Bolema: Boletim de Educação Matemática
ISSN: 0103-636X
ISSN: 1980-4415
UNESP - Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Pesquisa; Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Campos, Dilhermando Ferreira; Moreira, Plinio Cavalcanti

Inadequação do Uso da Linguagem Algébrica Moderna na Tradução de Enunciados dos *Elementos* de Euclides

Bolema: Boletim de Educação Matemática, vol. 32, núm. 62, 2018, pp. 907-926
UNESP - Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Pesquisa; Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

DOI: 10.1590/1980-4415v32n62a08

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a08

Inadequação do Uso da Linguagem Algébrica Moderna na Tradução de Enunciados dos *Elementos* de Euclides

Inadequacy of Modern Algebraic Language Use for Translating Mathematical Sentences in Euclid's *Elements*

Dilhermando Ferreira Campos*
ORCID iD 0000-0002-8513-9241
Plinio Cavalcanti Moreira**
ORCID iD 0000-0001-9576-2769

Resumo

A linguagem da Matemática antiga costuma soar hermética àqueles habituados ao simbolismo algébrico com que representamos as ideias da Matemática hoje. Assim, para tornar uma sentença da Matemática clássica mais clara ao leitor atual, é comum reescrevê-la utilizando a notação moderna. No entanto, essa estratégia pode ofuscar algumas características e pressupostos fundamentais da Matemática grega. No caso dos *Elementos*, para entendermos sua estruturação e suas bases conceituais, precisamos levar em consideração questões teóricas enfrentadas por Euclides. Na passagem da Matemática antiga para a moderna, conceitos fundamentais, como o de número e o de medida, se modificaram; o raciocínio analítico se impôs ao pensamento sintético; e o papel da Matemática na elaboração do conhecimento em geral foi repensado. Por isso, o uso da linguagem algébrica moderna para "traduzir" enunciados contidos nos *Elementos* pode ocultar essas diferenças e gerar interpretações equivocadas das bases da Matemática clássica e de suas relações com a Matemática atual.

Palavras-chave: História da Matemática. Matemática Clássica. Euclides. Incomensurabilidade. Linguagem Algébrica.

Abstract

Ancient mathematical language usually appears hermetic to those used to the algebraic symbolism we represent mathematical ideas today. Hence, in order to try to make a classic mathematical sentence clear to a generic reader, it is frequently "translated" into modern algebraic language. However, this kind of strategy may obscure some important characteristics and founding structures of Greek Mathematics. In the case of Euclid's *Elements*, in particular, to understand its conceptual basis, it is especially relevant to consider some fundamental theoretical issues faced by Euclid in his time. In the course of moving from ancient to modern mathematics, some important concepts, like those of number and measure, have changed. Furthermore, analytic reasoning has imposed itself over synthetic reasoning in a context where the role attributed to mathematics in the development process of

* Doutor em Educação pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Professor da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil. Endereço para correspondência: Universidade Federal de Ouro Preto, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Departamento de Matemática (DEMAT), Campus Morro do Cruzeiro, Bauxita, Ouro Preto, MG, Brasil, CEP: 35400-000. E-mail: dilhermando@ufop.edu.br.
** Doutor em Educação pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Professor da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil. Endereço para correspondência: Universidade Federal de Ouro Preto, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Departamento de Educação Matemática (DEEMA), Campus Morro do Cruzeiro, Bauxita, Ouro Preto, MG, Brasil, CEP: 35400-000. E-mail: pliniocavalcantim@gmail.com.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a08

general knowledge has significantly changed. In this article, we argue that "translating" mathematical sentences in Euclid's *Elements* into modern algebraic language may conceal differences and changes that were developed along thousands of years, inducing inaccurate interpretations of the classical mathematics foundations as well as of its relations with today's mathematics.

Keywords: History of Mathematics. Classical Mathematics. Euclid. Incommensurability. Algebraic Language.

1 Introdução

O desenvolvimento da Matemática na Grécia antiga passou por diversos estágios e reformulações. A historiografia tradicional nos legou a narrativa de uma sequência de construções teóricas, mais ou menos linear, que teve como ponto de partida os primórdios do pensamento dedutivo, passou pelo enfrentamento do problema da incomensurabilidade, resultando na Matemática sistematizada por Euclides nos *Elementos*.

