



Ciencias Holguín
ISSN: 1027-2127
revista@cigetholguin.cu
Centro de Información y Gestión Tecnológica de
Holguín
Cuba

Tipos de insight presentes en la solución de problemas matemáticos en clases

Cañón Rincón, Carlos Alberto; García Pupo, Mauro Misael

Tipos de insight presentes en la solución de problemas matemáticos en clases

Ciencias Holguín, vol. 24, núm. 2, 2018

Centro de Información y Gestión Tecnológica de Holguín, Cuba

Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=181555444002>

Esta licencia permite a otros entremezclar, ajustar y construir a partir de su obra con fines no comerciales, y aunque en sus nuevas creaciones deban reconocerle su autoría y no puedan ser utilizadas de manera comercial, no tienen que estar bajo una licencia con los mismos términos.



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0 Internacional.

Tipos de insight presentes en la solución de problemas matemáticos en clases

Types of insight present in the solution of math problems in class

Carlos Alberto Cañón Rincón I
Universidad Antonio Nariño, Colombia
 carloscanon@uan.edu.co

Redalyc: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=181555444002>

Mauro Misael García Pupo II
Universidad Antonio Nariño, Colombia
 mauro@uan.edu.co

Recepción: 01 Febrero 2017
 Aprobación: 21 Noviembre 2017
 Publicación: 30 Abril 2018

RESUMEN:

Esta investigación tuvo como objetivo diseñar una metodología que permitiera apreciar y caracterizar la ocurrencia de los tipos de insight en el pensamiento matemático convergente y divergente presentes en el proceso de las soluciones de problemas por los estudiantes, en las clases de un curso de la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Antonio Nariño. Se utilizó una metodología con un enfoque cualitativo, a través de un estudio de casos en dos momentos en los años 2015 y 2016. Como parte del análisis y discusión de los resultados obtenidos fue posible identificar y caracterizar tres tipos de insight. Los mismos ocurren cuando los estudiantes han encontrado soluciones de forma exitosa.

PALABRAS CLAVE: Pensamiento, Convergente, Divergente, Insight.

ABSTRACT:

This research had as objective to design a methodology that would appreciate and characterize the occurrence of the insight types in convergent and divergent of mathematical thinking in the process of the solutions of problems for students, in the classes in a course of the bachelor's degree in mathematics teaching in the Antonio Nariño University. A qualitative approach was used in a case study two times between the years 2015 and 2016. As part of the analysis and discussion of the results obtained, it was possible to identify and characterize three types of insight. The same occurs when students have found solutions successfully.

KEYWORDS: Thinking, Convergent, Divergent, Insight.

INTRODUCCIÓN

Entre los diferentes tipos de pensamiento, algunos autores denominan dos categorías: el pensamiento matemático: el convergente y el divergente, conceptos introducidos por Guilford, J.P. (1950). Para este autor el pensamiento convergente se fundamenta en la búsqueda de una respuesta determinada o convencional cuyo resultado lo asocia con una única solución a un problema, mientras que el pensamiento divergente lo identifica con diferentes caminos que permiten encontrar una mejor y/o novedosa solución al problema.

Se ha podido constatar directamente que en la construcción de soluciones a problemas matemáticos relevantes o en la solución de problemas de competencias matemáticas se han presentado experiencias en

NOTAS DE AUTOR

- I Magíster y Doctor en Educación Matemática. Docente investigador tiempo completo de la Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia. Crr. 38 # 58ª-77.
- II Doctor en Ciencias Matemáticas. Docente investigador tiempo completo y Director del programa de maestría y doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia. Crr. 38 # 58ª-77.

las cuales, después de transcurrido un tiempo de la búsqueda infructuosa de la solución de un problema, ésta ha emergido abruptamente, incluso después de haberse abandonado dicha búsqueda. Esto puede ocurrir en circunstancias muy ajenas al ambiente académico de la labor matemática y este fenómeno cognitivo se conoce como insight.

