Revista Virtual Universidad Católica del Norte
ISSN: 0124-5821
editorialucn@ucn.edu.co
Fundación Universitaria Católica del Norte
Colombia

Ríos-Cuesta, Wilmer

Aplicación de las representaciones gráficas y la visualización a la resolución de problemas con fracciones: una transición hacia el algoritmo

Revista Virtual Universidad Católica del Norte, núm. 63, 2021, Mayo-, pp. 196-222
Fundación Universitaria Católica del Norte
Colombia

DOI: https://doi.org/10.35575/rvucn.n63a8

Aplicación de las representaciones| Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 63, 196-222
ISSN: 0124-5821 (En línea)

¿Cómo citar el artículo?

Ríos-Cuesta, W. (mayo-agosto, 2021). Aplicación de las representaciones gráficas y la visualización a la resolución de problemas con fracciones: una transición hacia el algoritmo. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (63), 196-222. https://www.doi.org/10.35575/rvucn.n63a8

Aplicación de las representaciones gráficas y la visualización a la resolución de problemas con fracciones: una transición hacia el algoritmo

Application of graphical representations and visualization to the problems solving with fractions: a transition to the algorithm

Wilmer Ríos-Cuesta
Magister en Educación
Institución Educativa Corazón de María
El Carmen de Atrato, Colombia
wrioscuesta@hotmail.com
Orcid: https://orcid.org/0000-0001-8129-2137
CvLAC:
http://scienti.colciencias.gov.co:8081/cvlac/visualizador/generarCurriculoCv.do?cod_rh=0000067725

Recibido: 27 de mayo de 2020
Evaluado: 23 de septiembre de 2020
Aprobado: 19 de febrero de 2021

Tipo de artículo: Investigación Científica y Tecnológica

Resumen

Se presenta una investigación de tipo cualitativo-descriptivo, donde se buscó dar sentido a las fracciones mediante el uso de representaciones gráficas; esta apuesta busca que los estudiantes comprendan el contexto del problema planteado y, a su vez, resignifiquen la noción de fracción y su concepción como operador. Se realizó el análisis y seguimiento de tres sesiones de clase y de las hojas de trabajo de un grupo de estudiantes de 12 años, que cursan séptimo grado en una institución educativa en el departamento del Chocó (Colombia), mediante un estudio de casos instrumental. Se promueve hacer la transición desde la representación gráfica hasta la construcción de los algoritmos para resolver problemas de aplicación. En dicho proceso, los estudiantes trabajaron en la comprensión de la tarea; sin embargo, algunos se resisten al cambio conceptual privilegiando el uso de algoritmos, sin comprender las implicaciones que tendrían si se requiere aplicar el resultado a una situación real. Los estudiantes se mueven entre el algoritmo y la representación, de acuerdo con lo que consideran óptimo para resolver la tarea. Se destaca el apoyo que ofrece la visualización del problema, en tanto fortalece su comprensión y facilita su abordaje con más herramientas conceptuales.

Palabras clave: Algoritmos; Fracciones; Formación de conceptos; Métodos de enseñanza; Problemas verbales; Resolución de problemas.

Abstract

A qualitative-descriptive research is presented, which sought to give meaning to fractions through the use of graphic representations; this bet seeks that students understand the context of the problem posed and, in turn, resignify the notion of fraction and its conception as an operator. The analysis and follow-up of three class sessions and the worksheets of 12-year-old students in seventh grade at an educational institution in the department of Chocó (Colombia), was carried out by means of an instrumental case study. The transition from graphic representation to the construction of algorithms to solve application problems is promoted. In this process, students worked on understanding of the task; however, some resist the conceptual change privileging the use of algorithms, without understanding the implications that they would have if the result isresult required to be applied to a real situation. Students move between the algorithm and the representation, according to what they consider optimal to solve the task. The support offered by the visualization of the problem is highlighted, as it strengthens their understanding and facilitates their approach with more conceptual tools.

Keywords: Algorithms; Fractions; Concept formation; Teaching methods; Word problems; Problem solving.

Aplicación de las representaciones| Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 63, 196-222
ISSN: 0124-5821 (En línea)

Introducción

El currículo colombiano para la educación matemática ha sido creado con base en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (LCM), Estándares Básicos de Competencias (EBC), Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) y las Mallas de Aprendizaje (MA), los cuales son documentos orientadores emitidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN). Sin embargo, las instituciones educativas gozan de la autonomía necesaria para adecuar sus planes de estudio (Congreso de la República de Colombia, 1994), a través del Proyecto Educativo Institucional (PEI) de las instituciones educativas del país. Esto ofrece elementos a los maestros para diseñar la ruta metodológica más adecuada para que sus estudiantes alcancen las competencias enunciadas en los EBC. Además, constituye un avance en materia educativa desde la época de 1931, donde el Estado definía un currículo general y diferenciado para hombres y mujeres (A. Martínez, 2004; Presidencia de la República de Colombia, 1962). Por otro lado, permite una enseñanza situada en el contexto de los estudiantes y enfocada al desarrollo de competencias.

Una de las debilidades de los currículos colombianos, en particular en el departamento del Chocó, es la concepción de competencia como un *saber hacer* que fomenta el aprendizaje de algoritmos en situaciones de bajo grado de complejidad, lo cual favorece un aprendizaje memorístico, donde el estudiante no siempre comprende ni le son significativos los conceptos expuestos en la clase. Tardif (2006) concibe la competencia como "un *saber actuar* complejo que se apoya en la movilización y combinación eficaz de recursos de tipo interno y externo al interior de una familia de situaciones" (p. 22). Se parte de esta perspectiva, dado que se liga a un aprendizaje de tipo holístico, donde se valora la acción eficaz y movilización selectiva de recursos frente a una situación donde se requieren dichos conocimientos; además, ofrece la posibilidad de incidir en los procesos cognitivos de los estudiantes.

Esta visión de competencia permite analizar la forma de trabajo de los estudiantes, cuando usan sus conocimientos para resolver una tarea y superar parte de la dificultad que hay en el aprendizaje de las fracciones.

De acuerdo con los EBC, los estudiantes de quinto grado deben interpretar las fracciones en diferentes contextos, como medición, parte todo, cociente, razones y proporciones; y al finalizar séptimo grado, deben ser capaces de resolver problemas en contextos de medida, donde se requiera

Aplicación de las representaciones| Revista Virtual
Universidad Católica del Norte, 63, 196-222
ISSN: 0124-5821 (En línea)

el uso de números racionales (MEN, 2006). Por otro lado, en los DBA para grado séptimo se señala que los estudiantes deben utilizar diferentes algoritmos para resolver problemas (MEN, 2016).

El presente estudio tiene como objetivo resignificar la fracción como operador, en estudiantes de séptimo grado, partiendo del hecho de que en los EBC y DBA se propone alcanzar un nivel de comprensión, una vez el estudiante haya terminado dicho grado. Entonces, se espera dotar de sentido las operaciones que realizan, mediante la interpretación gráfica de las acciones que llevan a cabo al momento de resolver el problema y, a su vez, mejorar la comprensión de estas, llevándolos a la comprensión del algoritmo, fomentando un uso eficaz en la resolución de problemas.