Nas últimas décadas, essa leitura da história vem sendo desconstruída por trabalhos que mostram uma Matemática grega bem mais diversificada e que se desenvolveu com base em distintos pressupostos e critérios de rigor. Sabemos, além disso, que existiram outros "Elementos" anteriores ao livro atribuído a Euclides. No entanto, é a visão euclidiana, expressa nos *Elementos*, que veio influenciar, sobremaneira, o desenvolvimento posterior da Matemática ocidental, ajudando a estabelecer alguns pilares conceituais e parâmetros de rigor, os quais só vieram a ser problematizados de forma mais direta, no ambiente da Matemática formal, na Modernidade. Por esse motivo, fora das discussões historiográficas, a expressão "Matemática clássica"[1] se refere, usualmente, ao modelo euclidiano.

Segundo a tradição, Euclides teria sido um seguidor da escola platônica, e seu trabalho, uma decorrência das concepções filosóficas da Academia. Essa perspectiva historiográfica é sintetizada por J. R. Lucas (1967, p. 13, tradução nossa) da seguinte maneira: "Platão apresentou o seu programa. Os seus discípulos realizaram-no em grande medida. Nós temos o resultado final codificado por Euclides". Esse é outro aspecto da história da Matemática grega que passou por reformulações na historiografia atual.

I. Mueller (1969), por exemplo, argumenta que seriam as reflexões sobre a prática Matemática grega, já sedimentadas no período de Platão, que teriam inspirado muitas das

[1] O foco deste artigo será a Matemática expressa nos *Elementos* de Euclides. Por isso, a despeito da diversidade de modelos matemáticos desenvolvidos na Grécia antiga e da grande quantidade de outros trabalhos matemáticos importantes produzidos na Antiguidade, os termos "Matemática clássica", "Matemática antiga" ou "Matemática grega" serão usados, neste texto, apenas para se referir ao modelo euclidiano sistematizado nos *Elementos*. A tradução utilizada dessa obra será a de I. Bicudo, que verteu os *Elementos* direto do grego para o português a partir da edição de Heiberg-Stamatis, da Editora Teubner, de Leipzig, 1969-1977 (EUCLIDES, 2009).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a08

concepções filosóficas da Academia. Em um trabalho posterior, Mueller (1981) reforça seu argumento analisando a estrutura dedutiva dos *Elementos* e sustentando que tal escolha teria se dado por uma economia na apresentação dos resultados e não por razões filosóficas, como tradicionalmente se interpretava. As motivações filosóficas de Euclides na sistematização dos seus resultados também foram questionadas por W. R. Knorr (1986). Para ele, o estímulo para a produção matemática na época vinha da tradição de resolução de problemas geométricos dos matemáticos gregos, sendo a sistematização e organização dos modos de resolução algo secundário na prática matemática do período de Euclides.

O objetivo deste artigo não é avaliar o grau de influência da filosofia platônica na construção dos *Elementos*. No entanto, há que se considerar que as construções filosóficas da época expressam valores e concepções que circulavam no ambiente intelectual grego e a elaboração dos *Elementos* se deu nesse contexto. Além disso, por só ter chegado até nós alguns fragmentos e poucas obras completas do período, temos sempre que lidar com a limitação de fontes imposta à história antiga, o que nos obriga a extrair o máximo possível dos clássicos. Se a justaposição dos clássicos é uma forma pouco precisa de análise do célebre livro de Euclides, tal recurso pode, por outro lado, ajudar na compreensão de seu conteúdo e auxiliar na diferenciação da Matemática antiga e moderna.

Na Modernidade, algumas concepções do platonismo, como o papel da Matemática na construção do conhecimento, ganharam outras interpretações. Nesse processo de reformulação do saber vindo da Antiguidade, conceitos fundamentais da Matemática, como o de número e o de medida, foram se modificando, e o pensamento sintético, que caracteriza as demonstrações nos *Elementos*, foi sendo substituído pelo raciocínio analítico. Nos moldes e funcionalidades que a Matemática ganhou no período moderno, o desenvolvimento da linguagem algébrica, que foi se impondo como a mais importante forma de expressão do pensamento matemático, contribuiu para dar maior operacionalidade aos novos conceitos e para a construção de modos de generalização aspirados pelo método analítico.

Por estarmos familiarizados com a linguagem algébrica, para facilitar nossa compreensão de alguma sentença da Matemática clássica, podemos ser levados a traduzi-la[2] para a notação algébrica atual. O objetivo deste artigo é mostrar como esse procedimento pode gerar interpretações equivocadas de alguns pressupostos da Matemática grega, além de

[2] Existem diversas formas de definir o que é uma tradução. Normalmente, essas definições são estabelecidas com ênfases diferentes em aspectos como precisão ou estilo, que devem guiar o ato de traduzir sentenças de um idioma para outro (RODRIGUES, 2000). Em nosso caso, a "tradução" a que nos referimos não possui, necessariamente, relação com as definições vindas do campo da linguística, mas apenas designa a expressão do conteúdo matemático de uma sentença em linguagem algébrica.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a08

ocultar questões filosóficas que, segundo algumas correntes historiográficas, influenciaram a sistematização dada por Euclides à Matemática apresentada em sua obra principal.