A finales del siglo XIX Poincaré (1914) quiso caracterizar el cómo se puede desarrollar el pensamiento matemático. En este sentido se encuentran descripciones en la literatura de educación matemática vinculada con la solución de problemas, las cuáles relacionan el talento, la capacidad y la creatividad de cada individuo, como parte sustancial de sus competencias.

Planteamiento del problema

Un aspecto sumamente interesante dentro del pensamiento matemático es la ocurrencia de este fenómeno cognitivo. El insight se produce cuando al tratar de darle solución a un problema matemático se produce un desbloqueo interno, dando paso a la aclaración de lo que tan insistentemente se está buscando.

De acuerdo con lo descrito por Hadamard (1954), uno de los seguidores de Poincaré (1914), forma parte de cuatro fases en el proceso de creación: *i) Preparación, ii) Incubación; iii) Iluminación y iv) Verificación.*

Por otra parte, Guzmán, M. de (2003), relata episodios interesantes en la vida académica de dos grandes Matemáticos: Gauss, quien escribió una carta donde relataba sobre cierto teorema de la teoría de números que había tratado de demostrar, sin éxito, durante varios años: “Finalmente, hace dos días, lo logré, no por mis penosos esfuerzos, sino por la gracia de Dios. Como tras un repentino resplandor de relámpago, el enigma apareció resuelto. Yo mismo no puedo decir cuál fue el hilo conductor que conectó lo que yo sabía previamente con lo que hizo mi éxito posible”. (De una carta comentada en *Revue des questions scientifiques*, 1886, p. 575. Como se citó en Hadamard, 1954, Cap. 1)

Y Hamilton, describe con las siguientes palabras su hallazgo de los cuaternios, tras quince años de infructuosos esfuerzos:

Mañana será el quince aniversario de los cuaternios. Vinieron a la vida, o a la luz, completamente maduros, el 16 de octubre de 1843, cuando paseaba con la señora Hamilton hacia Dublín, al llegar al puente de Brougham. Allí, y en aquel momento, sentí que el circuito galvánico del pensamiento se cerraba, y las chispas que saltaron de él fueron las ecuaciones fundamentales que ligan i, j, k [los nuevos números que hacen el papel de i de los complejos], exactamente tal como los he usado siempre desde entonces... Sentí que en aquel momento se había resuelto un problema, que se había satisfecho una necesidad intelectual que me había perseguido por lo menos quince años. (Como se citó en Guzmán, M., 2003)

Todo lo anterior sugiere la necesidad de responder estas interrogantes: ¿Qué tipos de insight podrían propiciarse dentro y fuera del aula en el transcurso de los esfuerzos de los estudiantes por resolver problemas no rutinarios? ¿Si el pensamiento divergente debe asociarse únicamente a situaciones donde se encuentran diferentes caminos que permiten encontrar una mejor o novedosa solución? ¿Se podría asociar el pensamiento divergente con una sola solución, pero novedosa y/o excepcional? Estas preguntas justifican el planteamiento siguiente:

Problema de investigación

¿Qué características tienen las ideas que emergen y que se conocen como insight cuando ocurren en los tipos de pensamiento convergente o divergente y que se evidencian en los estudiantes en el proceso de solución de problemas matemáticos propuestos en clases?

Objetivo general

Describir las ocurrencias del insight en los tipos de pensamiento matemático convergente y divergente presentes en la resolución de problemas propuestos a los estudiantes en las clases de un curso de la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Antonio Nariño.

Para fundamentar esta investigación se analizaron trabajos relacionados con la ocurrencia del insight y de factores asociados a él en tres direcciones: I. El insight según las ciencias psicológicas. II. Pensamientos convergente y divergente. III. Resolución de problemas y pensamiento matemático.

En el primero, se hace referencia a las siguientes investigaciones: *'Magical' Moments in Mathematics: Insights into the Process of Coming to Know* de Barnes, M. (2000). El anterior trabajo debe ayudar a una descripción de los posibles insight que pueden emerger en transcurso de solución de problemas planteados en el aula.

