan en un sistema de lentes acoplado.

A diferencia del tratamiento matricial presentado otros autores (Halrach, 1964) y (Hetch, 2005), el cual muestra ser funcional en la óptica paraxial, el presente planteamiento aplica para lentes de mayor apertura numérica, ampliando el rango de la pupila de entrada y el grueso de la lente no tiene restricción.

### 3. Acople modular de lentes

El acople de las lentes es establecido por el vértice de la primera superficie, los radios de curvatura R1 y R2, el grueso d, el índice de refracción n, y el eje óptico (EO), en orden sistemático y sucesivo para su localización en el sistema. La tabla 2 presenta el arreglo matricial del dispositivo Tessar (Hetch, 2005) ilustrado en la Figura 7 compuesto por cuatro lentes ordenados secuencialmente sobre el eje óptico en la dirección de x. En la matriz, las lentes son ordenadas en filas y ordenadas en una secuencia que inicia de la parte superior de la matriz. Los parámetros de la segunda lente están en la segunda fila y así en sucesión hasta el final de la tabla. La primera columna presenta el valor de la coordenada x del vértice de la primera superficie de la lente, la segunda columna contiene el valor del radio de curvatura de la primera superficie, R1, la tercera columna contiene el radio de la segunda superficie R2; en la cuarta columna, el valor del grueso de la lente, la quinta contiene el índice de refracción n. El

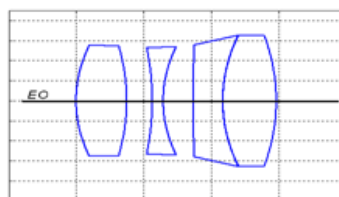
parámetro  $\delta$  denota la distancia de separación entre el vértice de la segunda superficie con el vértice de la primera superficie del lente a continuación y la última columna indica la coordenada y del eje óptico.

Tabla 2 Arreglo matricial de lentes de un dispositivo Tessar

Lente	Vértice	$R_1$	$R_2$	Grueso (d)	Índice de refracción n	$\delta$	EO
1	3	1.260	-27.570	0.375	1.6116	0.189	4
2	$V_2 + d_2 + \delta_2$	-3.457	1.582	0.081	1.6053	0.525	4
3	$V_3 + d_3 + \delta_3$	50.00	1.920	0.217	1.5123	0.010	4
4	$V_4 + d_4 + \delta_4$	1.920	-2.400	0.396	1.6116		4

Tabla 2

Tabla 2



7

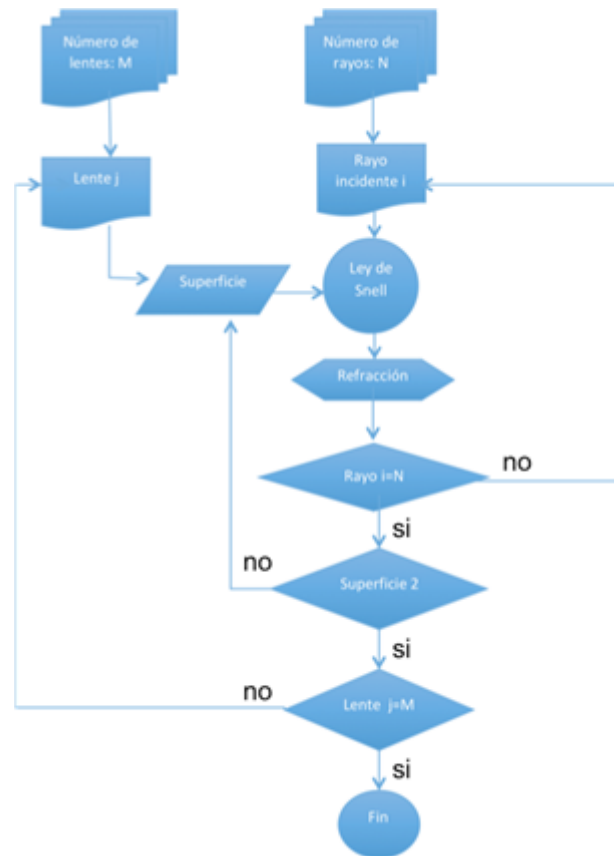
Figura 7

Figura 7 Sistema acoplado de lentes del dispositivo Tessar

#### 4. Esquema modular del sistema trazador de rayos

En las secciones anteriores se trató un modelo geométrico para la lente y un esquema matricial modular para el acople de lentes en un sistema óptico compuesto, los cuales en conjunto con el modelo de trazado de rayos de la sección 2 provee un escenario para el diseño de sistemas ópticos compuestos.

La Figura 8 presente el esquema de operación del sistema acoplado de lentes y rayos. En este los lentes y los vectores son construidos separadamente en la manera como se presentaron en las sesiones 1 y 2. Por un lado se toma el sistema de lentes y por el otro lado el numero de rayos que inciden sobre el sistema de lentes, tomando uno a uno las superficies de las lentes, dos por cada una, y se someten a la ley de Snell generando el grupo de rayos que se propagan por cada una de las lentes de manera individual hasta la totalidad de las lentes



8

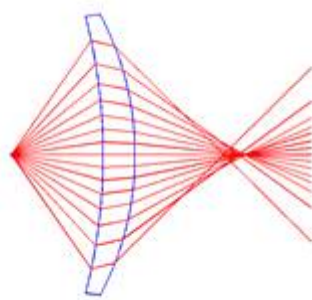
Figura 8

Figura 8 Esquema algorítmico del sistema trazador de rayos en el esquema de lentes acoplado

## 5. Resultados.

En las secciones 1, 3 y 4 se trató un modelo geométrico para la lente y un esquema matricial modular para el acople de lentes en un sistema óptico compuesto, los cuales en conjunto con el modelo de trazado de rayos de la sección 2 provee un escenario para el diseño de sistemas ópticos compuestos.