2 As noções de número e medida nos *Elementos*

A problematização da relação entre aritmética e geometria é um aspecto da Matemática grega muito explorado pela historiografia. Podemos dizer que vários caminhos seguidos na estruturação teórica dessa Matemática foram influenciados pelo anseio de estabelecer uma abordagem comum para o tratamento da aritmética, que operava com entes discretos, e da geometria, que lidava com o contínuo. O modelo de sistematização da Matemática apresentado por Euclides pode ser visto como uma forma de tratamento da aritmética e da geometria a partir de uma base conceitual única.[3] Para isso, foi necessário lidar com a questão da *incomensurabilidade*.

No contexto da Matemática grega, mensurar (ou medir) significa contar quantas vezes a unidade cabe numa dada grandeza. Na comparação entre grandezas de mesma espécie, se uma dada unidade couber (exatamente) um número inteiro de vezes em uma delas e, também, um número inteiro de vezes na outra, diz-se que essas grandezas são “medidas pela mesma medida”, ou que são comensuráveis. Como essa unidade de medida pode ser tomada tão pequena quanto necessário, parece plausível supor que quaisquer duas grandezas de mesma espécie sejam comensuráveis. No entanto, como sabemos, essa suposição não é verdadeira, pois existem grandezas incomensuráveis, ou seja, existem pares de grandezas que não podem ser medidas por uma mesma unidade, segundo essa noção de medir.[4] Esse fato representa um problema teórico a ser enfrentado, se o objetivo é construir uma abordagem comum para a aritmética e a geometria.[5]

---

[3] A busca da construção de uma teoria que relacionasse o discreto e o contínuo na Matemática grega tem sua origem mais conhecida nos trabalhos da escola pitagórica, que se iniciaram, segundo a cronologia tradicional, quase dois séculos antes de Euclides. Mas, ao contrário da estrutura apresentada nos *Elementos*, os pitagóricos buscaram dar à Matemática uma fundamentação aritmética. Segundo a tradição, dentro da filosofia pitagórica, essa questão adquiria um significado que ia muito além da Matemática. Estaria relacionada à hipótese metafísica que tomava o número como a unidade básica do universo. Como nosso foco é a Matemática presente nos *Elementos*, a discussão sobre a natureza da Matemática pitagórica e os aspectos filosóficos subjacentes foge do objetivo deste artigo. Para um aprofundamento nesse tema, sugerimos o livro *Lore and science in ancient pythagoreanism*, de W. Burkert (1972).

[4] Nos *Elementos*, Euclides estabelece, na definição 1 do Livro X, que: “Magnitudes são ditas comensuráveis as que são medidas pela mesma medida, e incomensuráveis, aquelas das quais nenhuma medida comum é possível produzir-se” (EUCLIDES, 2009, p. 353).

[5] Apesar de trabalhos importantes, como o apresentado por W. R. Knorr (1975) no livro *The evolution of Euclidean Elements*, relativizarem o impacto da descoberta da incomensurabilidade no desenvolvimento da Matemática grega, a consideração da existência de grandezas incomensuráveis traz dificuldades adicionais a um

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a08

A resposta moderna à questão da incomensurabilidade se desenvolveu com base na concepção dos irracionais como os números que expressam a medida de todos os segmentos incomensuráveis com um segmento unitário predeterminado. Medir passou a ser entendido como um processo realizável (teoricamente) em infinitas *etapas*, possibilitado por um conceito de número (real) que abarca os limites de sequências de racionais. No processo de medir, essas sequências são aproximações do comprimento de um segmento, cujo tamanho *exato* não pode ser alcançado por um número finito de etapas. Isso ilustra o fato de que a reconstrução por que passou a Matemática ao longo da Modernidade está associada a uma série de mudanças nas bases conceituais – e também nos critérios de rigor – da Matemática clássica. As novas teorias e ferramentas matemáticas surgidas a partir do período renascentista europeu foram acompanhadas, por diferentes motivos, de uma revisão dos fundamentos da Matemática antiga e de uma reestruturação desse campo do conhecimento em novas bases axiomáticas. Ao longo desse processo, ou mesmo em consequência dele, as noções de número e de medida sofreram significativas transformações.