En el segundo, se destacan: *Divergence and convergence of mental forces of children in open and closed mathematical problems* de Sak, U. Maker, C. (2005). *Cultivating Divergent Thinking in Mathematics through an Open-Ended Approach* de Oh, N. K, Jung S. P., y Jee H. P. (2006). Estos autores relacionan los dos tipos de pensamiento, tanto el convergente, como el divergente, con la fluidez, la originalidad y la flexibilidad.

En el tercero, se destaca la investigación: *La enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas* de Cruz, M. (2006) que incursiona sobre aspectos importantes de la enseñanza de las matemáticas a través de la solución de problemas y desde el punto de vista de la psicología de la Educación Matemática. Constituye un buen punto de partida para este estudio de casos.

Consideraciones psicológicas

Según Fauconnier y Turner (1998, 2002) en sus trabajos *Conceptual Integration Networks* y *The way we think: conceptual blending and the mind's hidden complexity* sostienen que la integración conceptual es en general una operación cognitiva a la par con la analogía, la recursividad, los modelos mentales. Ellos presentan operaciones cognitivas dinámicas, flexibles y activas que entran en juego en el momento de pensar y que denominan *cognitive blending*, las que se consideran relacionadas con el fenómeno del *insight*. Describen una estructura de entrada de espacios mentales y un salto o proyección a nuevos espacios mentales independientes de los primeros y realizado por medio de una combinación inesperada de operaciones. García, M. (2014) describe dicho *insight* (la inspiración o iluminación que ocurre repentinamente) como mediadora entre dos espacios mentales; unos previos comprometidos con un marco referencial y determinadas creencias, el otro que son los nuevos espacios mentales, los cual se denominarán estructuras cognitivas.

Métodos de los cuatro pasos

Polya (1965) propone, en su primer libro, el Método de los Cuatro Pasos, para resolver cualquier tipo de problema se debe: 1) comprender el problema, 2) concebir un plan, 3) ejecutar el plan y 4) examinar la solución. Para cada una de estas etapas propone una serie de preguntas y sugerencias; se retomarán las más importantes en esta investigación, ya que potencialmente deben permitir, de alguna forma, la ocurrencia de algún tipo de *insight*, en el proceso de solución de problemas en el salón de clases.

Otras consideraciones sobre la resolución de problemas

En la obra *Matemáticas y razonamiento plausible* el autor sostiene que el conocimiento matemático esta soportado por el razonamiento demostrativo y apoya las conjeturas por medio de este tipo de razonamiento. "[...] ya que una prueba matemática es un razonamiento demostrativo, pero la evidencia inductiva del físico, la evidencia circunstancial del abogado, la evidencia documental del historiador y la evidencia estadística del economista pertenecen al razonamiento plausible". (Polya, 1954, p.13).

Se entiende como un razonamiento conjetural aquel que permite elaborar hipótesis, conjeturas, y así examinar su validez en cualquier momento; además, de contrastarlas y reformularlas según sea el caso y así obtener nuevas hipótesis susceptibles de ser demostradas.

Polya (1954) hace la distinción de estos dos tipos de razonamiento, ya que el demostrativo, es seguro y definitivo, mientras que el plausible es azaroso, discutible y provisional.

Por otro lado, Mason, J, Burton, L. y Stacey, K. (1988) en su obra *Pensar Matemáticamente*, describen los procesos que rigen el pensamiento matemático en con el objetivo de mostrar cómo acometer cualquier problema; es decir, cómo atacarlo de un modo eficaz y cómo ir aprendiendo de la experiencia. Ellos sugieren tres fases:

1. El abordaje. En esta fase se basa en las respuestas a tres preguntas: ¿Qué es lo que sé? ¿Qué es lo que quiero? ¿Qué es lo que puedo utilizar?

2. El ataque. En esta fase el estudiante siente que se ha apropiado el problema, los estados de ánimo que se asocian se describen en ¡Atascado! y ¡Ajá!, y el proceso que debe tener lugar es el de hacer conjeturas y justificarlas convincentemente.
3. La revisión. Es el momento de mirar hacia atrás, revisar el trabajo hecho, para mejorar y ampliar su capacidad de razonamiento; así como, para lograr de cierta forma situar la resolución en un contexto más amplio. Esta fase se caracteriza en tres momentos: I) Comprobar la solución. II) Reflexionar en las ideas y momentos claves. III) Generalizar a un contexto más amplio.

