Revista Latinoamericana de Etnomatemática
ISSN: 2011-5474
revista@etnomatematica.org
Universidad de Nariño
Colombia

Molina-Toro, Juan Fernando; Villa-Ochoa, Jhony Alexander; Suárez Téllez, Liliana
La modelación en el aula como un ambiente de experimentación-con-graficación-y-tecnología. Un estudio con funciones trigonométricas
Revista Latinoamericana de Etnomatemática, vol. 11, núm. 1, 2018, pp. 87-115
Universidad de Nariño
Colombia

Molina-Toro, J. F., Villa-Ochoa, J. A., & Suárez Tellez, L. (2018). La modelación en el aula como un ambiente de experimentación-con-graficación-y-tecnología. Un estudio con funciones trigonométricas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(1), 87-115.

Artículo recibido el 22 de febrero de 2018; Aceptado para publicación el 29 de abril de 2018.

La modelación en el aula como un ambiente de experimentación-con-graficación-y-tecnología. Un estudio con funciones trigonométricas

Modeling in the classroom as an environment of experimentation-with-graphic-and-technology. A study with trigonometric functions

Juan Fernando Molina-Toro[1]
Jhony Alexander Villa-Ochoa[2]
Liliana Suárez Téllez[3]

Resumen

Este artículo reporta los resultados de un estudio cualitativo que se ocupó de indagar la manera en que un conjunto de estudiantes da sentido a algunas funciones trigonométricas a través de la modelación de fenómenos de variación. Para ello se usó el constructo teórico *Humanos-con-Medios* a través del cual se construyó una visión de la modelación como *experimentación-con-graficación-y-tecnología*. En la investigación participaron cuatro estudiantes de Educación Media quienes se comprometieron con la realización de un conjunto de actividades que involucran la modelación de situaciones de variación. Los datos se recolectaron a través de entrevistas, audios y videos vinculados al trabajo de los estudiantes con tres simulaciones. Los resultados del estudio muestran que cuando los estudiantes se involucran en ambientes de modelación como *experimentación-con-graficación-y-tecnología*, logran dar cuenta de una cuantificación de movimiento que les acerca a la producción de conocimiento matemático. Algunas implicaciones para trabajar la modelación en Educación Matemática en el aula se desprenden de este estudio.

Palabras clave: Modelación matemática; Graficación; Tecnologías educativas digitales; Pensamiento variacional.

[1] Candidato a Doctor en Educación de la Universidad de Antioquia. Profesor de la Secretaria de Educación de Medellín y de la Universidad de Antioquia, Medellín-Colombia. E-mail: juan.molintat@udea.edu.co
[2] Doctor en Educación. Profesor de la Universidad de Antioquia. Coordinador de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática del Grupo MATHEMA-Formación e Investigación en Educación Matemática. E-mail: jhony.villa@udea.edu.co
[3] Doctora en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa del CINVESTAV-México. Profesora del Instituto Politécnico Nacional, México. E-mail: lsuarez@ipn.mx

Abstract

This paper reports the results from a qualitative study that investigated the way in which a student group gives a meaning to some trigonometric functions through the modelling of variation phenomena. For this purpose, the theoretical construct *Humans-with-Media* was used to provide a vision of modelling as *experimentation-with-graphic-and-technology*. This research involved four students of Middle Education who were committed to carry out a set of activities that involved the modelling of situations of variation. Data was collected through interviews, audios and videos related to student's work with three simulations. According to the study results, when the students are involved in modelling environments such as *experimentation-with-graphing-and-technology*, they give an account on a quantification of movement that brings them closer to the production of mathematical knowledge. Some implications for working with modelling in Mathematics Education in the classroom are derived from this study.

Keywords: Mathematical Modelling; Graphing; Digital Educational Technologies; Variational Thinking

1. INTRODUCCIÓN

La trigonometría ha sido un tema de interés en los currículos de matemáticas en diversos países (Por ejemplo: en Colombia, Ministerio de Educación Nacional, 2006; en México, Secretaría de Educación Pública, 2011; en Chile, Ministerio de Educación, 2011). En Colombia, el Ministerio de Educación Nacional, a través de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, ha declarado que uno de los propósitos al finalizar el ciclo de Educación Media es que los estudiantes estén en capacidad de "*describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas*" (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 88). En coherencia con este propósito, el estudio de la trigonometría debe articularse con contextos en los que la modelación de la variación involucre situaciones y fenómenos del entorno físico y de las demás ciencias.

Investigaciones recientes han mostrado que la variación y el cambio pueden entenderse como un enfoque para el estudio de diversos conceptos matemáticos (Parada, Conde y Fiallo, 2016; Rueda y Parada, 2016; Soto y Cordero, 2014; Villa-Ochoa, 2012; Tall, 2009). En particular, para la trigonometría, Molina-Toro y Villa-Ochoa (2013) y Buendía (2006) han apuntado que el estudio de fenómenos de variación periódica a través de la tecnología ofrece insumos para conceptualizar y producir modelos relacionados con funciones trigonométricas como el seno y el coseno.

El estudio de la trigonometría en una perspectiva variacional cobra importancia en los currículos puesto que su estructura temática es insumo no solo para las matemáticas sino también para otras áreas de la Ciencia, Tecnología e Ingeniería. A pesar de ello, existe una serie de dificultades cuando se aborda en procesos escolares; algunas reflejan conflictos que anteceden a la formación de conceptos y habilidades en el estudio de la matemática, impedimentos para establecer relaciones entre cantidades (el doble de, la mitad de, la tercera parte de…) y otras tienen que ver con manejo del lenguaje simbólico y su decodificación (Mora, Nieto, Polanía, Romero y González, 2012).

Estudios recientes han informado que existe cierta desarticulación entre contextos auténticos y los aspectos conceptuales de la trigonometría y de su estudio a través de las tecnologías (Molina-Toro y Villa-Ochoa, 2013; Tavera y Villa-Ochoa, 2013). Por ejemplo, en libros de texto de matemáticas de la Educación Media y Superior en Colombia, las tareas aparecen más como una forma de recrear el estudio de situaciones estáticas que situaciones dinámicas o de variación (Tavera y Villa-Ochoa, 2013). Al respecto, la literatura llama la atención frente a la necesidad de estudiar procesos de variación a través de las tecnologías pues a través de ellas, la modelación de la variación ofrece insumos no solo para la construcción de modelos, sino para conceptualizar la naturaleza dinámica de los conceptos (Parada et al., 2016, Molina-Toro y Villa-Ochoa, 2013; Pantoja, Guerrero, Ulloa y Nesterova, 2016). Por tanto, existe la necesidad de desarrollar estudios que no solo se focalicen en los aspectos cognitivos de las ideas matemáticas, sino que también centren su atención en los ambientes de aprendizaje, el rol de los contextos auténticos y el rol de los medios que se utilizan para la producción de un conocimiento que recree los procesos dinámicos de la trigonometría y en las matemáticas en general.

En la conjunción entre las demandas curriculares derivadas del Ministerio de Educación de Colombia (1998, 2006) y la desarticulación descrita anteriormente surgen interrogantes frente a los aportes que la modelación matemática y las tecnologías digitales ofrecen a la configuración de escenarios de aprendizaje donde tenga sentido la trigonometría. Es así como este artículo reporta los resultados de una investigación que se propuso configurar un ambiente de modelación con tecnología en el que los estudiantes dieron sentido a funciones trigonométricas; en particular, el escenario incluyó modelación de la variación a través del software *Modellus*.

2. LA MODELACIÓN EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En las últimas tres décadas varios investigadores han resaltado la importancia del uso de las aplicaciones, los modelos y de la modelación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Biembengut y Hein, 2004; Burkhardt, 2006; Trigueros, 2009; Kaiser y Schwarz, 2010; Suárez, 2014; Villa-Ochoa, González-Gómez y Carmona-Mesa, 2018). La mayoría de ellos converge en señalar que los modelos y la modelación ofrecen posibilidades para el estudio de las matemáticas escolares, ya que promueven el desarrollo de capacidades y la producción de imágenes y significados de las matemáticas articulados a los contextos y problemas derivados de la "realidad"; también, porque permite otros aprendizajes no matemáticos que emergen de otras ciencias o del fenómeno estudiado (Villa-Ochoa y Berrío, 2015). Dado que no existe una comprensión homogénea sobre la modelación matemática ni sobre las maneras de implementarse en el salón de clase, se hace necesario delimitar un marco bajo el cual se describa la modelación como una actividad matemática escolar y su relación con la tecnología.