Algunos autores como Buforn et al. (2018), Fernández y Llinares (2010), y Perera y Valdemoros (2009), entre otros, señalan que el aprendizaje de las fracciones es un contenido difícil de aprender por los alumnos. Por otro lado, la multiplicidad de significados de la fracción le da mucha riqueza al concepto y, por tanto, debe abordarse de manera diferenciada. Entre los distintos significados de la fracción, Kieren (1980) distingue cinco tipos: razón, operador, cociente, parte-todo y medida.

Acercamiento al problema

En distintos niveles educativos, desde primaria hasta terciaria, los estudiantes presentan dificultades para usar de manera satisfactoria el concepto de fracción. En particular, se sitúa la mirada en el uso como operador. Parte de esta problemática se explica por el carácter algorítmico con el que los estudiantes aprenden algunos procedimientos, sin una comprensión de su uso (Bezerra et al., 2002; Butto, 2013; Streefland, 1993a; Tsai & Li, 2016).

En este orden de ideas, se realizó una indagación sobre los procesos de aprendizaje de las fracciones en escolares de 12 años, en una institución educativa en el departamento del Chocó en Colombia, encontrando que hay dificultades en la construcción de significados respecto a la fracción. Al revisar los documentos que emite el MEN, particularmente los referentes curriculares, y de manera específica los DBA, se encontró que los estudiantes de cuarto grado deben lograr interpretar “las fracciones como razón, relación, parte todo, cociente y operador en diferentes contextos” (MEN, 2016, p. 30). En quinto grado, se espera que interprete y utilice “los números naturales y racionales en su representación fraccionaria para formular y resolver problemas

ISSN: 0124-5821 (En línea)

aditivos, multiplicativos y que involucren operaciones de potenciación" (MEN, 2016, p. 37). Para el mismo grado, se espera que los estudiantes comparen y ordenen "números fraccionarios a través de diversas interpretaciones, recursos y representaciones" (MEN, 2016, p. 38).

Al finalizar el sexto grado, los estudiantes deben poseer un dominio de las operaciones con números racionales en representación de fraccionarios y decimal, en diferentes contextos, y usarlos para resolver problemas de variación, repartos, particiones y estimaciones (MEN, 2016). De igual modo, debe dominar las propiedades de los números racionales y usarlas para proponer estrategias para la solución de problemas. En este grado, los estudiantes deben ubicar números en la recta numérica y hacer comparaciones entre cantidades.

Finalmente, en séptimo grado, se espera que comprendan y resuelvan "problemas, que involucran los números racionales con las operaciones (suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación) en contextos escolares y extraescolares" (MEN, 2016, p. 53). Por otro lado, deben describir y utilizar "diferentes algoritmos, convencionales y no convencionales, al realizar operaciones entre números racionales en sus diferentes representaciones (fracciones y decimales) y los emplea con sentido en la solución de problemas" (MEN, 2016, p. 53).

Para mejorar la enseñanza de las fracciones, Díaz-Pinzón (2017) propone el uso de simuladores PhET, como estrategia para vincular las representaciones gráficas y numéricas, profundizando en el estudio de las fracciones equivalentes. En dicho documento, compara estadísticamente el rendimiento de dos grupos de estudiantes mediante la prueba *Anderson-Darling* y la prueba *t student*, donde encontró mejoras significativas en el aprendizaje de las fracciones equivalentes. Sin embargo, se considera que este tipo de propuestas suelen presentarse sin un contexto cercano a los estudiantes y poca relación con situaciones cotidianas. Sobre esto, M. Martínez et al. (2019), Stelzer et al. (2019) y Villa-Ochoa y Ruiz-Vahos (2009) advierten que las situaciones que se proponen a los estudiantes para que resuelvan en clase deben estar relacionadas con sus experiencias y el contexto.

En este estudio, se propone el uso de problemas verbales o *word problems* que le den un contexto a la situación planteada, y que requiera su interpretación. Sobre los tipos de situaciones problema, Vicente et al. (2018) distinguen, de acuerdo con el modo de resolución, dos tipos de *word problems*; en el primero, la situación se puede resolver mediante la aplicación directa de una operación con los datos que se presentan, y en la segunda se requiere comprender la situación y la

Aplicación de las representaciones| Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 63, 196-222
ISSN: 0124-5821 (En línea)

estructura matemática implícita en ella. Estos problemas se abordan desde la representación gráfica como mecanismo de resolución y de comprensión del problema.

Tal como lo señala Mendoza (2018), el registro gráfico es un recurso que se ha subvalorado frente al recurso numérico; los estudiantes suelen aplicar algoritmos, dándole mayor jerarquía a ciertos procesos y técnicas para resolver los problemas, en cambio, abordan situaciones en registros gráficos con pocos recursos conceptuales, lo cual es producto de una experiencia escasa con ellos. Además, Mendoza (2018) destaca que, aunque los estudiantes no comprendan ni dominen el algoritmo, le asignan un carácter de universalidad, dado que les sirve para resolver los problemas planteados en el aula.

De acuerdo con Adu-Gyamfi et al. (2019), los estudiantes no utilizan adecuadamente representaciones gráficas y muestran una capacidad limitada para integrar la información de un problema mediante dichas representaciones.

Por otro lado, Behr et al. (1983) señalan que el aprendizaje de la noción de racional es complejo. Además, es desafiante para los estudiantes, dado que requiere una comprensión del concepto para poder abordar y resolver adecuadamente un problema. Por ejemplo, Butto (2013) encontró que los estudiantes presentan dificultades al momento de usar las ideas matemáticas para fraccionar una cantidad; también, halló que el paso de los números enteros a los fraccionarios es un proceso lento y que el fraccionamiento de la unidad resulta confuso.

Kieren (1992) señala que la comprensión del concepto de fracción es substancialmente multifacético. Según Vergnaud (1990), la construcción de un concepto matemático requiere un conjunto de situaciones que den sentido y significado, así como el uso de distintas representaciones para favorecer su aprendizaje. En ese sentido, los estudiantes deben ser capaces de razonar matemáticamente, usando conceptos matemáticos para describir, explicar y predecir fenómenos, o usar los conocimientos que tienen para extrapolarlos a situaciones nuevas y desconocidas (OECD, 2016).

Aspectos teóricos

Para abordar el objetivo de la investigación se ha considerado la resignificación del concepto de fracción, predominante en los libros de texto, el cual explica, en parte, la problemática

Aplicación de las representaciones| Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 63, 196-222
ISSN: 0124-5821 (En línea)

abordada. Esta resignificación se corresponde con los usos que ponen en juego los estudiantes al momento de resolver la tarea, y al sentido que le dan a la misma.

Sobre el concepto de fracción

Una fracción es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y b es diferente de cero. Usualmente se presenta como $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tales que $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$. De igual modo, se concibe como el resultado de dividir la unidad en partes iguales; también, describe el cociente entre dos cantidades, donde la parte superior, llamada numerador, indica la cantidad de partes que se toman, y la parte inferior, llamada denominador, indica el número de partes en que se ha dividido la unidad.

Si bien los estudiantes reconocen la definición de manera mecánica, tienen dificultades para usar la definición al momento de resolver problemas verbales, donde las situaciones son del tipo: sacar los $\frac{4}{9}$ de 36.

Resignificación

El objetivo de este estudio fue resignificar el conocimiento que poseen los estudiantes sobre la fracción como operador, buscando movilizar esquemas mentales que los lleven a comprender mejor las operaciones que realizan, además enriquecer el uso de la fracción como operador al resolver problemas verbales.