De lo anterior se propone una integración de una relación de las dimensiones: la psicológica y la didáctica como soporte teórico de esta investigación en el siguiente diagrama de flujos:

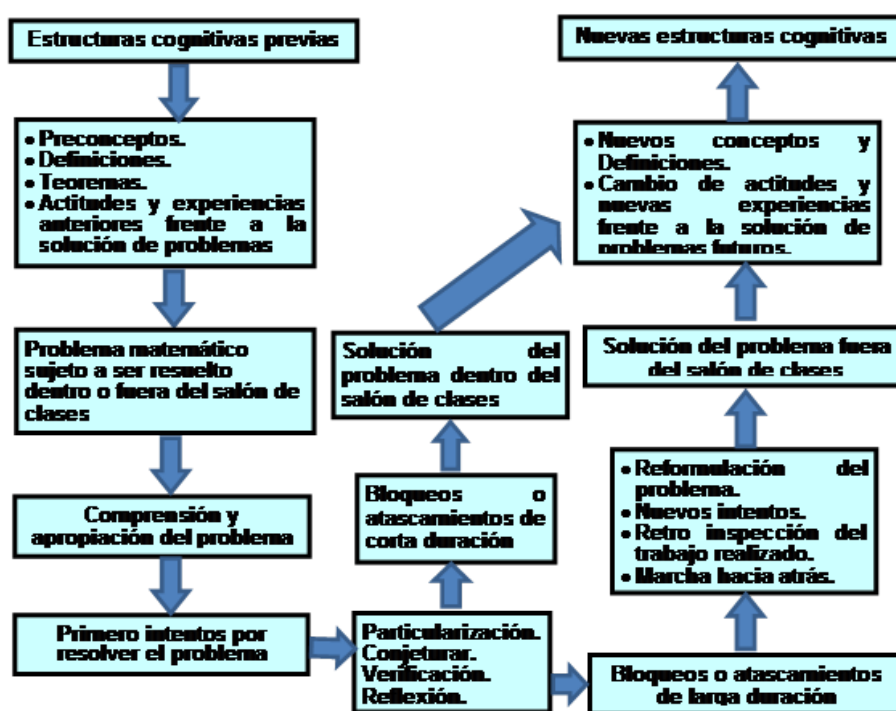


FIGURA 1.
Diagrama teórico de la investigación (Cañón, C. 2017).
Cañón, C. 2017

MATERIALES Y METODOS

Dada la naturaleza del fenómeno cognitivo que se pretende estudiar, es necesaria una metodología de investigación cualitativa que, según Fraenkel, J., Wallen, N. (1996), deba tener las características básicas siguientes:

1. El ambiente natural y el contexto en que se da el problema, es la fuente directa y primaria y la labor del investigador son los instrumentos claves en la investigación.
2. La recolección de los datos es más verbal que cuantitativa.
3. Los investigadores enfatizan tanto en los procesos como en los resultados.
4. El análisis de los datos es de modo inductivo.
5. Interesa saber cómo piensan los sujetos en una investigación y qué significado poseen sus perspectivas en el asunto que se investiga.

El estudio se implementó en un curso de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño correspondientes a dos semestres el 2°-2015 y el 1°-2016. Se hizo un seguimiento sistemático a cinco estudiantes, dos (E1 y E2) y tres (E3, E4 y E5) respectivamente. En ambos semestres se relató, entrevistó, grabó y filmó las sesiones de clase para su posterior análisis.

La sistematicidad de estas acciones facilitó una descripción de los hábitos, actitudes, habilidades y capacidades en la solución de los problemas matemáticos diseñados. En particular, se hizo una observación de cada uno de los estudiantes, para poder captar las posibles ocurrencias y singularidades que posibilitaran una caracterización de los diferentes tipos de *insight* que pudieran presentarse y su relación con ambos tipos de pensamiento.