2.1 La Modelación y la articulación entre las matemáticas y la realidad.

La necesidad de establecer nexos entre la realidad de los estudiantes y las matemáticas escolares sugiere la necesidad de establecer alternativas para integrar contextos, modelos y la modelación en las aulas. A partir de esta integración se espera atender a las limitaciones y barreras que ofrecen los currículos rígidos y que se logren consolidar espacios en los que el estudiante tenga un rol que le permita ser partícipe de la producción de conocimiento. De acuerdo con estos planteamientos, Trigueros (2009) apunta que "en la mayor parte de los acercamientos a la modelación se intenta, más bien, aprovechar las ideas que surgen de los estudiantes para introducir conceptos importantes de la matemática" (p. 80). Este tipo de consideraciones propone a los docentes una serie de desafíos, entre ellos, apropiarse de una gama amplia de estrategias de enseñanza que favorezcan la convergencia de los intereses de los estudiantes frente a los procesos de aprendizaje de la matemática.

En una perspectiva social, los modelos y modelación matemática no pueden agotarse en procesos rígidos ni en la construcción y manipulación de representaciones matemáticas. Más allá de ello, deben considerar los roles de los profesores, los estudiantes y el reconocimiento de los fenómenos y los medios como actores constitutivos del conocimiento matemático escolar (Villa-Ochoa, 2016). Para Burkhardt (2006), las personas buscan modelos que parecen prometedores para explicar las características de datos, pero a menudo resultan incompletos; por lo que reducir el sentido de la modelación sólo al hallazgo de una serie de términos matemáticos, es dejar de lado las oportunidades que los estudiantes vivencian en tal proceso, a la vez que se omite una serie de situaciones en las cuales conjeturan y reflexionan. Según Trigueros (2009) en el proceso de modelación en el aula, no se piensa en construir la matemática para luego establecer un proceso de modelación, sino que se construye un conocimiento matemático a partir de la interacción y reflexión del contexto-estudiante; en otras palabras, el docente ofrece al estudiante la posibilidad de tomar decisiones que le permitan construir significados de la situación que se estudia

En el ámbito académico se ha debatido acerca de las dificultades que existen cuando se pretende integrar la modelación matemática en las aulas (Blum, Galbraith, Henn, y Niss, 2007). Tal integración debe permitir la descentralización de una serie de procedimientos que hacen parte de la enseñanza focalizada en la reproducción de contenidos derivados de métodos expositivos de enseñanza. Las perspectivas que se elaboraron alrededor de la modelación, por ejemplo la presentada por Camelo, Perilla y Mancera (2016), en conjunto van dirigidas a la transformación de la forma como el estudiante aborda el conocimiento matemático, no en términos de la reflexión del estudiante doblegada ante la construcción de conceptos y dirigida por colectivos de profesores con premura por terminar ciclos de enseñanza; sino, en prácticas en las cuales las matemáticas que emergen en la solución de problemas tengan sentido.

En coherencia con las consideraciones anteriores, la modelación no se desarrolla de manera automática en las aulas, sino que está condicionada por factores relacionados con los ambientes, sujetos, objetos y medios que intervienen en el proceso de aprendizaje. Para Burkhardt (2006) existe una necesidad de usar la tecnología para la modelación pues proporciona un apoyo invaluable al establecimiento de estructuras de análisis, la variación producida por diferentes tipos de datos y la disposición de múltiples rutas de comprobación de los resultados. La presencia de las tecnologías debe reorganizar los procesos de modelación (Borba y Villarreal, 2005; Villa-Ochoa et al., 2018). A continuación, se describe una apuesta de reorganización de un proceso de modelación cuando se involucra una tecnología como el *Modellus*.

2.2 Modelación como experimentación-con-graficación-y-tecnología

En consonancia con aspectos que se presentaron antes, la tecnología puede considerarse como medio para la producción de conocimiento y no como agente neutro en los ambientes de clase. Reconocer los roles activos de la tecnología en tal producción es una de las premisas del constructo Seres-humanos-con medios (H-con-M) (Traducción al Castellano del término Humans-with-Media de Borba y Villarreal, 2005). Este constructo aporta una visión epistemológica pues ofrece otros sentidos a la manera en que los estudiantes producen conocimiento matemático en relación con la modelación y las tecnologías. En este sentido, H-con-M no agota sus propósitos en discutir las maneras en que se utilizan las tecnologías, más allá de ello, ofrece insumos para analizar el tipo de conocimiento que se produce cuando se actúa con determinado tipo de tecnologías.

En su constructo, Borba y Villarreal (2005) muestran que, a lo largo de la historia, el uso de experimentos le ha permitido al hombre la reflexión sobre ciertos fenómenos de los cuales no se podía discernir con facilidad la génesis de su naturaleza y sus consecuencias. Esta práctica se convirtió en un método para augurar resultados al ofrecer la posibilidad de manipular los factores que se estudian en diferentes condiciones. Según los autores, a través de la experimentación se posibilita también la validación o refutación de hipótesis. En esta perspectiva, se introduce otro tipo de relación entre la experimentación y la tecnología, que en términos del constructo H-con-M se llama *experimentación-con-tecnología*.

En la *experimentación-con-tecnología*, la tecnología no es concebida como una herramienta de apoyo para la actividad de experimentación, más allá de ello, la tecnología se considera como un *aspecto constitutivo*; es decir, una experimentación sin tecnología no tiene sentido. Este tipo de cimientos epistemológicos sugieren una visión amplia de tecnologías que no se agota en la presencia de dispositivos, sino que incluye sus usos y mediaciones; el término tecnologías no solo se refiere a herramientas como software, calculadoras, computadores, (tecnologías digitales) sino también a otro tipo de herramientas como tableros, lápiz, papel, oralidad (Borba y Villarreal, 2005). En la *experimentación-con-tecnología,* procesos que se asocian a la visualización, al establecimiento y validación de hipótesis y conjeturas adquieren mayor sentido y se consideran un componente fundamental que posibilita deducir las estructuras del conocimiento que se construye.

La modelación como un modo experimental de producir matemáticas escolares pone de relieve las maneras en que ese conocimiento se produce en el aula; de igual manera, se enfatizan otros procesos como la forma de pensar particular e interpretativa, relacionada con la producción de conocimiento, la reunión de abstracciones y las formalizaciones relacionadas con fenómenos. La experimentación como un aspecto clave dentro del proceso de modelación, junto con la abstracción, la resolución, validación y modificación de los modelos posibilita que no solo se centre la atención en la consecución de un modelo, también en las posibilidades y limitaciones que éstos ofrecen frente al fenómeno o situación modelada, así como en la actividad matemática y los significados que se puedan construir a partir de ella.

Cuando el estudiante hace parte de un colectivo de *humanos-con-modelación-y-experimentación-con-tecnología* se producen significados del conocimiento matemático articulados a su actividad matemática, en los contextos y fenómenos que está modelando.

2.3 La visualización y las gráficas en la modelación como experimentación-con-tecnología

El uso de la tecnología digital ofrece una serie de elementos que generan otras dinámicas al interior del aula. Una de ellas es la posibilidad de tener diferentes tipos de representación del fenómeno que se estudia. En H-con-M la visualización se entiende no como el acto sensorial de ver; sino que, más allá de ello, incluye el conjunto de razonamientos, argumentos y validaciones que se generan a través de la experiencia (con sentido) entre el sujeto y la tecnología. Bajo este tipo de consideraciones, la visualización sugiere discusiones más detalladas frente al uso, roles y significados de gráficos, diagramas y esquemas que normalmente se usan en los procesos de enseñanza de las matemáticas.