Nos *Elementos*, a palavra número (*arithmós*) significa "número inteiro maior que um"[6] e representa uma "multiplicidade delimitada" de entes discretos, embora sempre simbolizados por um segmento de reta. Números são considerados quantidades distintas de grandezas (*mégethos*: grandeza, extensão, magnitude), que são entes contínuos. Para compreender melhor esse tipo de diferenciação, remetemo-nos a Aristóteles (Meta. 1020a):

> Uma quantidade é (1) uma pluralidade quando é numerável; (2) uma grandeza quando é mensurável. (1) Chama-se pluralidade o que se pode dividir em partes não contínuas; (2) chama-se grandeza o que é divisível em partes contínuas. Entre as grandezas, a que é contínua numa dimensão é comprimento; a que é contínua em duas dimensões é largura e a que é contínua em três dimensões é profundidade. Uma multiplicidade delimitada é um número, um comprimento delimitado é uma linha, uma largura delimitada é uma superfície e uma profundidade delimitada é um corpo (ARISTÓTELES, 2005, p. 231).

Euclides parece ter feito uma distinção similar entre números e grandezas – não necessariamente se valendo dessa definição da *Metafísica* –, visto que a abordagem dos teoremas que envolvem cada tipo de quantidade é feita de forma separada nos *Elementos*, mesmo quando expressam resultados aparentemente equivalentes. Isso se daria pelo fato de as

projeto que pretenda estruturar a Matemática na aritmética dos inteiros. Para uma síntese dos estudos que vêm desconstruindo toda uma mitologia surgida em torno desse tema – que já foi classificado como "escândalo lógico" pela historiografia tradicional –, ver o artigo de C. H. B. Gonçalves e C. Possani, "Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia antiga" (GONÇALVES; POSSANI, 2009).

[6] Para Euclides, a unidade não é, em si, um número. A unidade é o que compõe o número. A definição 2 do Livro VII estabelece que "número é a quantidade composta de unidades", sendo a unidade, conceituada na primeira definição do mesmo livro, como "aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma" (EUCLIDES, 2009, p. 269).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a08

proposições válidas para os números não poderem ser estendidas, automaticamente, para as grandezas, já que os números, para Euclides, "não são representações de outras coisas, são entidades em si, com características distintivas, definições etc." (UNGURU, 1979, p. 559, tradução nossa).

A ideia de razão é outra que possui significados distintos nas Matemáticas antiga e moderna. Diferentemente de como a concebemos hoje – ou seja, como um número –, razão entre grandezas é definida nos *Elementos* (definição 3 do Livro V) como "a relação de certo tipo concernente ao tamanho de duas magnitudes de mesmo gênero" (EUCLIDES, 2009, p. 205). Essa definição pouco clara de razão ganha maior significado nas relações de proporcionalidade. Na definição 6 do mesmo livro é dito que "magnitudes, tendo a mesma razão, sejam ditas em proporção" (Idem). Portanto, é estabelecendo se uma razão (*lógos*) está em proporção (*análogon*) com outra que o conceito adquire maior aplicabilidade na comparação entre grandezas. Contudo, por se estar lidando com entes contínuos, medidos apenas com o uso de um sistema numérico restrito aos inteiros, a incomensurabilidade traz, potencialmente, dificuldades adicionais a essas comparações.

No caso das razões entre números, por estes pertencerem a um domínio próprio, formado apenas por entes discretos, o estabelecimento de proporções não precisa considerar a incomensurabilidade.[7] Já para as razões entre grandezas, a matemática sistematizada nos *Elementos* faz uso de uma teoria das proporções, tradicionalmente atribuída a Eudoxo, que permitiu o estabelecimento de relações de proporção entre grandezas, independentemente da comensurabilidade entre elas.[8]

Euclides apresenta, na definição 5 do Livro V, a teoria eudoxiana das proporções nos seguintes termos:

---

[7] A definição 21 do Livro VII diz que: "Números estão em proporção, quando sejam o primeiro do segundo e o terceiro do quarto o mesmo múltiplo ou a mesma parte ou as mesmas partes" (EUCLIDES, 2009, p. 270).