Para cada clase, se propusieron actividades con dos problemas relacionados con las temáticas de geometría, álgebra, desigualdades y cálculo. Cada estudiante trabajó en forma individual, se dieron algunas generalidades al inicio de cada uno de estos temas. De todo lo anterior resultó el diseño de una metodología para este estudio, la que constó de cinco fases:

Primera fase. Diseño del curso electivo

Segunda fase. Selección, construcción de problemas matemáticos potencialmente propiciadores de algún tipo de insight en relación con: álgebra, geometría, desigualdades, cálculo.

Tercera fase.

- Primera etapa: experiencia de aplicación en el segundo semestre de 2015.
- Segunda etapa: experiencia de aplicación en el primer semestre de 2016.

Cuarta fase. Análisis y discusión de los resultados de la primera y segunda experiencia, a partir de los registros de clase, grabaciones y entrevistas.

Quinta fase. Caracterización de tipos de insight en relación con el pensamiento convergente y divergente.

RESULTADOS

A partir de la observación del comportamiento de los estudiantes, el análisis de cada una de las clases y el seguimiento que se le dio a cada uno de los que experimentaron este fenómeno cognitivo, se apreciaron ciertas regularidades en las soluciones dadas. Se muestran dos problemas con soluciones asociadas y representativas de dos de los tres insight caracterizados. Para ello, se presentan dos problemas y las soluciones asociadas. Un primer problema permite caracterizar esta experiencia como un *insight inmediato*.

Problema 1: Para medir la altura de las nubes en un campo, un trabajador enciende un reflector hacia arriba, a un ángulo α por encima de la horizontal. Un observador a una distancia d mide el ángulo de elevación del reflector y ve que es β . Determine una ecuación que permita calcular la altura h de las nubes.

El estudiante E2 resuelve el problema. Una rápida interpretación del mismo fue determinante para su solución. El planteamiento del problema no ofreció ilustración gráfica alguna. E2 en sus primeros intentos logra mostrar adecuadamente la solución, en la que logra aplicar correctamente las propiedades trigonométricas.

Sin embargo, los problemas cuyas soluciones fueron obtenidas posteriormente fuera del salón de clases requirieron una apropiación e interés del estudiante por resolverlos. Precisamente, este hecho fue lo que posibilitó poder describir lo que se denominó un *insight a posteriori*; tal es el caso que proporciona el problema siguiente:

Problema 2: Si hay exactamente 4 enteros x , que satisfacen la desigualdad $x^2 + bx + 7 \leq 0$; ¿Cuántos valores enteros de b son posibles?

A partir de la solución de la ecuación cuadrática, el estudiante se percató del intervalo donde están todas las soluciones de la desigualdad en términos de la variable desconocida b , al calcular la longitud del intervalo

encuentra la expresión $d = \sqrt{b^2 - 28}$ con la cual pudo inferir y demostrar que $b^2 \in (28, 53)$, de esta forma los únicos enteros que satisfacían esa condición son -7, -6, 6 y 7.

Este problema es resuelto posterior a la propuesta en el salón de clases por el estudiante E2, que le requirió varias horas de trabajo, pero correctamente resuelto.

En resumen, dentro del proceso de solución de problemas dentro y fuera del salón de clases, y la observación a los estudiantes, se pueden identificar, caracterizar y asociar estos tres tipos de *insight* y su relación con los pensamientos matemático convergente o divergente, que cuando suceden permiten solucionar un problema matemático de forma exitosa. Para cada uno de ellos se identificaron con características propias.

Se presentan la tabla 1 resumen las dos experiencias de las actividades con los diferentes problemas que permitieron dar la caracterización de los *insight* las que

TABLA 1.
Problemas cuyas soluciones se relacionaron con el insight inmediato y a posteriori.