Sobre el constructo resignificación, Cantoral (2013) afirma que la acción que realiza el sujeto sobre el objeto deriva en la construcción de significados, los cuales dependerán en gran medida del contexto sociocultural. Al poner en funcionamiento este significado frente a situaciones nuevas, este se enriquece adquiriendo nuevas argumentaciones, usos y procedimientos que ayudan a la formación de nuevas comprensiones sobre el objeto.

En otras palabras, resignificar es dotar de otro sentido o encontrar un nuevo significado, reinterpretar una situación o darle una nueva orientación que, en este caso, es la manera cómo los estudiantes aprenden y construyen el algoritmo para operar; esto tiene implicaciones en la enseñanza y aprendizaje del concepto de fracción.

Aplicación de las representaciones| Revista Virtual
Universidad Católica del Norte, 63, 196-222
ISSN: 0124-5821 (En línea)

Dicho esto, el conocimiento matemático se resignifica cuando pasa de ser utilitario a funcional; es decir, cuando el estudiante logra integrar el conocimiento a su vida. Dada una situación, puede generar nuevos usos del conocimiento, enriqueciendo las heurísticas del estudiante y al objeto matemático en cuestión.

La visualización

Una forma de favorecer el aprendizaje de las matemáticas es mediante el apoyo en la visualización de los conceptos que se ponen en juego al momento de resolver una tarea. Este hecho aparece no solo en la comunicación de las ideas, sino también en la construcción de estas. Para Arcavi (2003), la visualización es:

> La capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas. (p. 217)

Zimmermann & Cunningham (1991) señalan que la visualización se apoya en la producción o uso de representaciones gráficas de conceptos matemáticos, principios o problemas, ya sea dibujados a mano, o generados por computadora.

Por otro lado, Gutiérrez (1996) ofrece una caracterización de las visualizaciones, la cual integra cuatro elementos: 1) imágenes mentales, 2) representaciones externas, 3) procesos visuales y 4) habilidades de visualización.

Las imágenes mentales son representaciones que se hace el sujeto, teniendo en cuenta algunos elementos de la situación o problema. Las representaciones externas aluden a elementos físicos o verbales usados por el sujeto, tales como diagramas y dibujos que apoyan el paso de la imagen mental a la visualización. Los procesos de visualización ocurren cuando el sujeto realiza acciones mentales o físicas sobre el objeto, transformándolas en imágenes mentales para apoyar su razonamiento. Finalmente, las habilidades de visualización son aquellas disposiciones que desarrolla el sujeto para afrontar el proceso de visualización y que son producto de la experiencia (Gutiérrez, 1996; Ramírez y Flores, 2017).

Tal como lo menciona Duval (2006), en la actividad matemática los contextos de representación involucran algunos recursos cognitivos que se deben tener en cuenta al analizar las

Aplicación de las representaciones| Revista Virtual
Universidad Católica del Norte, 63, 196-222
ISSN: 0124-5821 (En línea)

producciones de los estudiantes. Dichas representaciones, aludiendo a los registros de representación, constituyen mediaciones semióticas dentro de un sistema semiótico más amplio; sin embargo, el estudiante elige uno, de acuerdo con el propósito de la actividad. Duval (2006) llamó a esto *coordinación interna*, la cual es construida mediante varios sistemas de representación que los estudiantes eligen libremente, y que permiten conectar ideas frente a un mismo objeto.

Diseño metodológico

La investigación tuvo un corte cualitativo-descriptivo mediante un estudio instrumental de casos (Stake, 2010), en el que se buscó, por un lado, comprender la situación en profundidad y, por el otro, documentar la resignificación de las operaciones con fraccionarios y promover un aprendizaje comprensivo del concepto de fracción, que lleve a los estudiantes a darle sentido al algoritmo. Los datos se recogieron mediante un cuestionario con cuatro problemas y la observación no participante del investigador.

Participantes

Para este estudio participaron seis estudiantes de séptimo grado, de 12 años (4 hombres y 2 mujeres), quienes de manera voluntaria accedieron a ser parte de la investigación, dado que se hizo en periodo extracurricular, después de la jornada habitual de clases, por medio de la asistencia a un semillero de matemáticas, del cual hacen parte desde el año 2018, y en el que refuerzan sus habilidades matemáticas durante una hora a la semana.

Para mantener la confidencialidad de sus identidades, se codificaron sus nombres como E#. La elección de este curso en particular obedece a que en este nivel de escolaridad los estudiantes colombianos deben haber adquirido las competencias que les permitan abordar con éxito los problemas que se les plantean en diferentes contextos.

Unidades de análisis

Se han definido dos unidades de análisis que se enmarcan en lo cognitivo de las acciones de los estudiantes al abordar la tarea.

Aplicación de las representaciones| Revista Virtual
Universidad Católica del Norte, 63, 196-222
ISSN: 0124-5821 (En línea)

La primera, apunta a los usos que los estudiantes dan a las representaciones gráficas para enfrentar la tarea. La segunda versa sobre las relaciones entre la gráfica y el algoritmo para resolver la cuestión. Esto último porque interesa trazar la ruta seguida para la configuración del algoritmo y analizar el sentido que le dan a las operaciones que realizan con las fracciones, en particular, la fracción como operador.

Análisis a priori del cuestionario

El cuestionario se diseñó con el objetivo de ubicar a los estudiantes ante situaciones de repartición, en las que deben usar operaciones con números naturales y racionales (suma, resta, multiplicación de un natural por un racional, división de números naturales). En la tabla 1 se presentan las preguntas del cuestionario.

Tabla 1

Preguntas del cuestionario aplicado

Pregunta	Planteamiento
1	Marcela ha comprado un terreno para construir una finca, y junto con el arquitecto toman la decisión de distribuir el área de la siguiente manera: un cuarto del terreno para construir la casa; de lo que queda, utilizar un medio para hacer potreros para las vacas; de lo que queda, destinar cuatro sextos para un estanque para tilapia; el resto para construir un galpón. Si la superficie para construir la finca es de 640 m^2 ¿cuál es el área de cada espacio?
2	En el almacén tenemos 1440 cajas para distribuir en cuatro almacenes de El Carmen de Atrato de la siguiente manera: dos novenos al almacén El Cóndor, un cuarto a El Rebajón, un medio a El Remate y lo que queda a Variedades Lucy. ¿Cuántas cajas se deben enviar a cada almacén?
3	Sofía tiene un salario de $7.000.000 mensuales, los cuales distribuye de la siguiente manera: ahorra un décimo; del restante, gasta un tercio en el pago de la cuota del apartamento, gasta un sexto del restante en la compra de comida, la mitad del resto para pagar la cuota del semestre, tres quintos del resto para el pago de los servicios (energía, agua, gas, internet, plan celular), y el resto es para los gastos varios como transporte y salidas de rumba. ¿Cuánto dinero destina para cada cosa?
4	Leyla necesita repartir un postre de limón que ha hecho; inicialmente lo parte en 8 porciones de las cuales separa 3 para Hipólito, posteriormente saca el equivalente a un tercio del pastel para dárselo a Ovidio. Finalmente, toma un octavo y le da de

Aplicación de las representaciones| Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 63, 196-222
ISSN: 0124-5821 (En línea)

comer al perro. Con respecto al total del postre: (a) ¿qué fracción le queda? (b) ¿qué fracción le dio a Hipólito? (c) ¿qué fracción le dio a Ovidio? y (d) ¿qué fracción le dio al perro?

Nota: Elaboración propia.