Para el caso particular de la graficación y la modelación, es posible encontrar contribuciones empíricas y teóricas que están en resonancia con la visión de *modelación como* *experimentación-con-graficación-y-tecnología* (Suárez y Cordero, 2010; Soto y Cordero, 2014). Conforme Suárez (2014) ha puntualizado, la modelación, constituida por un sistema dinámico, involucra la simulación como un medio que permite el desarrollo del razonamiento y la argumentación. En esta perspectiva, la convergencia de la modelación y graficación para el estudio de la variación y el cambio implica tener en cuenta tres premisas, a saber:

- La graficación antecede a la función, puesto que permite la construcción de ideas de variación. (Funcionalidad-1, Suárez y Cordero, 2010).
- La gráfica es argumentativa, ya que pasa a ser un elemento central de explicaciones y permite la construcción de argumentos. (Funcionalidad-2, Suárez y Cordero, 2010)
- El uso de las gráficas tiene un desarrollo en modelación, permite la cuantificación del movimiento y ciertas características asociadas con éste. (Funcionalidad-3, Suárez y Cordero, 2010)

En la conjunción de estos elementos, la modelación como *experimentación-con-graficación-y-tecnología* ofrece una elaboración teórica en la que las gráficas toman un papel importante para la representación de relaciones derivadas de un proceso experimental, representación con la cual los estudiantes producen conocimiento matemático. Conforme se mencionó antes, este conocimiento no se agota en la construcción de representaciones gráficas y algebraicas, también posibilita su uso en la interpretación/explicación del fenómeno como en la toma decisiones que se involucra en la actividad matemática (v.g. elección de las variables a estudiar, maneras de representar, delimitación de cantidades de magnitud en cada eje coordenado, puntos de referencia, y la percepción de aspectos característicos de la gráfica).

3. METODOLOGÍA

Conforme se mencionó en el apartado anterior, esta investigación se fundamentó en los principios epistemológicos del constructo teórico H-con-M y en las reflexiones sobre la importancia de la visualización y el desarrollo de gráficas. En la conjunción de estos dos elementos se concibió un ambiente de modelación como *experimentación-con-graficación-y-tecnología*. Este tipo de supuestos teóricos sugieren que la actividad matemática es vivenciada por los estudiantes y que la producción de conocimiento no se da únicamente por ellos, sino que al configurar un colectivo con modelación-y-tecnología se genera un ambiente en el que el conocimiento producido es diferente al de otro colectivo con otro tipo de recursos. En coherencia con esta visión epistemológica, la atención a lo largo de la investigación no solo se centró en las producciones conceptuales de los estudiantes, sino también en sus actuaciones con los medios que configuraron el colectivo. Por esta razón se eligió la investigación cualitativa como la manera de obtener y darle sentido a los datos que emergieron en este estudio. Según Bogdan y Biklen (2007), la investigación cualitativa es pertinente cuando la fuente directa de datos sea el ambiente natural, así mismo cuando para los investigadores el significado se convierte en un elemento de importancia capital dentro de la investigación.

3.1 Las fases del estudio

El trabajo de campo de la investigación se llevó a cabo en dos fases. La primera se denominó *Experimentación-Artefactos y* la segunda *Experimentación-y-graficación-con-tecnología*. A continuación, se describe cada una de ellas.

La primera fase se consolidó a través de dos actividades, a saber: (1) *análisis de un video*, y (2) *medición del tiempo*.

(1) *Análisis de un video* fue un espacio en el que convergieron varios de los intereses de un grupo de estudiantes, quienes manifestaron inquietudes después de observar un video que hacía un recorrido histórico sobre la evolución de los instrumentos para medir el tiempo (ver video en el enlace https://www.youtube.com/watch?v=jiXnmviBBdA). Estos datos y acontecimientos sirvieron de elemento motivador, y posibilitaron que los estudiantes reflexionaran acerca de las formas en que la humanidad superó las dificultades para medir el tiempo, cada vez de forma más precisa.

Una vez finalizó el video, los estudiantes formularon preguntas que emergieron del análisis de situaciones como el número de días que tiene una semana o la forma como se medía el tiempo en los primeros siglos. Posteriormente se reconocieron las motivaciones, inquietudes e intereses que había despertado el video; y en coherencia con ese reconocimiento, se invitó a los estudiantes para que participaran del trabajo. Al llamado atendieron cuatro estudiantes con quienes continuó la siguiente tarea y la segunda fase de la investigación. Estos estudiantes se denominan con los seudónimos Sergio, Esteban, Pablo y Ana.

Las diversas reflexiones que los estudiantes realizaron al observar el video sirvieron de insumo para ajustar la práctica de laboratorio que se realizó una semana después. En ésta se buscó aproximarse a la manera en que relacionaban elementos matemáticos con situaciones de medición y variación. En este sentido, se buscó observar cómo tomaban datos, qué ideas iban apareciendo cuando intentaron organizarlos e interpretarlos para predecir otros resultados y qué tipos de diálogos se establecían entre ellos.

(2) *La medición del tiempo* fue un proceso clave para el diseño del proceso en el aula. Con el ánimo de hacer experimentaciones en el estudio del tiempo, se diseñó una práctica de laboratorio en la cual se midió el desplazamiento de una canica a lo largo de un riel; como sistema de medida del tiempo se utilizó el número de gotas que salen de una bolsa plástica de las que se usa en medicina para portar solución salina. La práctica de laboratorio permitió identificar la forma en que los estudiantes representan las relaciones de las variables que intervienen en la medición de la distancia y el tiempo, de forma particular, la manera en que ellos construyen y expresan esas relaciones, ya que podría ser un primer indicio del uso de las representaciones y las verbalizaciones para intentar explicar de forma matemática el fenómeno estudiado.
A través del desarrollo de este laboratorio, los estudiantes reconocieron las dificultades que tuvieron algunas culturas antiguas para medir el tiempo. Además, identificaron las maneras en que tales culturas reaccionaban ante la inconsistencia de sus registros.

La segunda fase se denominó *experimentación-y-graficación-con-tecnología.* Esta fase se centró en el estudio de modelos gráficos con un grupo de cuatro estudiantes a quienes se les propuso trabajar con tres simulaciones asociadas al estudio de movimiento. Estas simulaciones involucraron a los estudiantes en la búsqueda y establecimiento de relaciones entre diferentes objetos y algunas características particulares de la función trigonométrica seno.

Los estudiantes ejecutaron y analizaron las simulaciones programadas en el software Modellus 4.0. La primera de ellas se construyó con modelos matemáticos similares a los ejemplos "*clock*" y "*fisicanalixa péndulo gravitico aproximação*" (simulaciones diseñadas en el mismo software y de libre consulta a través del enlace http://fisicanalixa.blogspot.com.co/2013/02/25-exemplo-4-modellus-x-pendulo.html). Esta simulación sirvió para que los estudiantes analizaran la dependencia de la amplitud de la gráfica de la función seno. En la Figura 1 se observa el ambiente gráfico de la primera simulación con dos barras de nivel asociadas a la longitud de un péndulo y al ángulo de oscilación inicial. Estas variables permitieron a los estudiantes encontrar tales dependencias y unas ideas sobre el período de la gráfica, asociar el movimiento del péndulo y los cambios producidos en éste por la modificación de las barras de nivel.

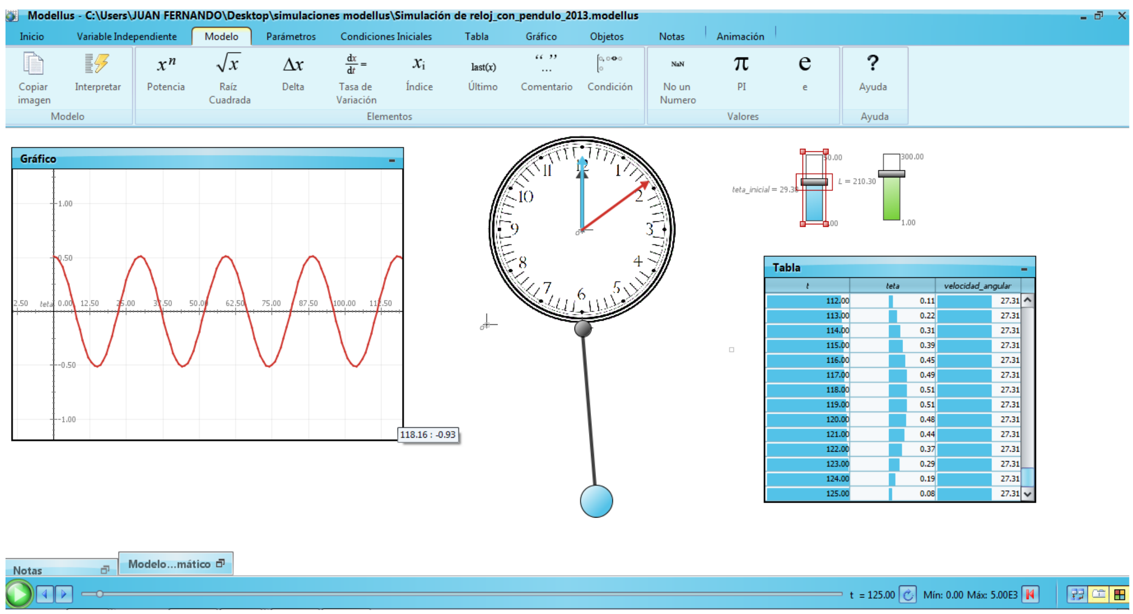

Figura 1. Simulación del movimiento de un reloj de péndulo (Simulación 1).
Fuente: Recuperado de Molina-Toro (2013). Reimpreso con permiso.