Para a el insight inmediato														
Actividades II-2015														
Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P1	E1	E1		E2	E1	E1	E2		E2	-	-		E2	
P2	-	-	-	-	-	E2		E1 ,E2	E1	-	-	-	-	
Actividades I-2016														
Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P1	-	E3	-	-	E5	E3	E5	E3	-	-	-	-	E3,E5	
P2	E3,E4	E4	E3,E4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Para a el insight a posteriori														
Actividades II-2015														
Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P1	-	-	-	-	-	E1	-	-	E2	-	-	-	-	-
P2	-	-	-	-	-	-	E2	-	-	-	-	-	-	-
Actividades I-2016														
Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
P2	E3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

elaboración propia

Una aproximación descriptiva del insight inmediato

En sus primeros intentos madura algunas ideas que le permiten lograr la solución del problema matemático en el salón de clases. Los atascamientos o bloqueos que presenta el estudiante son de corta duración:

1. Por lo general comprende y se apropia del problema, en estos intentos por llegar a una solución, con instancias que permiten apreciar regularidades, invariantes que puedan conducir a una solución.
2. El estudiante evoca experiencias similares con otros problemas que le permiten relacionarlos con el problema actual.
3. Un factor indispensable en la solución de la mayoría de los problemas son los preconceptos que tiene el estudiante con las diferentes temáticas abordadas, además de la identificación de lo que se quiere determinar con el problema.
4. Este *insight* está en relación al tipo de pensamiento convergente en el estudiante ya que éste llega a la solución del problema de forma casi inmediata, sus soluciones son convencionales y no requieren grandes esfuerzos en su construcción.

Es de resaltar que, en algunos de los problemas, el estudiante evoca experiencias similares con otros problemas que le permiten relacionarlos con el problema actual.

Hay un esfuerzo considerable de presentar sus soluciones de una manera clara y convincente.

Una aproximación descriptiva del insight a posteriori

El estudiante en sus primeros intentos por resolver el problema no tiene avance alguno, los momentos de atascamiento o bloqueo son prolongados y en la mayoría de los casos pueden tomar bastante tiempo. Por lo general el estudiante se siente motivado a buscarle solución, además de asumir el problema con seriedad; se maduran nuevas ideas que pueden tardar un buen tiempo en desarrollarse. Precisamente, esto es lo que se le ha denominado *incubación*. A veces, emerge una solución cuando menos la espera. Pero es frecuente que la obtengan al hacer una retro inspección de su trabajo, que les permitió comprender mejor la situación.

Un factor identificado en los estudiantes son las diferentes percepciones del problema mismo, que de alguna manera les permite madurar nuevas ideas, que se encadenan repentinamente; en fin, para llegar a una solución del mismo.

Se manifiesta una sensación de descanso, alegría, felicidad al romper la frustración que causaba el no poder darle solución al mismo.

Una aproximación descriptiva del insight por comprensión

Se identifica cuando el estudiante encuentra otra solución posteriormente al problema; el estudiante genera ideas que le permiten encontrar una nueva vía de solución que puede ser más novedosa que la primera, lo cual puede darse dentro o fuera de salón de clases. Por lo general presenta las siguientes características:

1. Los bloqueos o atascamientos pueden ser de corta o larga duración.
2. Las soluciones presentadas por los estudiantes son distintas a las esperadas.
3. Hay un buen entendimiento y apropiación del problema.
4. Hay novedad en la segunda solución.

Relación de los tipos de insight y los pensamientos convergente y divergente

De los resultados correspondientes en ambas experiencias, se puede apreciar que los tres tipos de *insight* identificados están relacionados con los pensamientos convergente y divergente de la siguiente forma:

El pensamiento convergente es un proceso mental fundamentado en la búsqueda de una solución convencional o determinada de un problema que no requiere un gran esfuerzo, solución que se puede alcanzar con la información disponible que descansa en espacios mentales previos, constituido por conceptos, definiciones, resultados, y experiencias anteriores. Es por ello, que el *insight inmediato* se relaciona con este pensamiento. Se puede resumir que:

- Por lo general ocurre dentro del salón de clases.
- Hay un buen entendimiento y comprensión del problema.

Es de resaltar que en la gran mayoría de los problemas resueltos dentro del salón de clases los bloqueos son de corta duración y en los primeros intentos por resolverlos emergen y se desarrollan las ideas que se constituyen en la solución de los mismos. Sin embargo, se conocen situaciones de estudiantes que han experimentado este tipo de insight, con una solución muy novedosa y una explicación fuera de lo común que, muy bien puede asociarse a un pensamiento divergente.