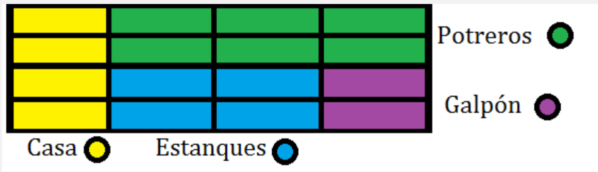
En la pregunta 1 se indaga sobre la ubicación de espacios en un lugar definido; si el resolutor opta por desarrollar algoritmos se enfrenta a varias operaciones con números racionales y naturales (suma, resta, multiplicación, división). Inicialmente debe traducir a términos matemáticos las fracciones que le son proporcionadas. Posteriormente, tomar un cuarto de 640 m^2 usando la fracción como operador, y del área total descontar lo usado para la casa. Nuevamente debe usar la fracción como operador y extraer un medio de 480 m^2. Este proceso es repetido hasta completar los ítems de la pregunta. Es natural que los estudiantes opten por resolver el problema de manera gráfica, dado que les cuesta un poco más la comprensión de la fracción como operador. Por otro lado, debe hacer restas de lo que le va quedando, repartido en cada sección de la finca.

La representación gráfica podría usarse mediante la realización de un rectángulo que haga las veces del terreno; se divide en cuatro partes iguales en una dirección (vertical u horizontal) y toma una. Seguido, hace una nueva partición en forma perpendicular, a la hecha inicialmente. Como le restan tres tercios del total, hace una nueva división de modo que construye seis sextos del total para tomar cuatro sextos. Lo restante es lo que corresponde al galpón. Para calcular la medida de la superficie de cada espacio de la finca debe realizar una división de 640 m^2 entre 16 (subdivisiones que se logran al fraccionar la unidad). El valor obtenido es la medida de la superficie de cada $\frac{1}{16}$; usando multiplicaciones de acuerdo con la cantidad de partes que tenga cada espacio de la finca, puede calcular sus medidas. En la figura 1 se presenta un modelo de la solución esperada.

Aplicación de las representaciones| Revista Virtual
Universidad Católica del Norte, 63, 196-222
ISSN: 0124-5821 (En línea)

Figura 1

Resolución gráfica de la tarea 1



Nota: Elaboración propia.

La pregunta 2 sirve de pretexto para que los estudiantes hagan la transición de la representación gráfica al uso del algoritmo con una mayor conciencia de lo que hacen, y que usen la fracción como operador. Se espera que los estudiantes multipliquen la fracción por el número natural. Por otro lado, deben realizar la suma de la cantidad de cajas repartidas, para calcular las restantes.

La pregunta 3, por su parte, eleva el nivel de abstracción, en el sentido de que les solicita hacer operaciones de manera recurrente, usando la fracción como operador y, a su vez, efectuando sumas y restas de fracciones. Resolver la pregunta de manera gráfica, exige que los estudiantes tengan claro la división en partes iguales de la unidad, y comprendan ampliamente el concepto de fracción. De igual modo, deben transformar el problema en fracciones equivalentes para contar las particiones que se hacen del dinero.

La pregunta 4 es lo que se considera un paso final para la estructuración del algoritmo; el estudiante puede presentar una respuesta gráfica del proceso. Sin embargo, el tener que ofrecer una respuesta en forma de fracciones, les invita a usar fracciones equivalentes. A su vez, pueden articular la respuesta gráfica con la algorítmica.

Resultados

Se presentan los resultados de las respuestas al cuestionario, por cada una de las tareas propuestas.

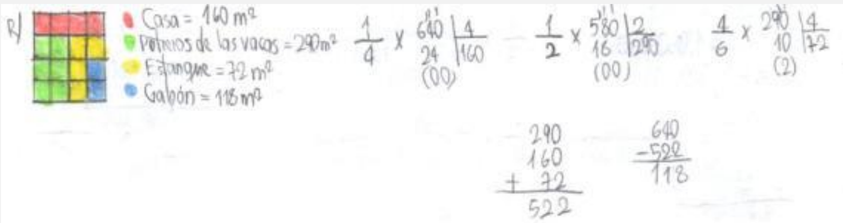
Aplicación de las representaciones| Revista Virtual
Universidad Católica del Norte, 63, 196-222
ISSN: 0124-5821 (En línea)

Tarea 1

En la figura 2 se observa el procedimiento realizado por el E1. En ella, el estudiante muestra una solución gráfica en la que reparte el terreno de manera adecuada. Al momento de hacer la transición de la representación gráfica al algoritmo desarrolla la idea usando la fracción como operador y teniendo en cuenta que debe ir descontando lo repartido en las secciones del terreno. Sin embargo, en la segunda operación (que no es mostrada), la resta de 640 con 160 le da 580, y continúa con dicho error, el cual altera sus resultados.

Figura 2

Respuesta de E1



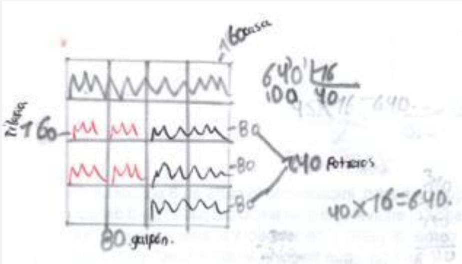
Nota: Trabajo del estudiante.

En el caso de E2, este presenta una solución gráfica en la que subdivide la superficie del terreno; seguido, realiza la división de la superficie total entre la cantidad de partes en que se dividió. Además, revisa sus cálculos al multiplicar 40 y 16. Aunque la evidencia no muestra qué operación utilizó para calcular cada sector del terreno (ver figura 3).

Aplicación de las representaciones| Revista Virtual
Universidad Católica del Norte, 63, 196-222
ISSN: 0124-5821 (En línea)

Figura 3

Respuesta de E2

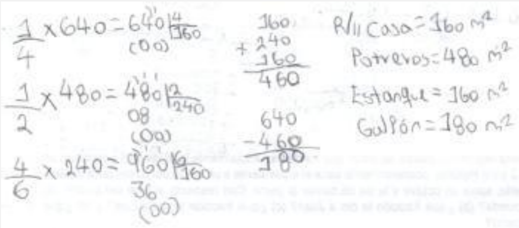


Nota: Trabajo del estudiante.

Por su parte, E3 realiza una serie de operaciones, las cuales muestran el uso de un algoritmo para operar fracciones; en la secuencia se identifica que el error está en olvidar sumar una centena al momento de realizar la verificación del terreno repartido hasta el momento en la distribución del espacio (ver figura 4).

Figura 4

Respuesta de E3



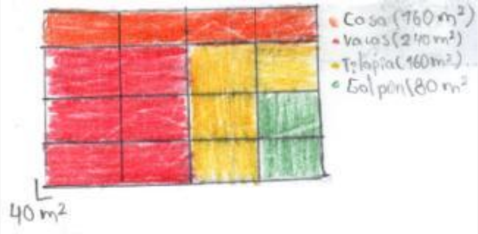
Nota: Trabajo del estudiante.

El E4 presenta una solución gráfica (ver figura 5), en la que no hay evidencia de cómo realiza los cálculos. Puede verse que la solución presentada carece de errores, de modo que el uso del algoritmo lo hace más propenso al error cuando no se ha interiorizado o desarrollado una construcción cognitiva del mismo.