[8] Segundo Knorr (1975), antes do surgimento dessa teoria das proporções, o tratamento das razões na Matemática grega era feito por um método denominado antifairese (*antyphairesis*), similar ao que hoje conhecemos por algoritmo euclidiano, que é usado para encontrar o máximo divisor comum entre dois números. A ideia da antifairese é que, dados dois números, subtrai-se, do maior, um múltiplo do menor, tal que o resto seja inferior ao menor dos dois números. Em seguida, subtrai-se, do número menor, um múltiplo do resto da primeira subtração, de modo a termos um novo resto menor que o anterior. Seguindo esse procedimento, sucessivamente, o último resto, não nulo, será o máximo divisor comum entre os dois números. A sequência de números utilizada para obter os múltiplos que geram os restos seria a antifairese da razão dos dois números. Procedimento análogo podia ser usado para a construção da antifairese de razões entre grandezas comensuráveis, mas, no caso de incomensurabilidade, o processo não teria fim. Apesar dessa limitação, de acordo com Knorr, esse método teria originado uma teoria das proporções presente na Matemática pré-euclidiana, que estabelecia que duas razões estão em proporção quando possuem a mesma antifairese (Ibid., p. 257). Fowler (1979, p. 808) vai além e afirma que essa teoria das proporções baseada na ideia de antifairese *gerou* a teoria eudoxiana presente nos *Elementos*. A teoria das proporções de Eudoxo teria feito, segundo Fowler, diminuir o interesse pela antifairese, o que afastou, ao longo da história da Matemática, sua conexão com o tratamento das razões (Ibid., p. 831).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a08

> Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando os mesmos múltiplos da primeira e da terceira ou, ao mesmo tempo, excedam ou, ao mesmo tempo, sejam iguais ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, tendo sido tomados correspondentes (EUCLIDES, 2009, p. 205).

Observe que o estabelecimento da relação de proporcionalidade entre grandezas pode ser feito sem qualquer referência à comensurabilidade ou à incomensurabilidade, mantendo a noção de número restrita aos inteiros positivos e sem estender a noção de medida à possibilidade de *infinitas etapas*.

Por ser uma definição mais longa e muito importante na estruturação dos *Elementos*, é comum, nos manuais de história da Matemática, essa teoria das proporções vir seguida de uma tradução do seu conteúdo utilizando-se operações e símbolos algébricos. Entendendo-se A, B, C e D como grandezas e m e n como números (inteiros maiores que 1), é dito que a grandeza A está para uma grandeza B (da mesma espécie de A) na mesma razão em que uma grandeza C está para uma grandeza D (da mesma espécie de C) se, sempre que $mA < nB$, se tenha $mC < nD$, sempre que $mA = nB$, se tenha $mC = nD$, e sempre que $mA > nB$, se tenha $mC > nD$. Para dizer que as grandezas estão em proporção usa-se, habitualmente, a notação $A : B = C : D$.

Essa tradução que, sem dúvidas, deixa o conteúdo da definição mais acessível a um leitor moderno, pode, igualmente, gerar interpretações equivocadas da mesma sentença dos *Elementos* que se deseja aclarar. Representar o múltiplo de uma grandeza por "*mA*", por exemplo, pode induzir a percepção de que Euclides está se referindo à operação de multiplicar um número pelo tamanho da grandeza (visto como outro número), o que se choca com a distinção, presente nos *Elementos*, entre quantidades contínuas e discretas.

Se estendermos a análise para o contexto filosófico da época, vemos, como mostrado por D. H. Fowler (1999) no livro *The mathematics of Plato's Academy*, que noções como "dobro", "dois" e "dualidade"; "triplo", "três" e "tríade" etc., estavam, obviamente, relacionadas, mas não pertenciam às mesmas categorias, por expressarem conceitos com graus distintos de abstração. Por exemplo, determinar o triplo de uma grandeza pode ser pensado como a obtenção de uma nova grandeza, de mesma espécie, na qual a original caiba, exatamente, três vezes. Isso não é o mesmo que multiplicar o número três pelo tamanho da grandeza que se deseja triplicar. As diferenças entre esses dois processos ficam mais bem marcadas quando analisamos essa outra passagem da *Metafísica*, em que Aristóteles define as "quantidades por si mesmas", caracterizadas em contraposição às "quantidades por acidente" (Meta. 1020a):

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a08

> (A) algumas coisas são ditas quantidades por si mesmas, (B) outras por acidente [...] Entre as quantidades por si, (a) algumas são assim por sua essência: a linha, por exemplo, é uma quantidade por si, porque a quantidade está incluída na noção que exprime a própria essência da linha (ARISTÓTELES, 2005, p. 231).

Nessa perspectiva, uma figura geométrica é a *própria extensão que ela ocupa*, não fazendo sentido, por exemplo, separar um quadrado da sua área, reduzindo-a a um número, como se faz atualmente.

Por fim, a notação “$A:B=C:D$” para expressar a proporcionalidade entre grandezas também pode induzir o leitor a equívocos. Na Matemática euclidiana é possível estabelecer uma igualdade entre números ou entre grandezas de mesma espécie, mas não relações diretas de igualdade entre razões, já que razões não expressam, propriamente, quantidades, mas comparações entre quantidades. Por esse motivo, como alertam Fowler (1979, p. 812) e Grattan-Guinness (1996, p. 361), o uso do símbolo “=” para expressar as relações de proporcionalidade pode levar a uma visão incorreta da natureza das razões nos *Elementos*, sendo preferível, para esses autores, a notação “$A:B::C:D$”.