Para exhibición de la funcionalidad del esquema expuesto en este informe se han modelado tres situaciones: La primera ilustrada en la Figura 9 presenta el modelo de trazado de rayos sobre una lente menisco cóncava que es atravesada por un conjunto de rayos. En esta puede verse como no todos los rayos cruzan el eje óptico en el mismo lugar, tal como lo define la aberración esférica

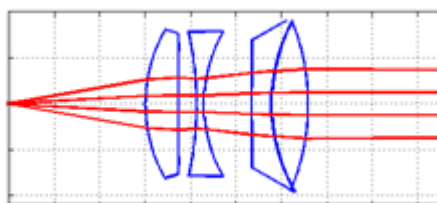


9

Figura 9

Figura 9 Rayos que atraviesan un menisco cóncavo con aberración esférica

En la segunda, el dispositivo Tessar, descrito matricialmente en la tabla 2, es expuesto gráficamente en la Figura 10. El sistema puede verse como una fuente puntual de luz que se propaga de izquierda a derecha atravesando un sistema óptico, generando a la salida de este un conjunto de rayos que se propagan hacia el infinito en forma paralela.

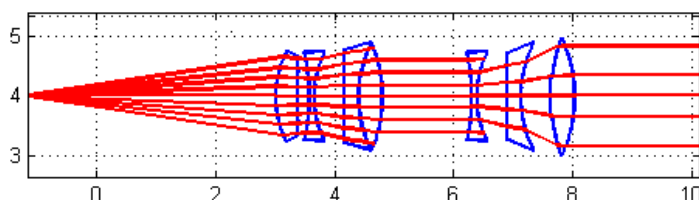


10

Figura 10

Figura 10 Rayos que atraviesan el dispositivo Tessar

En la tercera situación, el esquema modular se ha usado para diseñar un dispositivo de telescopio "Jairus" de mayor potencia, ilustrado en la Figura 11, el cual atrapa rayos que vienen desde la izquierda y los hace converger al punto imagen.



11

Figura 11

Figura 11 Dispositivo de telescopio Jairus

Esta interpretación se hace basado en el principio de reversibilidad[2] [B] El principio de reversibilidad dice que si no se absorbe luz, un rayo luminoso que se refleje o se refracte volverá a describir su trayectoria original cuando se le invierta la dirección, en otras palabras las trayectorias de la luz a través de diferentes medios son reversibles. (Sagrario Millán, 2004) a través del cual puede entenderse en este dispositivo al conjunto de

rayos que vienen paralelamente desde el infinito, de derecha a izquierda, y los rayos que atraviesan el sistema de lentes convergen en el punto imagen.

## 6. Conclusiones.

Este reporte expone el tratamiento de la óptica geométrica en la descripción del funcionamiento de sistemas ópticos compuestos mediante una aplicación sistemática de los principios básicos de la óptica geométrica proporcionando el fundamento del funcionamiento de las lentes esféricas.

Los aspectos resultados en el presente trabajo son de uso práctico para la comprensión de la óptica geométrica de los modelos de propagación de rayos de luz a través de los lentes y en la implementación de una amplia gama de aspectos relacionados con el diseño y funcionamiento de sistemas ópticos complejos.

## 7. Referencias

- Gómez González, E. (2012). Guía Básica de Conceptos de Óptica Geométrica. [En línea] Available at: <http://laplace.us.es/campos/optica/general/opt-guia1.pdf> [Último acceso: 27 06 2017].
- Halrach, K. (1964). Matrix representation of gaussian optics. American Journal of Physics.
- Hetch, E., 2005. Óptica. 5 ed. s.l.:s.n.
- Hugh D. Young, R. A. F. (2009). Física universitaria, con física moderna. Decimosegunda ed. México: Addison-Wesley.
- Lehmann, C. (1989). Geometría Analítica. Decimatercera ed. México: Limusa, S. A. de C. V..
- Mortenson, M. (1999). Mathematics for Computer Graphics.. Second Edition ed. s.l.:Industrial press,Inc..
- Sagrario Millán, M., Escofet, J., Pérez, E. (2004). Óptica Geométrica. Barcelona: Ariel..
- Urcid Serrano, G., Cornejo Rodríguez, A. (2005). ÓPTICA GEOMÉTRICA Resumen de Conceptos y Fórmulas. Puebla(Tonanzintla ): Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica .
- Thompson, B. J., Malacara, D. (2001). Stravroudis, O. "Basic Ray Optics,". New York: Handbook of Optical Engineering, Optical Eng..
- Wolf, E., Born, M. (1970). Principles of Optics. 4th.ed. ed. s.l.:Pergamon Press.