La dependencia entre los elementos que se presentaron en esta simulación no se redujo solo a encontrar vínculos entre pares de éstas, sino al paso por cada una de las diferentes representaciones de la simulación; esto es, a observar el efecto que produce la variación de las barras de nivel en el funcionamiento del reloj y, posteriormente, en la representación gráfica ofrecida por el programa.

En la segunda simulación desaparecieron el péndulo, las barras de nivel y la tabla de datos. Los estudiantes centraron su atención en el periodo de la función seno originada por la componente *y* de los vectores que representan las manecillas del reloj. Esta simulación permitió encontrar relaciones de dependencia para la amplitud de la gráfica y la representación de cada una de las manecillas en el gráfico, asimismo, predecir la forma de la gráfica de todas las manecillas en función de intervalos de tiempo largos y cortos.

La última simulación recreó el movimiento de un balón de fútbol y uno de baloncesto programados con un modelo en términos de la función seno, y un modelo con una función por tramos (función conocida como "diente de sierra"), respectivamente. Esta simulación permitió a los estudiantes observar y discriminar el movimiento de un cuerpo cuando se mueve regido por la función seno, además de identificar su amplitud y su periodo en términos de otra cantidad.

3.2 Los datos y el análisis

Como ya se mencionó, la última fase de la investigación se desarrolló con cuatro estudiantes. Estos participantes cursaban su último grado de escolaridad (16-18 años) en una institución educativa de carácter oficial y ya se habían involucrado en el estudio de la trigonometría en el grado anterior. Al indagar por esas experiencias previas se pudo determinar que había predominado una presentación de contenidos a través de metodologías de tipo expositivo. El profesor de matemáticas del grado anterior definió las funciones trigonométricas e hizo énfasis en la representación algebraica, privilegió la realización de cálculos y reproducción de gráficas. Las actividades de conexión entre la trigonometría y los fenómenos de modelación estuvieron supeditadas a "ejercicios" para calcular alturas, ángulos de elevación y de depresión en triángulos rectángulos.

Los datos para el estudio se obtuvieron a lo largo de seis sesiones de trabajo, cada una de dos horas aproximadamente. Estos datos se recogieron a través grabaciones de audio, material escrito por los estudiantes y entrevistas. Las actuaciones de los estudiantes con el software *Modellus* se registraron a través de un demo del software *Camtasia*. El análisis de los datos se desarrolló teniendo en cuenta las orientaciones de Yin (2009), bajo las cuales se establecieron vínculos entre la información recogida en el trabajo de campo, la pregunta de investigación y el referente teórico vinculado a la investigación. Con estas condiciones, el análisis de los datos tuvo en cuenta los siguientes momentos:

- ***Organización de los datos:*** Los videos, audios y documentos escritos por los estudiantes se digitalizaron y organizaron para facilitar la consulta de cada uno; este proceso favoreció la categorización que se indica a continuación.

- ***Categorización individual:*** Las categorías definidas para organizar la información se establecieron teniendo en cuenta los elementos del referente teórico adoptado para la investigación, en esta dirección se desarrollaron dos momentos:

Análisis inicial: El material recogido en el trabajo de campo se revisó con el fin de ubicar las expresiones, los diálogos, gestos y producciones escritas, que dieran cuenta de los elementos conceptuales que emergieron en relación con la función seno; pero también sobre las maneras en que se construyeron esos elementos, las acciones que evidenciaron y los contextos y mediación de la tecnología involucrada.

Estudio transversal del caso: Al terminar el análisis inicial, el siguiente paso consistió en interpretar a la luz del referente teórico, los elementos encontrados en el trabajo de campo y establecer la forma en que los estudiantes llegaron a determinar algunas ideas que se relacionan de forma implícita con las simulaciones elaboradas con modelos matemáticos en términos de la función seno y coseno. Los investigadores triangularon estos hallazgos para presentar los resultados que se ofrecen en el siguiente apartado.

4. LA FUNCIÓN *SEN (X)* COMO UN MODELO DE LA VARIACIÓN. SENTIDOS CONSTRUIDOS EN UN AMBIENTE DE MODELACIÓN COMO EXPERIMENTACIÓN-Y-GRAFICACIÓN-CON-TECNOLOGÍA

En este artículo se fundamenta en el trabajo realizado por los estudiantes en la fase de *experimentación-y-graficación-con-tecnología*. En esa dirección, los datos analizados corresponden a los momentos en que los estudiantes trabajaron con las tres simulaciones que se diseñaron para este estudio.

En su primer contacto con la simulación 1, los estudiantes describieron los movimientos y cambios a través de palabras como “*crece*” o “*decrece*”; por ejemplo, para referirse a la variación de cantidades como la longitud y el ángulo de oscilación del péndulo. Estas descripciones dan cuenta de que el ambiente provee experiencias para que los estudiantes caractericen la correlación y la dirección entre variables. Para Villa-Ochoa (2012) y Carlson et al. (2003) este es un aspecto que caracteriza un punto de partida del razonamiento covariacional. Al igual que en Trigueros (2009), los participantes de este estudio emplearon la observación directa para identificar patrones en los cambios. En este primer acercamiento, los conocimientos sobre funciones que los estudiantes tenían no estuvieron presentes para hacer una descripción y análisis de la variación.

En esta aproximación cualitativa al estudio de la variación, los estudiantes apelaron a su recuerdo sobre la forma de la gráfica cartesiana de las funciones trigonométricas y asociaron esta forma con el comportamiento del fenómeno que se estaba estudiando. Sin embargo, no lograron establecer un vínculo entre la gráfica y la expresión algebraica, ni el reconocimiento de un comportamiento característico en el movimiento que se asocia con este tipo de funciones.

En el ambiente de modelación *experimentación-con-graficación-y-tecnología* las relaciones conceptuales fueron emergiendo en la medida que los estudiantes manipularon los diferentes medios (materiales y no materiales). En particular, este estudio ofrece evidencia de las relaciones entre los estudiantes y medios como el software *Modellus*, los diálogos (entre sí y con el profesor), lápiz y papel. En diferentes momentos del estudio, la experimentación jugó un papel fundamental para la visualización e identificación de patrones y el establecimiento y rechazo de conjeturas. El siguiente diálogo se presentó en el desarrollo de la simulación 1, después que los estudiantes modificaron la longitud y el ángulo de oscilación del péndulo:

Investigador :	¿Qué otro efecto produce la variación de la longitud del péndulo en el gráfico?
Sergio :	Dependiendo de la longitud del péndulo, la línea del tiempo, el transcurso, se va hacer más largo o más corto. ¡No sé cómo explicarlo! [Sergio señala con su dedo la longitud del péndulo en la gráfica]
Sergio :	Porque si se hace muy cortico éste [Sergio señala con su dedo la longitud del péndulo en la gráfica], va a estar llegando más rápido a un punto.
Investigador :	Utiliza la flecha del mouse para mostrarme eso.

Sergio : Si se está haciendo muy cortico, va a estar subiendo y bajando más rápido. [Señala el primer periodo de la gráfica]. Si se hace más largo, va a llegar como más rápido al punto.