3 Número e medida nas Matemáticas antiga e moderna

Do ponto de vista operacional, decorre da noção de número e de sua relação com a ideia de medir, presentes nos *Elementos*, que a comparação de grandezas, na forma de razão, é possível apenas entre aquelas de mesma espécie (homogeneidade de grandezas). Essa restrição foi descartada da Matemática moderna através da modificação das noções de número e de medida, o que tornou possível tratar uma razão entre grandezas, mesmo incomensuráveis, como número. Podemos hoje, por exemplo, pensar na razão entre a área de um sólido e seu volume, ou mesmo entre o número de habitantes de uma região e a área dessa região, utilizando a unidade “habitantes por quilômetro quadrado”. Essa razão, algumas vezes, ganha até um nome específico, passando a representar, por si mesma, uma outra grandeza (no sentido moderno do termo), como no caso da densidade populacional, do exemplo anterior, ou como acontece no conceito de velocidade média (variação de posição por unidade de tempo), densidade (massa por unidade de volume) etc.

Observemos, no entanto, que a ruptura com a homogeneidade de grandezas leva a uma situação logicamente problemática no contexto do pensamento matemático euclidiano. Suponhamos duas grandezas de mesma espécie *A* e *B*, tais que uma mesma unidade de medida caiba, exatamente, duas vezes em *A* e três vezes em *B*. Se *A* e *B* forem, por exemplo, dois segmentos de reta, um segmento com o triplo do tamanho de *A* é *exatamente igual* a um

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a08

segmento com o dobro do tamanho de *B*. Mas se *A* e *B* são grandezas de natureza distinta, ou se *A* é um número e *B* uma grandeza, por exemplo, *A* é o números de habitantes de uma cidade e *B* a área da região ocupada por essa cidade, não há sentido em concluir que o triplo da população é igual ao dobro da área! Dizer que a densidade populacional (em habitantes por quilômetro quadrado) de uma região é igual a $2/3$ requer não apenas classificar as razões entre inteiros como números (racionais), mas também incorporar uma abstração ao conceito de número que, no contexto dos *Elementos*, não faz sentido. Ou seja, entender razões como números permite o passo operacional mostrado no caso da densidade populacional, mas demanda mudanças nos pressupostos que estão na base da Matemática euclidiana.[9]

Para os defensores da influência da filosofia de Platão na construção dos *Elementos*, utilizar como base um conjunto numérico restrito aos inteiros positivos, os "números naturais" como diríamos hoje, tinha, para Euclides, objetivos que não se reduziam à operacionalidade da teoria apresentada. Para essa corrente historiográfica, o modelo axiomático da Matemática euclidiana, em consonância com o platonismo, se baseava em um sistema dedutivo que devia partir de noções elementares intuitivamente aceitas por qualquer pessoa (no caso dos *Elementos*, definições, postulados e noções comuns), mas exaustivamente avaliadas em sua validade, para, a partir daí, se construir uma cadeia segura de raciocínios.

Para Á. Szabó (1978), um representante dessa perspectiva historiográfica, como mostrado em seu livro *The beginnings of Greek mathematics*, a origem de tal concepção, que estrutura o pensamento hipotético-dedutivo característico da Matemática grega, seria o método dialético dos filósofos pré-socráticos da escola eleata. A influência da escola de Eleia estaria por trás do estabelecimento das duas principais particularidades da Matemática euclidiana: a rejeição ao empirismo e a valorização da prova formal (Ibid., p. 217).

Para subsidiar seu argumento, Szabó empreende um sofisticado estudo filológico,

[9] Apesar de haver a restrição referente à homogeneidade de grandezas, T. L. Heath (1908) aponta, nos comentários que introduziu em sua clássica tradução dos *Elementos* para o inglês, que Euclides teria cometido um "deslize" na abordagem das razões ao enunciar a proposição V.16, que diz: "Estejam as quatro magnitudes A, B, C, D em proporção, como a A para a B, assim a C para a D; digo que também estarão, alternadamente [em proporção], como o A para o C, assim o B para o D" (EUCLIDES, 2009, p. 221). O problema seria que para estabelecer a razão "A para B" é preciso que essas duas magnitudes sejam de mesma espécie. Para a razão "C para D" é necessário que estas sejam de mesmo tipo, mas não necessariamente do mesmo tipo que A e B. Desse modo, a conclusão, que levaria à equivalência das proporções A para C e B para D, poderia estar baseada na construção de razões entre magnitudes de naturezas distintas, o que contraria a necessária homogeneidade de grandezas. Referindo-se a uma tradução dos *Elementos* anterior à sua, elaborada por R. Simson, que teria feito um acréscimo ao enunciado de Euclides, Heath afirma que: "As quatro grandezas nesta proposição devem ser todas *do mesmo tipo*, e Simson insere 'do mesmo tipo' no enunciado" (HEATH, 1908, p. 165, grifo do autor, tradução nossa). Grattan-Guinness (1996, p. 369) relativiza esse possível problema lógico nos *Elementos*, afirmando que os usos posteriores que Euclides faz dessa proposição não envolvem a possibilidade de construção de razões entre grandezas de natureza distinta.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a08