Aplicación de las representaciones| Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 63, 196-222
ISSN: 0124-5821 (En línea)

Figura 5

Respuesta de E4

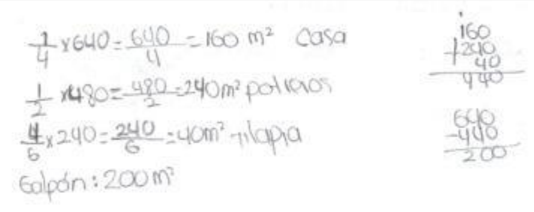


Nota: Trabajo del estudiante.

En la figura 6 se observa, en el trabajo realizado por E5, el uso del algoritmo para solucionar la tarea propuesta. Se observa que no hay una interiorización del algoritmo, y utiliza la fracción como operador; sin embargo, en el tercer paso olvida multiplicar el numerador por el número natural, y no lo detecta a pesar de que realiza sumas y restas para calcular los que ha repartido y lo que le falta por repartir. Dicho error es consecuencia del uso de fracciones en las que el numerador es la unidad; el estudiante intuitivamente escribe el número natural y luego divide.

Figura 6

Proceso seguido por E5



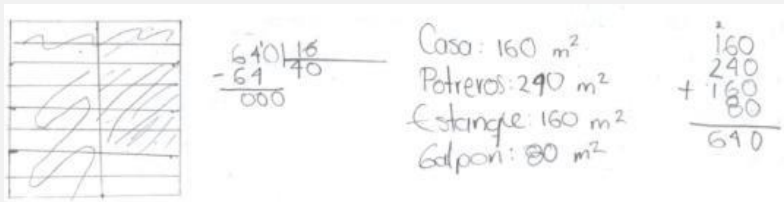
Nota: Trabajo del estudiante.

Finalmente, E6 ofrece una solución gráfica, por la cual hace una división de la superficie en partes iguales, en las que distribuye la cantidad de rectángulos que ocupa cada sección de la finca (figura 7). Si bien no muestra cómo hizo los cálculos, resuelve satisfactoriamente la tarea. De igual modo, se observa como verifica, mediante una suma, que la superficie repartida corresponde al total.

ISSN: 0124-5821 (En línea)

Figura 7

Respuesta de E6



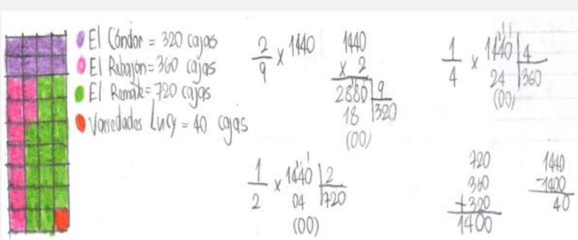
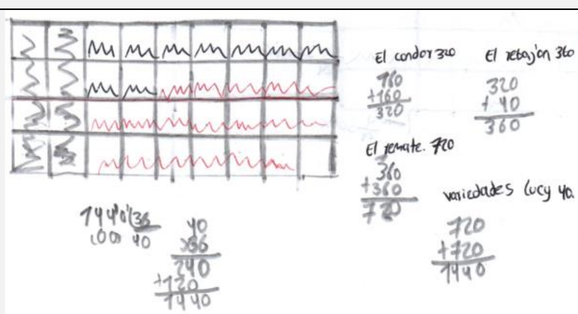
Nota: Trabajo del estudiante.

Tarea 2

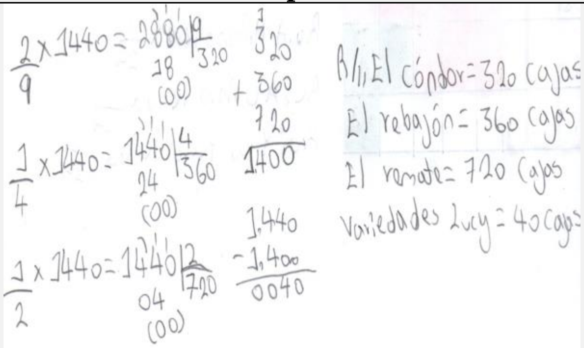
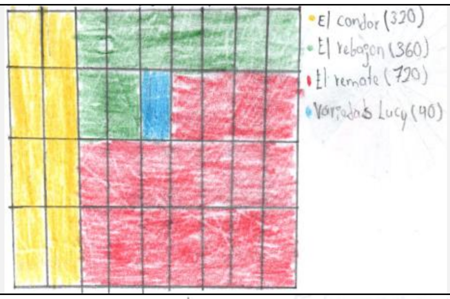
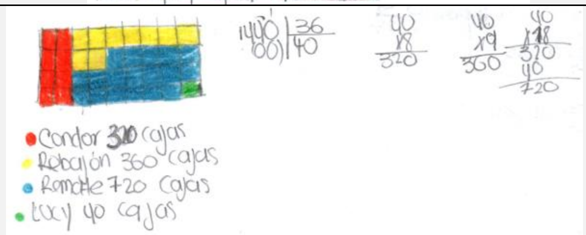
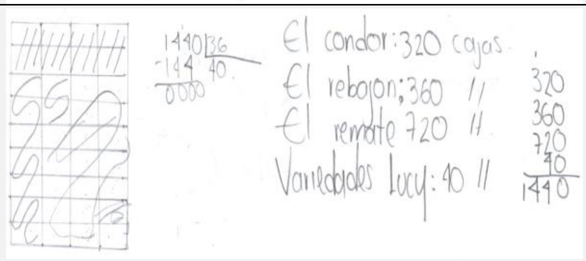
Los estudiantes ofrecieron dos tipos de soluciones con predominio de la solución gráfica; en la tabla 2 se presentan las respuestas.

Tabla 2

Respuestas a la tarea 2

Estudiante	Respuesta	Observaciones
E1		Acompaña la solución gráfica con un algoritmo en el que usa la fracción como operador. Puede verse la articulación de las dos respuestas, logrando responder acertadamente la tarea.
E2		La solución presentada hace uso de la representación gráfica. El estudiante divide la cantidad de cajas entre los cuadrados resultantes.

ISSN: 0124-5821 (En línea)

Estudiante	Respuesta	Observaciones
E3		Uso del algoritmo de la fracción como operador. Predominio del pensamiento abstracto.
E4		Ofrece una respuesta gráfica y, al igual que en la tarea 1, no hay evidencia de los cálculos que realiza para la resolución del problema.
E5		Ofrece una respuesta similar a la de E4. Sin embargo, exhibe los cálculos usados para resolver la tarea.
E6		La respuesta ofrecida muestra la comprensión del significado de la fracción y su representación gráfica. Se distancia del uso del algoritmo. Sin embargo, logra resolver satisfactoriamente la tarea.

Nota: Elaboración propia a partir de las producciones de los estudiantes.