(Diálogo con Sergio el 21 de marzo de 2013)

Las manifestaciones verbales de las percepciones de los estudiantes dan cuenta, en términos de la Figuración de las cualidades (Suárez y Cordero, 2010), de que observaron una correspondencia entre los movimientos de los objetos en la simulación y la representación gráfica. En términos de Suárez (2014) esta correspondencia y su representación son evidencias de una Funcionalidad (1) de los gráficos. Los estudiantes detallaron algunas particularidades de los movimientos: cuando la gráfica era creciente o decreciente, qué incidencia tenía el aumentar el ángulo inicial en el péndulo; a la vez fueron descubriendo por qué el reloj, aunque tenía el movimiento de un mecanismo convencional y la dependencia entre cada una de sus manecillas como la tiene un reloj análogo común, no medía de forma correcta en las escalas de segundos, minutos y horas. Estas manifestaciones caracterizan el razonamiento de los estudiantes en tanto han coordinado la dirección de la covariación. En términos de Villa-Ochoa (2012) y Carlson et al. (2003), esto corresponde al reconocimiento del crecimiento o decrecimiento de una variable cuando otras crecen o decrecen.

Las observaciones de los estudiantes y el tipo de relaciones que encontraron son, en términos de Borba y Villarreal (2005), la reunión de abstracciones producto del ambiente *de experimentación-con-graficación-y-tecnología*. La simulación en estos ambientes se considera una manera de re-crear un contexto y el comportamiento de variables importantes dentro de un fenómeno. Esta simulación posibilitó un espacio para la experimentación y el análisis de los gráficos cartesianos que representan relaciones de covariación en el fenómeno. También posibilitó el vínculo estudiantes-fenómeno-matemática, a través del cual se logró el reconocimiento de las variables y la posibilidad de "repetir" el experimento una y otra vez hasta que los estudiantes fueran elaborando ideas cada vez más refinadas sobre el movimiento. Por ejemplo, los estudiantes refinaron sus primeras percepciones de sobre la variación en el fenómeno; por ejemplo, inicialmente afirmaban que "había una periodicidad", pero posteriormente lograron determinar que también “varía la velocidad angular de las manecillas del mismo”.

La segunda simulación permitió que los estudiantes centraran la atención en el periodo de la función seno, que se originó por la componente y de los vectores que representaban las manecillas del reloj. De esta forma se promovió el establecimiento de relaciones de dependencia para la amplitud de la gráfica y la representación de cada una de las manecillas en el plano; lo cual, a su vez, les permitió predecir la forma de la gráfica de todas las manecillas en función de intervalos de tiempo largos y cortos.

La figura 2 muestra cómo se reorganizó la segunda simulación, de tal manera que se ocultaran el péndulo y las barras de nivel verticales que eran notorias en la primera simulación. En su lugar, se agregó una barra horizontal cuya finalidad era variar el periodo de la función trigonométrica que regía el movimiento del reloj. Esta sesión estuvo dirigida a observar la relación reloj-gráfica y determinar dependencias al interior de la simulación. Las primeras observaciones de los estudiantes se centraron en identificar lo que ocurría en el gráfico cuando había transcurrido un minuto; esta acción permitió que hallaran una relación entre el movimiento de la manecilla del reloj, el tiempo y el gráfico. Estas observaciones permitieron a los estudiantes *predecir* la posición de las manecillas al realizar una lectura de la gráfica, de tal manera que contando los “picos” de la gráfica podían encontrar el tiempo transcurrido en el reloj de la simulación.

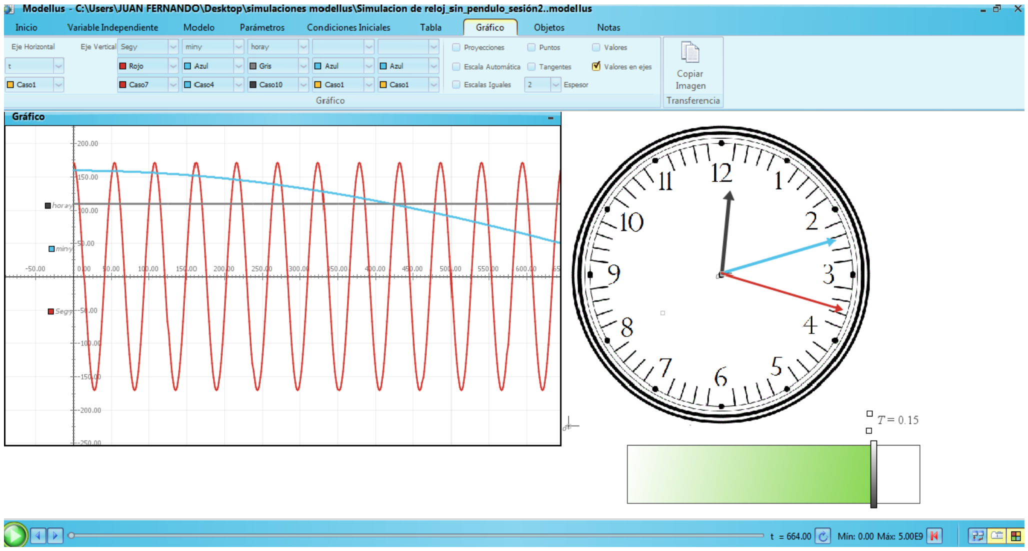

Figura 2. Simulación para analizar el periodo en la gráfica (simulación 2).
Fuente: Recuperado de Molina-Toro (2013). Reimpreso con permiso.

En el siguiente diálogo, Pedro y Esteban discuten frente a la segunda simulación y formulan ideas en relación con la dirección de la covariación. El diálogo muestra que el profesor investigador promueve que los estudiantes observen otros objetos de la simulación con el fin de establecer relaciones entre gráfico, reloj y movimiento lineal, éste último es, en ocasiones, poco explorado cuando se trabaja con funciones trigonométricas.

Investigador :	¿Con quién se relacionan esos cuadros? [Señala los cuadrados (indicadores) que en la figura 2 representan las ordenadas de las funciones. Estas ordenadas se etiquetan en la figura con: hora y, min y, Seg y]
Pedro :	¡Con el reloj…!
Investigador :	¿Pero específicamente con qué?, porque hay muchas cosas en el reloj.
Pedro :	Con la gráfica…
Esteban :	Pues, describe los movimientos del minutero, segundero.

Investigador :	Entonces, ¿Esos cuadritos serían útiles para determinar también la posición?
Esteban :	Sí.
Pedro :	Sí, también.
Investigador :	Cuando esté en el 3, ¿Dónde va a estar el cuadrito?
Esteban :	¡En la mitad!
Pedro :	Uhmm, sí, va a estar en la mitad.
Investigador :	¿Y cuando esté en el nueve?
Pedro :	También.
Investigador :	Y entonces ¿Cómo sabrían si es el seis o el nueve?
Esteban :	Depende si va hacia abajo o va hacia arriba
Pedro :	Cuando va bajando es el tres, cuando va subiendo es el nueve.
Investigador :	Ok. ¿Ese cuadro se mueve siempre a la misma velocidad?
Pedro :	Sí, debería moverse a la misma velocidad.
Investigador :	¿Se mueve a la misma velocidad siempre?
Pedro :	Sí, no cambia.

Por unos instantes fijan la mirada en el movimiento del cuadrado (indicador).

(Diálogo con Pedro el 11 de abril de 2013)

Si bien los estudiantes no tuvieron la intención de explorar el movimiento de esos cuadrados (indicadores), la pregunta que les hizo el investigador posibilitó que aislaran el sistema y se concentraran en un movimiento rectilíneo que estos indicadores describían sobre el eje y. El siguiente diálogo es una muestra de las producciones de los estudiantes sobre estos movimientos.

Pedro :	Sí, se mueve a una velocidad media. [Hace una pausa]. Aunque

	pensando bien la pregunta, aquí reduce la velocidad para volver a subir. [Señala el extremo inferior de la gráfica].
Investigador :	¿Da la idea de quedarse quieto?
Pedro :	Es como cuando uno tira algo; y ya que llega como a su punto máximo y vuelve y baja.
Investigador :	Si algo sube y baja, ¿debe haber cambio de la velocidad o no?
Pedro :	En estas dos puntas sí. No va con la misma velocidad aquí, que ya acá. [Señala el extremo inferior y la mitad de la trayectoria]
Esteban :	Debe ser la velocidad que se tiene en cada parte.
Investigador :	Pero cuando dices la misma velocidad es ¿qué? ¿La misma cuando se está deteniendo aquí encima? o ¿cuál?[Señala varios tramos del recorrido del recuadro]
Esteban :	No, pues sí tiende como a pararse, como si descansara para tomar impulso.