mostrando como diversos termos usados na Matemática grega foram apropriados da filosofia eleata, especialmente pelos filósofos ligados à Academia de Platão. A tese principal do livro é a de que o resultado mais importante dessa influência eleata na Matemática seria o estabelecimento do princípio do terceiro excluído – que teria se originado da distinção parmenídica entre o Ser e o Não-Ser – o que contribuiu na validação das provas indiretas na Matemática. Esse fato explicaria a aceitação de um critério negativo para se chegar a uma verdade, dado que, nessa perspectiva, é possível provar que uma sentença é falsa se suas consequências levarem a uma contradição (Ibid., p. 243).[10]

I. Bicudo (1998), em seu artigo "Platão e a Matemática", concorda com essa conclusão de Szabó quanto à origem do processo de axiomatização da Matemática grega, mas afirma que essa influência eleata não seria o bastante para explicar a concentração de esforços da escola platônica no enfrentamento das dificuldades teóricas que a realização desse projeto de axiomatização impõe. Segundo Bicudo, isso se deu por Platão ter eleito a dialética

> a mais importante das ciências, a única "não hipotética". Enquanto as ciências, em particular a matemática, têm "hipóteses" como pontos de partida, e vão dessas, em movimento descendente, à dedução de suas conseqüências, a dialética, tendo pronta tal estrutura das ciências (especialmente da matemática, que é uma propedêutica a ela) parte, em movimento ascendente [...], até alcançar, se possível, o fundamento incondicional e perfeitamente seguro a que se aspira. Tal escalada fica facilitada, se feita a partir de uma axiomatização das ciências. É isso, afigura-se-nos, que fixa a axiomatização da matemática como um projeto da Academia e que redunda no caráter básico dessa ciência (Ibid., p. 302).

Nessa perspectiva, esse novo papel dado à Matemática e à dialética teria demandado uma fundamentação de ambas a partir de uma ligação estrutural. No estudo filológico de Szabó, é apontado um exemplo interessante desse processo ao analisar o uso da palavra "hipótese", que teria, tanto na dialética como na Matemática, pelo menos no sentido dado por Platão[11], a noção de ponto de partida que não precisa ser demonstrado, mas que os participantes do debate aceitam para iniciar a argumentação com o objetivo de provar (ou contestar) alguma afirmação. Segundo Szabó:

> Não é simples acidente que os comentários de Platão sobre *hypotheseis* frequentemente contêm referências à geometria ou à matemática em geral. Ele defendia a ideia de que os argumentos

---

[10] Essa tese de Szabó é contestada por K. Berka (1980), em seu artigo "Was there an Eleatic background to pre-Euclidean mathematics?". A interpretação de que haveria uma prioridade da lógica sobre o desenvolvimento da Matemática euclidiana, além de carecer de fontes que permitam estabelecer uma cronologia confiável das escolas filosóficas gregas, surgiria, para Berka, de uma confusão entre o que pode ser chamado de "lógica do pensamento" e de lógica como uma ciência. A lógica como ciência se originaria de uma análise metódica das formas lógicas – que gerou sua posterior sistematização por Aristóteles. Já a "lógica do pensamento" pode ter base na intuição empírica, como ocorreria, por exemplo, na percepção do princípio de contradição, que não requer nenhuma elaboração de uma teoria da lógica para se estabelecer. Por esse motivo, não seria uma condição necessária que exista uma lógica estruturada para que o uso prático de provas indiretas se imponha.

[11] O sentido que Platão dá à "hipótese" seria análogo ao que hoje, na Matemática, atribuímos ao postulado ou axioma.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a08

> dialéticos deveriam se conformar aos altos padrões estabelecidos pelos métodos da matemática. Numa conversa comum, um argumento inconclusivo, no máximo considerado plausível, pode ser suficiente para resolver o tema em questão. Os matemáticos, no entanto, não aceitam esse tipo de argumento; eles se preocupam apenas com provas convincentes e essa preocupação se reflete na maneira de selecionar e lidar com *hypotheseis* (SZABÓ, 1978, p. 238, grifo do autor, tradução nossa).