El *insight a posteriori* y el *insight por comprensión* se relacionan con el pensamiento divergente de la siguiente forma:

El pensamiento divergente es un proceso mental que no necesariamente debe estar ligado a múltiples vías de solución de un problema; las soluciones requieren de un gran esfuerzo y tiempo en desarrollarse, además debe incluir perspicacia, fluidez, y novedad por parte del estudiante.

Se puede resumir que:

- Los bloqueos o atascamientos son de larga duración.
- Hay un buen entendimiento y comprensión del problema.

- El estudiante requiere hacer cortas pausas para reanudar el problema.
- El estudiante intenta verificar sus conjeturas de una forma rigurosa.
- El problema es asumido con compromiso y seriedad.
- Las soluciones de los problemas son presentadas de una forma clara, fluida, en algunas ocasiones hay novedad.

El bloqueo del problema es superado por el estudiante cuando hace una retro inspección de su trabajo y hace una marcha hacia atrás, dando paso a nuevas ideas que, al desarrollarlas, permiten alcanzar la solución del problema.

Los diferentes insight en el proceso de la resolución de problemas.

Basados en las contribuciones de Fauconnier y Turner (1998, 2002), así como, las de Polya (1954, 1965), Mason, Burton y Stacey (1988) en relación con la resolución de problemas y el lugar que ocupa una posible ocurrencia del *insight*, Se integran en el siguiente Figura los tres tipos de *insight* que se acaban de caracterizar:

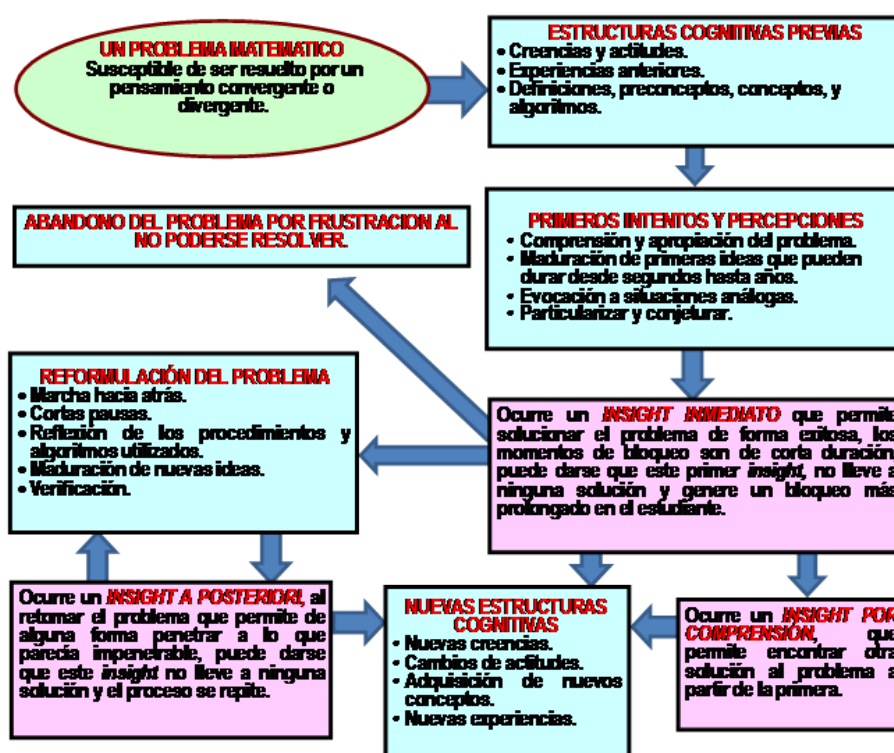


FIGURA 2.

Los insight en el proceso de resolución de problemas (Cañón, C. 2017).

elaboración propia

CONCLUSIONES

La investigación, en este estudio de casos, se hizo con un seguimiento continuo a cinco estudiantes, lo que permitió captar las ocurrencias de tres tipos de *insight* en el proceso de resolución de problemas dentro y fuera del salón de clases.