(Diálogo con Pedro y Esteban el 11 de abril de 2013)

Además de las ideas presentes en el diálogo anterior, el entorno dinámico facilitó el estudio de “objetos móviles” que los estudiantes no habían captado hasta el momento. Allí, la percepción visual del movimiento de los cuadrados (indicadores) produjo un proceso de visualización, es decir, un razonamiento a través de la identificación de características y propiedades de estos movimientos. Los estudiantes encontraron elementos que les permitieron comprender por qué el periodo de cada manecilla era diferente uno de otro, además lograron los intervalos de crecimiento y decrecimiento en la gráfica. En otras palabras, no solo establecieron propiedades a través de la observación e intuición, además lograron establecer argumentos sobre el porqué de los comportamientos que veían allí.

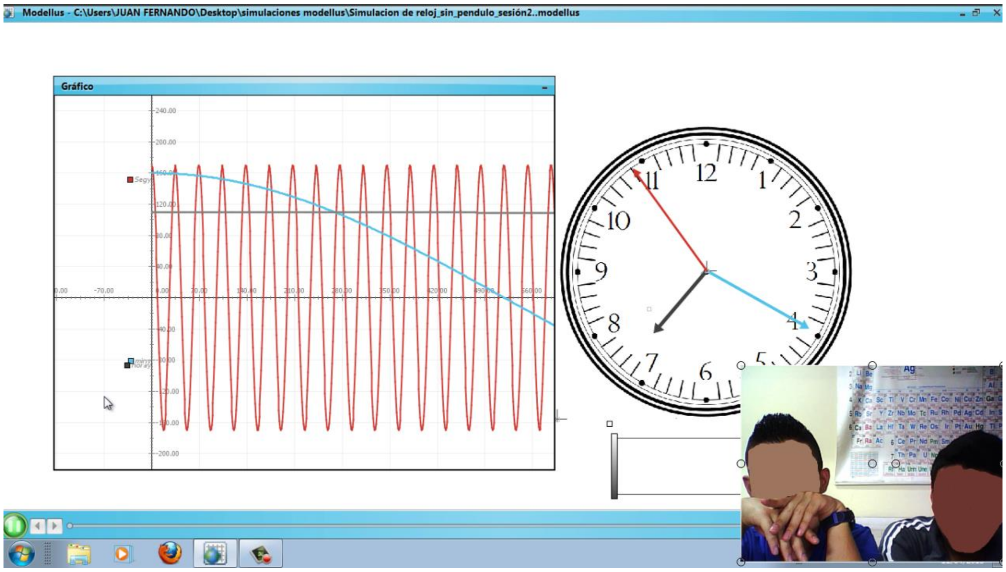

Figura 4. Pedro y Esteban comparan el movimiento de las manecillas del reloj en la segunda simulación.
Fuente: Recuperado de Molina-Toro (2013). Reimpreso con permiso.

En esta parte de la experiencia, los estudiantes mostraron que tales comprensiones se dieron por causa de sus acciones con simulación. Estas características son evidencias de la funcionalidad 2 (Suárez y Cordero, 2010), pues ellos lograron establecer relaciones entre la gráfica y las situaciones de variación. Este hallazgo se derivó del ambiente de modelación que se configuró como *experimentación-con-graficación-y-tecnología* en el que las gráficas cartesianas no solo representaban la coordinación y relación de dos variables, sino que se convertían en otra representación kinestésica del movimiento simulado, debido al carácter dinámico que el software proporcionaba.

Esa representación kinestésica muestra que un gráfico cartesiano dinámico también puede tener un rol de *sistema referente*, es decir, un sistema a través del cual se puede estudiar y representar las características fundamentales de un fenómeno que se simula. En particular, la evidencia presentada en este artículo muestra que los estudiantes identificaron particularidades propias de la función trigonométrica seno, la amplitud, el periodo, porqué se forman gráficas con amplitudes y con periodos diferentes. En este sentido, Borba y Villareal (2005) hablan de las potencialidades que ofrecen las representaciones gráficas e interfaces para reorganizar el pensamiento y cambiar la naturaleza de la producción de conocimiento en colectivo con los medios.

La interacción a través del diálogo posibilitó que el profesor pudiera promover cuestionamientos que permitieran a los estudiantes tomar conciencia de sus razonamientos, e irlos refinando en relación con las evidencias proporcionadas por las simulaciones. Este hecho se hizo evidente cuando los estudiantes lanzaban una afirmación, luego la contrastaban con la simulación, y posteriormente lanzaban otra más elaborada. Estas acciones dan cuenta de que la *oralidad* se presentó como otro *medio para la producción de conocimiento* en el ambiente de modelación descrito en este artículo.

La última parte del trabajo de campo puso en juego las ideas que los estudiantes habían construido en las simulaciones previas. En la simulación 3, las gráficas y las tablas de valores se ocultaron y se dejó solo el ambiente de movimiento de dos balones (ver Figura 5).

La siguiente figura muestra una imagen de la simulación que se desarrolló en esta sesión.

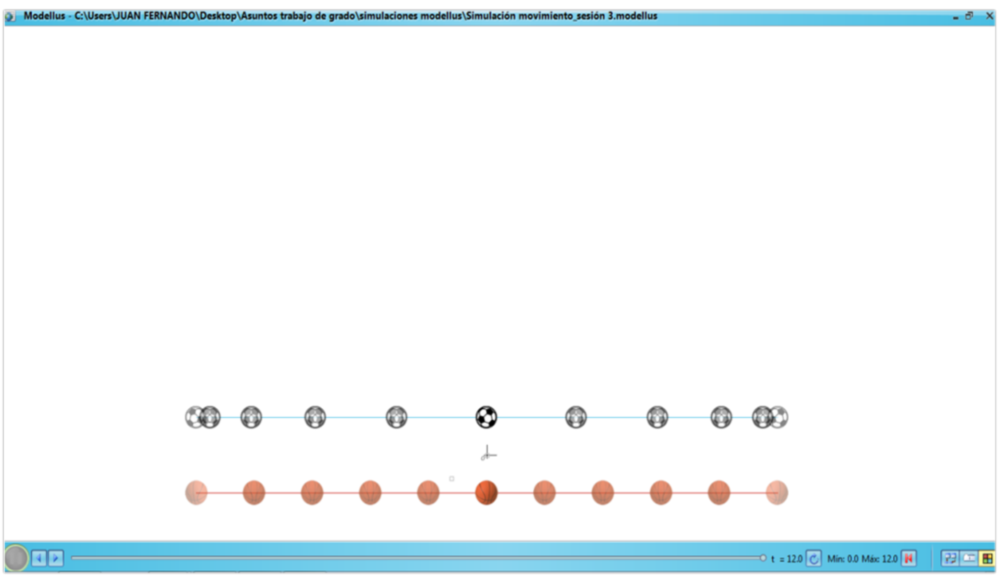

Figura 5. *Imagen estroboscópica de la simulación 3 - El movimiento en una dimensión. Fuente: Recuperado de Molina-Toro (2013). Reimpreso con permiso.*

Para iniciar la experiencia se indagó por la representación gráfica del movimiento de cada balón. Al igual que en las experiencias anteriores, los estudiantes ejecutaron varias veces la simulación para observar el movimiento una y otra vez. Inicialmente, mostraron con sus gestos la dificultad que les generaría realizar un gráfico adecuado; a pesar de ello, persistieron en la experimentación. En este caso, la imagen estroboscópica (huellas que deja cada balón) que proporcionó el software se convirtió en insumo para que fueran emergiendo elementos relacionados con el tiempo y la posición de cada balón. Como evidencia de este hecho se presentan algunas expresiones de los estudiantes: "voy a suponer que de aquí a allá hay 10 cm." (para referirse a la distancia desde el origen donde están los balones, hasta el extremo derecho), "aquí la distancia es mayor y aquí es menor", "aquí para, y vuelve a coger velocidad" (analizando en conjunto los extremos del movimiento), "¿por qué se acelera más aquí?" (analizando las distancias entre la separación de los balones).