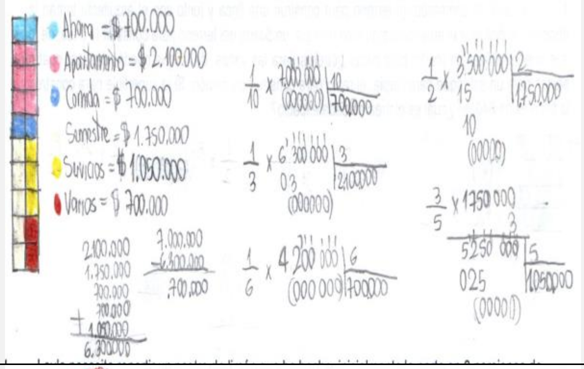
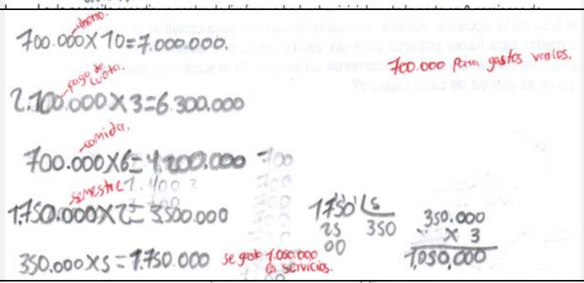
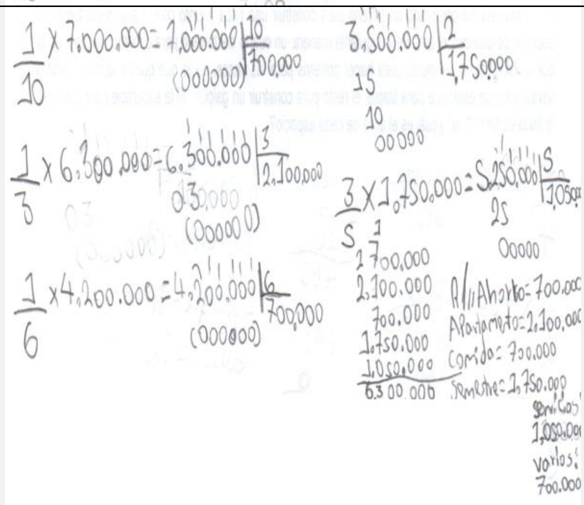
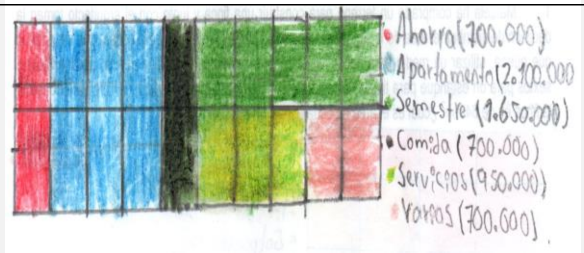
Tarea 3

Para esta tarea, los estudiantes se valieron de ambas representaciones para su solución. Sin embargo, el caso de E1, E3, E5 y E6, se acerca a la configuración de un algoritmo formal para calcular las cantidades. En la tabla 3 se presenta los resultados de la tarea.

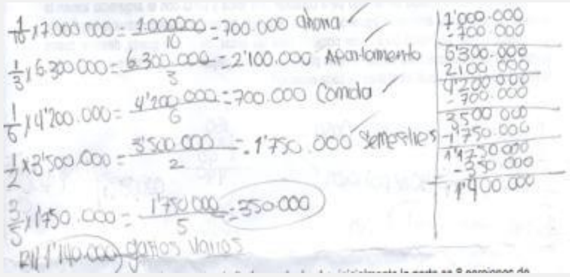
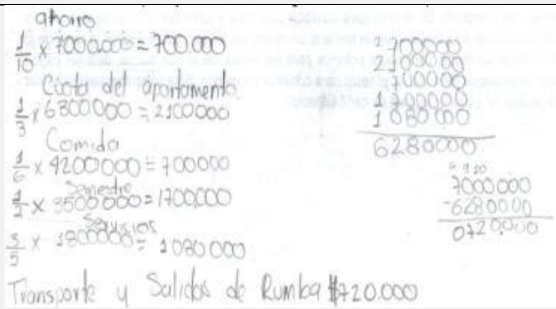
ISSN: 0124-5821 (En línea)

Tabla 3

Respuestas a la tarea 3

Estudiante	Respuesta	Observaciones
E1		Articula la representación gráfica con el uso de un algoritmo no tradicional para la solución de la tarea. El estudiante verifica sus resultados haciendo uso de la suma y resta de naturales.
E2		La evidencia no deja ver la manera en que E2 llega a sus resultados.
E3		Desarrolla un algoritmo para la solución de la tarea. Se identifica el uso de la fracción como operador. Usó la suma de las cantidades repartidas para verificar sus cálculos.
E4		La evidencia ofrecida no deja ver la forma en que realizó los cálculos.

Aplicación de las representaciones| Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 63, 196-222
ISSN: 0124-5821 (En línea)

Estudiante	Respuesta	Observaciones
E5		Hace un buen uso del algoritmo con lo que demuestra que este ha adquirido sentido para él. De igual modo, exhibe en la parte derecha de su trabajo los cálculos usados para identificar el número natural a usar. Sin embargo, aún persiste el error al multiplicar el numerador con el número natural; el estudiante asume que se debe escribir el número natural.
E6		Representa un proceso similar al de E5 y hace las cuentas para verificar el monto repartido en cada caso. Se observa que hace uso del algoritmo para la solución de la tarea.

Nota: Elaboración propia a partir de las producciones de los estudiantes.

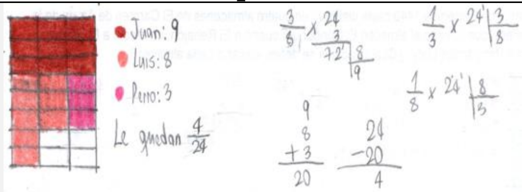
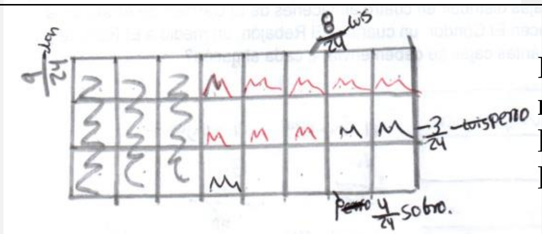
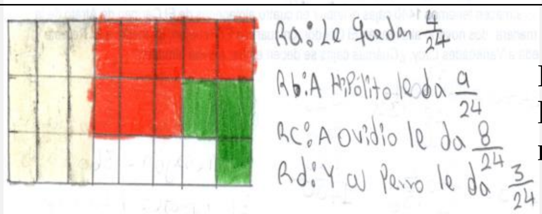
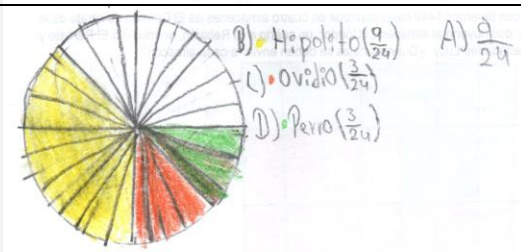
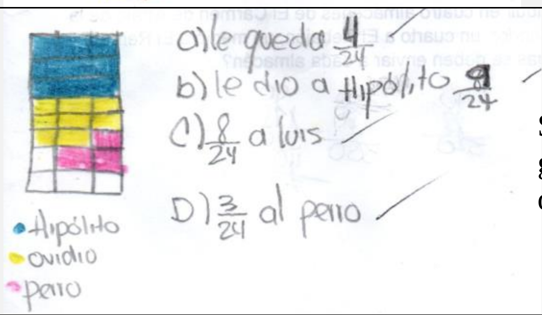
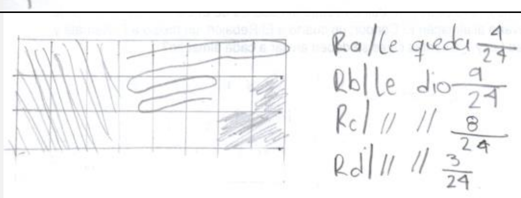
Tarea 4

Para esta tarea, los estudiantes se enfrentan a una situación en la que deben comprender el concepto de fracción para identificar las fracciones que se forman a medida que se hace la repartición. En la tabla 4 se presentan los resultados.