Los Figuras de resolución de problemas propuestos en el marco teórico y la metodología de investigación se consideran acertados, ya que propiciaron a los estudiantes nuevos horizontes para la resolución de problemas futuros; además, de incentivar el desarrollo del pensamiento matemático en su ejercicio profesional.

En cuanto a la hipótesis de la investigación planteada se puede asegurar que significó una buena ruta de trabajo en todo el desarrollo de la investigación.

Al relacionar las dimensiones didácticas y psicológicas; así como, los resultados obtenidos, se pudo derivar la figura de resolución de problemas donde se puede apreciar la ocurrencia de los tres tipos de insight de forma integrada.

Se considera que estos tres tipos de *insight* deben agruparse en una categoría que denominaremos *insight* escolares, ya que los descritos en este trabajo se corresponden, por su trascendencia, con otro nivel y deben ser considerados en otra categoría que denominaremos *insight* científicos, pues se corresponden con reflexiones de dos grandes matemáticos. Sin embargo, este fenómeno cognitivo, desde el punto de vista psicológico, es el mismo; además, es muy seguro que los *insight* escolares preceden a los científicos; ya que no se debe descartar que Gauss y Hamilton, así como otros matemáticos lo hayan experimentado en el proceso de desarrollo de la construcción de sus conocimientos, en sus etapas escolares. Son muchos los ejemplos al respecto. Se considera que la mayoría de los matemáticos, que han contribuido con teorías que han trascendido, también los han experimentado; así como, aquellas personas que se han destacado en competencias matemáticas y los poseedores de un gran talento.

Por otra parte, se pudo observar que, el éxito o no de la solución de problemas matemáticos presentados en el salón de clases, depende en gran medida del nivel de conocimiento y desarrollo del pensamiento que tenga cada estudiante; ya que, para algún estudiante el problema le puede generar un insight inmediato, para otro un insight a posteriori y para otros ninguno. Se considera que el objetivo de este estudio fue cumplido, al poder describir en este trabajo caracterizaciones de los tres tipos de insight, que fueron denominados: *inmediato*, *por comprensión* y *a posteriori*.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barnes, M. (2000). Magical moments in mathematics: Insights into the process of coming to know. *For the Learning of Mathematics*, 20 (1), 33-43.
- Cañón, C. (2017). Una caracterización de los tipos de insight en la solución de problemas matemáticos planteados en el salón de clases. (Tesis doctoral). Universidad Antonio Nariño, Colombia.
- Cruz, M. (2006). La enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas. La Habana: Educación Cubana.
- Fauconnier, G., Turner, M. (1998). Conceptual Integration Networks. *Cognitive Science*, 22 (2), 133-187.
- Fauconnier, G., Turner, M. (2002). *The way we think: conceptual blending and the mind's hidden complexity*. New York: Basic Books.
- Fraenkel, J., Wallen, N. (1996). *How to design and evaluate research in education* (3a ed.). New York: McGraw-Hill.
- García, M. (2014). A metacognitive reflection of the thinking types through mathematical research. *Convergence vs Divergence: International Congress of Mathematicians ICM 2014*, Seoul, Korea.
- Guilford, J. P. (1950). Creativity. *The American Psychologist*, 5, 444-454. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.1037/h0063487>
- Guzmán, M. de (2003). Los goces estéticos del quehacer matemático. *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat. (Esp)*. 97 (2), 351-357, 2003. Recuperado de <http://www.rac.es/ficheros/doc/00439.pdf>
- Hadamard (1954). *The psychology of invention in the mathematical field*. Estados Unidos: Dover Publications.
- Mason, J., Burton, L. Y K. Stacey (1988). *Pensar Matemáticamente*. Barcelona: MEC-Labor.
- Oh, N. K, Jung S. P., Y Jee H. P. (2006). Cultivating Divergent Thinking in Mathematics through an Open-Ended Approach. *Asia Pacific Education Review*, 7(1), 51-61.
- Poincaré, H. (1914). *Science and method*. New York: Tomas Nelson and sons.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning. Induction and analogy in mathematics*. Vol. I Princeton: Princeton University Press.
- Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. México D.C: Editorial Trillas