Las anteriores verbalizaciones ilustran que las interpretaciones hechas por los estudiantes son más "robustas" que cuando se enfrentaron a las primeras simulaciones. Este hecho sugiere que a medida que van modelando diferentes situaciones, van desarrollando ciertos *"modos de actuación"* que se ponen en práctica a medida que nuevas experimentaciones se van presentando. Una interpretación de este hecho permite reconocer que en un ambiente de modelación fundamentado epistemológicamente en H-con-M, el conocimiento matemático que se produce no está articulado solo a los aspectos conceptuales y procedimentales de las matemáticas, sino que aporta actitudes frente a las *maneras de actuar* en situaciones de modelación.

En la experimentación hecha con la simulación 3, los estudiantes iniciaron su estudio del fenómeno observando el movimiento e intentando definir variables que determinarían el gráfico. Con ello buscaban encontrar un "modelo" que les permitiera describir las particularidades del movimiento (cuándo va a la derecha, cuándo va a la izquierda, cuándo se detiene, cuándo acelera, cuándo desacelera).

En la Figura 6 se presenta una de las representaciones realizadas con lápiz y papel por Pedro; en ella se puede observar que su gráfico logra describir el movimiento presentado en la simulación. Después de terminar sus representaciones gráficas, los estudiantes conocieron el gráfico del software Modellus 4.0 para observar los avances en el proceso.

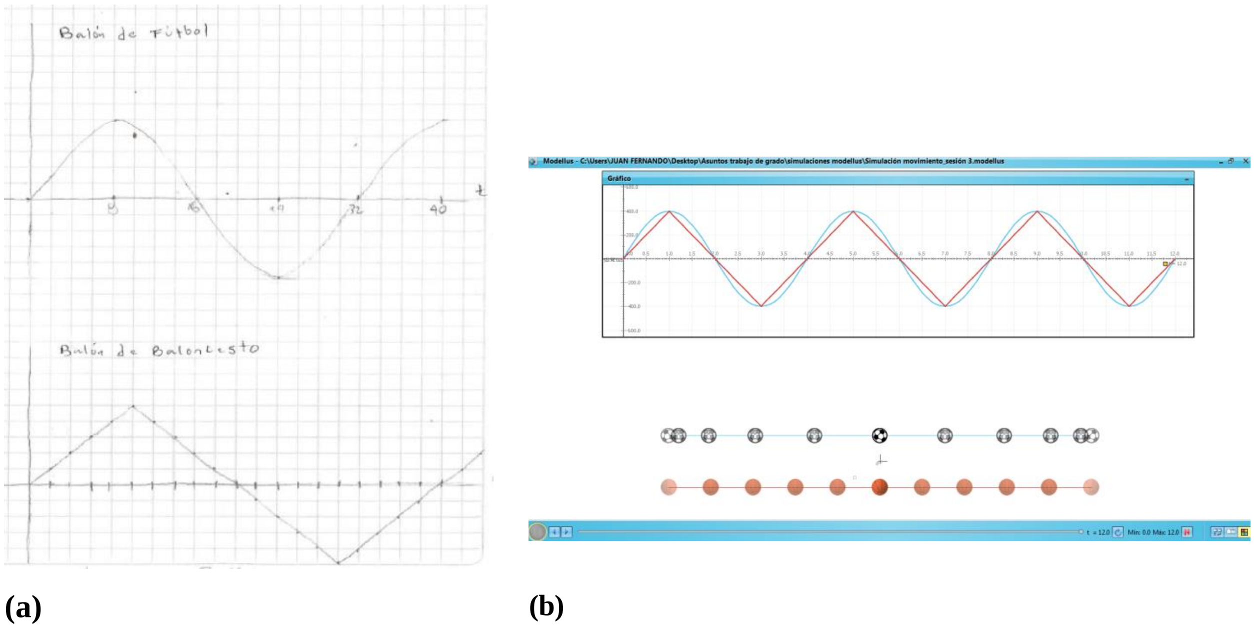

Figura 6. Gráfica construida por Pedro (a) relacionada con la imagen estroboscópica arrojada por la simulación 3 (b).

Fuente: Recuperado de Molina-Toro (2013). Reimpreso con permiso.

El gráfico presentado por Pedro da cuenta de una interpretación cercana a lo que sucedió en la simulación y es evidencia del trazo que hizo para "unir" los puntos que él había ubicado con anterioridad, y que expresan su "visualización" de la imagen estroboscópica de cada balón en la simulación. La producción del estudiante fue el resultado de su propia experiencia a lo largo de las simulaciones previas; el investigador no actuó como un medio que indujera o sugiriera caminos para llegar a estos productos. En términos de Suárez y Cordero (2010), en esta parte del trabajo, los estudiantes tomaron "decisiones sobre la elección de las variables a representar en cada uno de los ejes coordenados, la elección de un punto de referencia, la elección de los cuadrantes y la percepción de aspectos característicos de la gráfica como puntos iniciales y finales, así como puntos extremos" (p. 329). En este caso, puede observarse la funcionalidad (3) referida por los autores.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Las evidencias presentadas anteriormente permiten ver que la modelación como *experimentación-con-graficación-y-tecnología* se consolidó como un ambiente de "laboratorio" en el cual se convocó a los estudiantes para que, a través de la simulación, dieran sentido variacional a la función trigonométrica seno. El ambiente experimental se observó en la interacción de estos estudiantes con el software al obtener, organizar y analizar datos para dar sentido a las gráficas cartesianas como modelos matemáticos; este proceso permitió que establecieran patrones de movimiento y coordinaran múltiples representaciones. "Pruebas" de ensayo y una nueva clase de juicio de "error" también tuvieron lugar en este ambiente de modelación matemática.

Los estudiantes pasaron por algunos de los subprocesos que se encuentran inmersos en los procesos de modelación, a saber: (i) *experimentación.* Este subproceso estuvo vinculado a cada momento en el que los estudiantes interactuaron con sus compañeros, con el investigador, con las simulaciones y toda la información elaborada con ellas, con el fin de comprender el fenómeno, reconocer variables y sistematizar los datos. (ii) *Abstracción.* Este subproceso se manifestó en las acciones de los estudiantes que dieron cuenta de inferencias sobre el comportamiento del fenómeno y reconocimiento de patrones, en el planteamiento de conjeturas y su valoración experimental. (iii) *Resolución.* En términos de todo el proceso vivido por los estudiantes para responder a cada una de las preguntas realizadas alrededor del funcionamiento del reloj, la medición y el trabajo con las gráficas. No se expone aquí la resolución de un problema en general; sino todos esos momentos en los cuales vieron la necesidad de encontrar una respuesta a una pregunta que los obligaba a detenerse un poco para observar la relación de elementos matemáticos con situaciones que, si bien se aprecian, no las pueden explicar y deducir con facilidad. (iv) *Producción de significados.* Este fue un subproceso que se dio a lo largo de todo el proceso, pero se hizo más evidente en la simulación tres, cuando los estudiantes construyeron modelos gráficos para representar la variación de tres tipos de movimientos diferentes.

La siguiente tabla presenta un resumen de cómo los estudiantes lograron pasar por tres momentos en los cuales se pudo inferir el uso de las funcionalidades a las que hace referencia Suárez y Cordero (2010).

Premisas	Descripción
Funcionalidad – 1	Los patrones de movimiento establecidos por los estudiantes a partir del análisis del movimiento de las manecillas del reloj, el péndulo y el tipo de gráfica que en conjunto producen, dieron cuenta de la determinación de esta funcionalidad y les permitió la construcción de ideas de variación. (Simulación 1)
Funcionalidad – 2	Los estudiantes identificaron particularidades que les permitieron construir argumentos relacionados con la amplitud y el período de la gráfica (Simulaciones 1 y 2)
Funcionalidad – 3	Los estudiantes cuantificaron gráficamente el movimiento de los balones y asociaron en la gráfica características propias de cada movimiento (Simulaciones 2 y 3)

Tabla 1. Funcionalidades observadas en los estudiantes.
Fuente: Recuperado de Molina-Toro (2013).