Aplicación de las representaciones| Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 63, 196-222
ISSN: 0124-5821 (En línea)

Tabla 4

Resultados de la tarea 4

Estudiante	Respuesta	Observaciones
E1		La articulación de la gráfica le permite a E1 hacer una correcta lectura de las fracciones que se generan en la repartición del postre.
E2		El estudiante presenta una representación gráfica de la situación, la cual usa para hacer una lectura de las fracciones generadas.
E3		El uso de la gráfica le permitió hacer la lectura de las fracciones y resolución de la tarea.
E4		Si bien la representación usada se aleja de las demás, al ser circular, logra resolver la tarea, ofreciendo las fracciones pedidas.
E5		Se observa el uso de la representación gráfica para apoyar las respuestas ofrecidas.
E6		Por medio de la solución gráfica, el estudiante ofrece la respuesta a la tarea.

Nota: Elaboración propia a partir de las producciones de los estudiantes.

Aplicación de las representaciones| Revista Virtual
Universidad Católica del Norte, 63, 196-222
ISSN: 0124-5821 (En línea)

Discusión

El objetivo del estudio fue documentar la resignificación de la fracción como operador en un entorno en el que los estudiantes transiten de la representación gráfica a la configuración del algoritmo, y que se apoyen en ambas representaciones para resolver problemas verbales.

En las producciones de los estudiantes se puede ver el apoyo que ofreció el uso de representaciones gráficas para abordar cada una de las tareas que se les propuso. Destaca el hecho de que los estudiantes empiezan a usar ambos métodos de resolución, con lo que se enriquecen sus posibilidades; además, dependiendo de la tarea, actúan de una manera u otra, lo cual se relaciona con la visión de competencia como un saber actuar, al movilizar de manera eficaz recursos cognitivos. Este resultado reafirma lo encontrado por Valdemoros y Ruiz (2008) quienes señalan que la enseñanza algorítmica, asociada a la mecanización de ejercicios, no permite ampliar el campo semántico de los fraccionarios.

Un aporte de las tareas del tipo 1 y 2, propuestas en este estudio, es que favorece la comprensión gráfica de la situación, lo que le da al estudiante más elementos de juicio para abordar la tarea y actuar de manera eficaz. El tipo de tarea 3 favorece el tránsito hacia la configuración de algoritmos no tradicionales para la solución de la tarea, y el tipo de tarea 4, presenta un mayor predominio de la configuración gráfica. Esta última, implica el reconocimiento de fracciones equivalentes, las cuales, según lo evidenciado en las respuestas de los estudiantes, tiene mayor sentido cuando pueden observarla que cuando la construyen con algoritmos. Este resultado, en particular, se constituye en un elemento clave para los profesores que diseñan sus propias tareas para el aprendizaje de los estudiantes, dado que les permite secuenciar las tareas y anticipar las preguntas para debatir en clase. Algunos resultados de las investigaciones de Amaya y Santafé (2013), Freudenthal (1983), Goffree (2000) y Streefland (1993b) sugieren que la resolución de problemas en contextos realistas o cercanos a los estudiantes favorecen la consolidación de diversos significados de la fracción.

Por otro lado, los resultados aquí expuestos apoyan lo reportado por Amorim et al. (2019), quienes señalan que un 40 % de los estudiantes de 5° a 9° grado logran resolver problemas donde la fracción actúa como operador, pero que mejoraron año a año, hasta un 60 %, mediante problemas en contextos gráficos, donde pueden usar configuraciones diferentes al algoritmo tradicional para resolver la tarea. Sin embargo, en este estudio los estudiantes no construían las

Aplicación de las representaciones| Revista Virtual
Universidad Católica del Norte, 63, 196-222
ISSN: 0124-5821 (En línea)

representaciones del problema, sino que respondían cuestiones relativas a la fracción como operador, como contar, agrupar, entre otras.

Una diferencia entre estos dos estudios es que se les permite a los estudiantes construir sus propias representaciones, de acuerdo con la interpretación que le dan a la tarea, y configurar distintos métodos de prueba para resolverla.

Se coincide con Amorim et al. (2019) en la idea de que la enseñanza de las fracciones debe darse a lo largo del paso por la educación primaria y secundaria. En el caso de Colombia, se trabajan hasta 7° grado, y esto refuerza la dificultad y poca comprensión en la educación terciaria.

El uso de la gráfica como estrategia para la solución de problemas que implican el entendimiento de la fracción como operador, es una poderosa herramienta que, cuando es interiorizada por los estudiantes, constituye la base para la construcción del algoritmo formal. Sin embargo, los estudiantes presentan dificultades en otras operaciones con números naturales, como la multiplicación y la división. Estas fallas son transferidas a la resolución de problemas con fracciones en los que deben usar la fracción como operador. Sin embargo, tal como lo sugieren Parra y Flores (2008), la resolución de problemas no se limita a la obtención de respuestas correctas mediante la aplicación de algoritmos ni procedimientos fijos, sino en proveer situaciones en las que los estudiantes propongan distintos métodos de resolución, de acuerdo con el problema planteado. Lo anterior, les permite desplegar una serie de recursos cognitivos y actuar de manera eficaz; además, se alinea con la perspectiva de competencia planteada por Tardif (2006) y que es tomada en este estudio.

Conclusiones

La investigación realizada es un caso que aporta a la comprensión de la resolución de problemas verbales usando la fracción como operador; dicha propuesta enriquece el trabajo de los estudiantes ofreciéndoles alternativas para afrontar dichas situaciones. El énfasis de la investigación se puso en el manejo de representaciones gráficas como mecanismo para comprender la tarea y apoyar la solución de esta.

Los datos sugieren que los estudiantes se mueven entre las dos representaciones, de acuerdo con lo que consideran óptimo para resolver la tarea; es clave el apoyo que les ofrece la visualización del problema, dado que fortalece la comprensión de este y facilita su abordaje con

Aplicación de las representaciones| Revista Virtual
Universidad Católica del Norte, 63, 196-222
ISSN: 0124-5821 (En línea)

más herramientas conceptuales. Sin embargo, también se evidencia que algunos estudiantes, como en el caso de E3, tienden a darle un mayor predominio al uso de algoritmos (tarea 1, 2 y 3) para resolver la tarea. Si bien el estudiante muestra rasgos de comprensión sobre los pasos que debe realizar para resolver la tarea, no actúa de forma eficiente al dejar de lado la parte gráfica que le ayuda a resolver el problema; sin embargo, en la tarea 4 resuelve la tarea, valiéndose solamente de la representación gráfica.

Se observa que los estudiantes tienden a apoyarse más fuertemente de la representación gráfica en las tareas similares a la 2 y 4, propuesta en este estudio; en cambio, las tareas similares a la 3 promueven el uso de algoritmos. Este resultado es útil para que los profesores diseñen las preguntas, atendiendo al propósito de la sesión de clase. Se considera que se debe mantener un balance entre los tipos de representaciones, para que los estudiantes mejoren en la comprensión de los problemas verbales y vayan escalando en el nivel de competencia, al usar de manera eficaz la representación que les ayude a resolver la tarea que se le proponga. Así, poco a poco, se va interiorizando el concepto.

Dado que el proceso de aprendizaje de las fracciones es lento y dispendioso, y es un contenido difícil de enseñar y de aprender, el docente debe ofrecerle al estudiante tareas que lo conduzcan a realizar una comprensión gráfica de la fracción parte todo y, paulatinamente, de la configuración de algoritmos no tradicionales, que lo lleven a resolver problemas en contextos familiares y usar la fracción como operador.

La evidencia encontrada en la investigación pone de relieve que las fracciones cobran sentido para los estudiantes cuando son capaces de representar una situación problema; en consecuencia, aparecen dificultades en el tránsito hacia la configuración de algoritmos, lo cual se atribuye al carácter algorítmico de la enseñanza, en deterioro de la comprensión e interiorización de los procesos adyacentes a este.

Los resultados encontrados en este estudio no se deben generalizar; sin embargo, se propone el diseño de situaciones similares para abordarlas con los estudiantes, adecuándolas al nivel de escolaridad, pero promoviendo otras en las que requieran usar representaciones gráficas para resolver el problema.

Tal como se observa en los resultados del estudio, la representación gráfica de la tarea apoya la comprensión de esta y la interiorización del algoritmo; además, se constituye como una oportunidad para revisar los errores procedimentales que tienen los estudiantes, así como también ofrece la posibilidad de usar métodos alternativos para el cálculo, por ejemplo, el conteo.

Referencias

Adu-Gyamfi, K., Schwartz, C. S., Sinicrope, R., & Bossé, M. J. (2019). Making sense of fraction division: domain and representation knowledge of preservice elementary teachers on a fraction division task. *Mathematics Education Research Journal, 31,* 507-528. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00265-2

Amaya, G., y Santafé, L. Y. (2013). Análisis de la interacción establecida por los agentes en la resolución de problemas en contextos virtuales, *Revista Virtual Universidad Católica del Norte,* (38), 80-97. https://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/406

Amorim, M., Etcheverria, T., y Oliveira, M. (2019). Fração com o Significado de Operador Multiplicativo: Aprendizagem e Ensino. *Jornal Internacional de Estudos Em Educação Matemática*, *12*, 199-206. https://doi.org/10.17921/2176-5634.2019v12n2p199-206

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, (52), 215-241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes* (pp. 91-126). Academic Press.

Bezerra, F., Magina, S., & Spinillo, A. (2002). How to Promote Children´s Understanding of Fractions? An exploratory Study. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 4., pp. 89-96). UEA.

Buforn, Á., Llinares, S., y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *23*(76), 229-251. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14054854010

Butto, C. (2013). El aprendizaje de las fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes. *Horizontes Pedagógicos, 15*(1), 33-45. https://horizontespedagogicos.ibero.edu.co/article/view/403

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Editorial Gedisa.

Congreso de la República de Colombia. (1994). *Ley 115*, por la cual se expide la Ley General de Educación. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

Díaz-Pinzón, J. E. (2017). Importancia de la simulación Phet en la enseñanza y el aprendizaje de fracciones equivalentes. *Revista Educación y Desarollo Social, 11*(1), 48-63. https://doi.org/10.18359/reds.2011

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación, *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143-168. http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546

Fernández, C., y Llinares, S. (2010). Relaciones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en estudiantes de educación primaria. El caso de la construcción de la idea de razón, *Horizontes Educacionales, 15*(1), 11-22. https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/16589/6/Horizontes2010fernandez-llinares.pdf

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel Publishing Company.

Goffree, F. (2000). Principios y paradigmas de una "educación matemática realista". En N. Gorgorió, J. Deulofeu y A. Bishop (Eds.), *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 151-167). Graó.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 3-19). PME.

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct–lts elements and mechanisms. En T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125–149). ERIC/SMEAC.

Kieren, T. E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 323-371). Lawrence Erlbaum Associates.

Martínez, A. (2004). *De la escuela expansiva a la escuela competitiva: dos modos de modernización educativa en América Latina*. Anthropos.

Martínez, M., Agudelo, Y., y Meza, A. (2019). Adición entre fracciones como parte de un todo utilizando el juego con regletas A³. *Revista Panorama, 13*(25), 39-49. http://dx.doi.org/10.15765/pnrm.v13i25.1265

Mendoza, T. (2018). Aprender del problema y de las formas de interacción. La construcción de conocimientos relativos al porcentaje en clases de secundaria. *Revista Colombiana de Educación*, (74), 133-154. https://doi.org/10.17227/rce.num74-6901

Ministerio de Educación Nacional -MEN-. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas y ciencias ciudadanas: guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden.* MEN.

Ministerio de Educación Nacional -MEN-. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje: matemáticas*. Panamericana Formas E Impresos S.A.

OECD. (2016). *Equations and Inequalities: Making Mathematics Accessible to All*. OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264258495-en

Parra, M. Á., y Flores, R. (2008). Aprendizaje cooperativo en la solución de problemas con fracciones. *Educación Matemática*, *20*(1), 31-52. http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v20n1/v20n1a3.pdf

Perera, P. B., y Valdemoros, M. E. (2009). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación Matemática*, *21*(1), 29-61. http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v21n1/v21n1a3.pdf

Presidencia de la República de Colombia. (1962). *Decreto Número 45*, por el cual se establece el Ciclo Básico de Educación Media, se determina el Plan de Estudios para el Bachillerato, y se fijan Calendario y Normas para evaluar el trabajo escolar. https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-103679_archivo_pdf.pdf

Ramírez, R., y Flores, P. (2017). Habilidades de visualización de estudiantes con talento matemático: comparativa entre los test psicométricos y las habilidades de visualización manifestadas en tareas geométricas. *Enseñanza de las Ciencias*, *35*(2), 179-196. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2152

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos* (5ta edición). Morata.

Stelzer, F., Richard's, M. M., Andrés, M. L., Vernucci, S. & Introzzi, I. (2019). Cognitive and maths-specific predictors of fraction conceptual knowledge. *Educational Psychology*, 1–19. https://doi.org/10.1080/01443410.2019.1693508

Streefland, L. (1993a). Fractions: a realistic approach. En T. P. Carpenter, E. Fennema, y T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research* (pp. 289-326). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203052624

Streefland, L. (1993b). The design of a mathematics course a theoretical reflection, *Educational Studies in Mathematics*, *25*, 109-135. https://doi.org/10.1007/BF01274105

Tardif, J. (2006). *L'évaluation des Compétences. Documenter le parcours de développement.* Chenelière-Éducation.

Tsai, T. L., & Li, H. C. (2016). Towards a framework for developing students' fraction proficiency. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(2), 244–255. http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2016.1238520

Valdemoros, M. E., y Ruiz, E. F. (2008). El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(1), 127-157. http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v11n1/v11n1a5.pdf

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(23), 133-170. https://revue-rdm.com/2005/la-theorie-des-champs-conceptuels/

Vicente, S., Manchado, E., y Verschaffel, L. (2018). Resolución de problemas aritméticos verbales. Un análisis de los libros de texto españoles. *Cultura y Educación*, *30*(1), 17-34. https://doi.org/10.1080/11356405.2017.1421606

Villa-Ochoa, J. A., y Ruiz-Vaho, H. M. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (27), 1-21. https://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/102/202

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editors' introduction: What is mathematical visualization? En Zimmermann, W. y Cunningham, S. (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-8). Mathematical Association of America.