Las descripciones que se presentaron en la tabla dan cuenta de que los participantes de este estudio pasaron por tres momentos asociados al trabajo con cada simulación, desarrollando un proceso de modelación con gráficas. El análisis de gráficas les permitió vincular movimientos en una y dos dimensiones con representaciones visuales conocidas. Aunque los estudiantes tenían experiencias previas con este tipo de gráficas, sus comprensiones carecían de significado de variacional, es decir, para ellos, esas gráficas no eran modelos de fenómenos de variación periódica.

Fundamentados en los resultados de esta investigación es posible proponer que el trabajo con gráficas de las funciones trigonométricas no se reduzca sólo a la ubicación y unión de puntos, al producto de la interacción de un estudiante con la calculadora, o al producto de la ubicación de unas líneas en el plano cartesiano que surgen de la formación de una circunferencia y unos segmentos asociados a ésta. Más allá de ello, su estudio debe vincular también los escenarios dinámicos que permitan ver la naturaleza de la formación de las mismas y la variación que en ellas se produce cuando los elementos que la fundamentan no permanecen siempre constantes.

Este estudio aporta evidencia empírica de que cuando los estudiantes se comprometen en un ambiente de modelación como *experimentación-con-graficación-y-tecnología* pueden producir significados matemáticos. En el caso particular de la función seno, los estudiantes reconocieron características del fenómeno y de su modelo gráfico, por ejemplo: periodo, amplitud, cambio, correlación entre variables, manera en que la variación cambia. Esto se hizo evidente en las diferencias que presentaron en las gráficas de los dos movimientos involucrados en la simulación tres.

Los casos reportados en este artículo evidencian que existen ambientes en los cuales se ofrecen posibilidades para que los estudiantes reconozcan, analicen y representen de forma gráfica relaciones involucradas en un fenómeno; pero, sobre todo, que las utilicen para comprenderlo. Conforme se argumentó al interior de este artículo, los procesos involucrados en cada simulación no fueron rígidos ni permanecieron inmutables. Es decir, este estudio aporta evidencia de que cuando los estudiantes se comprometen en un colectivo de *estudiantes-con-medios*, no solo producen aspectos conceptuales asociados a las matemáticas; sino que también van refinando sus modos de actuar frente al estudio de un nuevo fenómeno. Esto sugiere un doble rol para la modelación matemática, uno como estrategia o recurso para estudiar matemáticas, y otro como objeto de estudio y de aprendizaje en sí mismo. En otras palabras, la modelación matemática se observa como un recurso y como una componente constitutiva de (para) la actividad matemática escolar.

El uso de gráficas como modelos matemáticos está en relación con las premisas de Suárez y Cordero (2008) y Suárez (2014) para quienes este uso atiende a tres funcionalidades; éstas fueron emergiendo de forma natural en el discurso de cada estudiante, cuando construyeron ideas nuevas, cuando explicaron ciertas particularidades de algunos movimientos en relación con la gráfica que ellos generaban, vinculando la construcción de argumentos con las formas visuales de las gráficas.

En coherencia con varios de los planteamientos de Suárez y Cordero (2008) y de Borba y Villarreal (2005), los estudiantes vinculados a la investigación produjeron conocimiento matemático asociado a unas situaciones de movimiento; sin embargo, este conocimiento no fue solo producto de los estudiantes, sino que resultó de las interacciones ocurridas en un colectivo de *estudiantes-con-modelación como experimentación-con-graficación-y-*

tecnología. Este tipo de consideraciones sugiere desafíos para los profesores en el sentido que deben crear ambientes en las aulas de clase en los que los estudiantes, el profesor, el conocimiento y los medios no se observen disyuntos; sino que se reconozca que cada uno tiene un papel constitutivo en el conocimiento escolar que se espera producir.

REFERENCIAS

Biembengut, M., y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática, 16*(2), 105-125.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H., y Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (Vol. 10). New York: Springer.

Bogdan, R. C., y Biklen, S. K. (2007). *Qualitative research for Education. An introduction to Theories and Methods.* Boston: Pearson.

Borba, M. C., y Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking.* New York: Springer.

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (2) 227-251.

Burkhardt, H. (2006). Modelling in mathematics classrooms: reflections on past developments and the future. *ZDM -The International Journal on Mathematics Education, 38*(2), 178-195.

Camelo, F.J.; Perilla, W.Y.; Mancera, G. (2016). Prácticas de modelación matemática desde una perspectiva socio crítica con estudiantes de grado undécimo. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 9(2), 67-84.

Carlson, M.; Jacobs, S.; Coe, E.; Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, *8*(2), 121-156.

Kaiser, G., y Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education—Examples and Experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(1), 52-76.

Ministerio de Educación Nacional - Colombia (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional - Colombia (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio

Ministerio de Educación de Chile. (2011). *Bases curriculares de Educación Básica: consulta pública.* Santiago de Chile: Mineduc.

Molina-Toro, J. (2013). *La modelación con tecnología en el estudio de la función seno*. (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Medellín. Recuperado a partir de http://repository.udem.edu.co/handle/11407/69

Molina-Toro, J y Villa Ochoa (2013). La modelación en la producción de conocimiento matemático: el caso de la función seno. *Revista Científica, 2(especial),* 80-84. Doi: 10.14483/23448350.5496

Mora, M. F., Nieto, E. X., Polanía, D. L., Romero, M. L., y González, M. J. (2012). Razones trigonométricas vistas a través de múltiples lentes. En P. Gómez, *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1* (págs. 261-341). Bogotá: Universidad de los Andés.

Pantoja, R., Guerrero, M. L., Ulloa, R. y Nesterova, E. (2016). Mathematical Modeling in Problem Situations of Daily Life. *Journal of Education and Human Development, 5*(1), 62-76.

Parada, S. E., Conde, L. A., y Fiallo, J. (2016). Mediación Digital e Interdisciplinariedad: una Aproximación al Estudio de la Variación. *Bolema - Boletim de Educação Matemática, 30*(56), 1031-1051. doi:10.1590/1980-4415v30n56a10

Rueda, N. J., y Parada, S. E. (2016). Razonamiento covariacional en situaciones de optimización modeladas por Ambientes de Geometría Dinámica. *Uni-pluriversidad, 16*(1), 51-63.

Secretaría de Educación Pública - México. (2011*). Plan de estudios 2011. Educación Básica*. México: SEP.

Soto, A. M., y Cordero, F. (2014). La graficación-modelación y la serie de Taylor. Una socioepistemología del cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(3), 319-346. doi:10.12802/relime.13.1733

Suárez, L. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar*. México: Diaz de Santos.

Suárez, L., y Cordero, F. (2008). *Modelling- Use of Graphs. A Category in Calculus that Redefines Variation in Situations of Modelling Movement*. Paper presented at ICME 11. Monterrey. Mexico. Recuperado el 20 de enero de 2013, http://tsg.icme11.org/document/get/672

Suárez, L., y Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 13 (4-II),* 319-333.

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM -Mathematics Education, 41*(4), 481-492. Doi: 10.1007/s11858-009-0192-6

Tavera, F, y Villa-Ochoa, J. A. (2013). *El pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones trigonométricas.* En: A. Ramírez; Y. Morales

(Eds.), Memorias. I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe (pp. 666-676). Santo Domingo: REDUMATE-PUCMM

Trigueros, M. (2009). El uso de la Modelación en la Enseñanza de las Matemáticas. *Innovación Educativa*, 9(46), 75-87.

Villa-Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 31, 9-25. Doi: 10.17227/ted.num31-1646

Villa-Ochoa, J. A. (2016). Aspectos de la modelación matemática en el aula de clase. El análisis de modelos como ejemplo. In J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 109–138). Barcelona: Gedisa.

Villa-Ochoa, J. A. y Berrío, M. J. (2015). Mathematical Modelling and Culture. An Empirical Study. En Gloria A. Stillman, Werner Blum y Maria Sallet-Biembengut (eds.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences*, chapter 19. New York: Springer.

Villa-Ochoa, J. A., González-Gómez, D., y Carmona-Mesa, J. A. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. *Formación Universitaria*, *11*(2), 25-34, doi: 10.4067/S0718-50062018000200025

Yin, R. (2009). Case Study Research: Design and Methods. Thousand Oaks, California: Sage Publications.