Assim, enquanto para os eleatas uma hipótese era uma suposição tomada para uma situação particular, para dar início a uma argumentação com um propósito presente, para Platão ela deveria ser o produto de uma intensa análise, que resultasse em suposições iniciais aceitas por qualquer interlocutor e que fossem corretas não apenas para um caso singular. O resultado desse esforço seria a produção de uma argumentação sólida, que leva a conclusões verdadeiras. Podemos ver essa perspectiva expressa em uma passagem do *Fédon* (107b)[12]:

> "Mas", disse Símias, "também eu não vejo mais nenhuma margem para dúvida diante do resultado de nossa discussão. Entretanto, ante a grandeza da matéria e minha baixa estima das fraquezas humanas, não posso evitar ainda alimentar algumas apreensões pessoais em relação ao que foi dito".
> "Não só isso, Símias", disse Sócrates, "como também nossas primeiras hipóteses devem ser submetidas a um exame mais cuidadoso, ainda que te pareçam convincentes. E se as analisares adequadamente, acompanharás, segundo penso, o argumento, dando a ele assentimento, tanto quanto é possível a alguém fazê-lo; e, sendo clara a conclusão, não irás mais adiante na busca" (PLATÃO, 2008, p. 264).

Quanto mais inquestionáveis forem essas premissas – estabelecidas de forma clara, após um *exame cuidadoso* –, mais indubitáveis serão as conclusões derivadas delas por um processo lógico-dedutivo.[13] Assim, dessa perspectiva historiográfica que coloca em relevo o platonismo na estruturação dos *Elementos*, o modelo euclidiano de Matemática estaria em consonância com a filosofia da Academia, ao partir de noções básicas e das formas elementares idealizadas da geometria, que, em princípio, seriam aceitas por qualquer um como verdadeiras.[14] A noção de número limitada aos inteiros[15] também cumpriria função

[12] O tema das hipóteses também é abordado por Platão (2006, p. 203) no Livro IV da *República* (437a) e no *Crátilo* (436d) (PLATÃO, 2010, p. 130).
[13] É interessante notar que essa é uma perspectiva que se perdeu na Matemática moderna. Diferentemente do que ocorre nos *Elementos*, poderíamos dizer que alguns axiomas que fundamentam a Matemática atual seriam "menos óbvios" que muito do que podemos demonstrar a partir deles.
[14] Nos postulados do Livro I, Euclides enuncia as regras para construção das figuras que serão consideradas nos *Elementos*. Na prática, o método denominado "construção por régua e compasso", impõe que todas as figuras sejam construtíveis por meio de retas e círculos definidos de modo abstrato, o que sempre gerou especulações de ordem filosófica a respeito das motivações de Euclides ao estabelecer essas restrições. Há um importante debate na historiografia da Matemática a respeito desse tema, bem sintetizado no artigo de G. Schubring e T. Roque, "O papel da régua e do compasso nos Elementos de Euclides" (SCHUBRING; ROQUE, 2014).
[15] A própria exclusão da "unidade" do conceito de número seria, segundo Szabó (1978), um exemplo dessa perspectiva platônica da Matemática, construída por influência da escola eleata. O "um" estaria associado à ideia de Uno que, dentro da metafísica eleata, deveria ser indivisível. Do ponto de vista lógico, um estímulo à manutenção da indivisibilidade do "um" dentro da Matemática seria afastar os problemas levantados pelos conhecidos paradoxos enunciados por Zenão, não por acaso, um membro da escola de Eleia. Na perspectiva platônica, a Matemática "desejava excluir a possibilidade de que o um viesse a ser qualquer coisa diferente de si mesmo, isto é, de que pudesse vir a ser muitos. […] Se o *um* fosse divisível, não mais seria um, mas *muitos*"

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a08

semelhante, por possuir uma ligação mais direta com o mundo empírico, sendo *concretizada* através de uma representação geométrica (segmentos múltiplos de um segmento unitário). As formas da geometria, apreensíveis apenas pelo pensamento, podem ser *aproximadas* por suas representações sensíveis, estabelecendo, assim, a diferença (e a relação) entre o mundo inteligível e o mundo sensível, que fundamenta a ontologia de Platão.[16]

4 Uso da álgebra simbólica moderna na tradução de sentenças dos *Elementos*

Nas seções anteriores, além de abordar certas questões filosóficas que poderiam ter influenciado, em alguma medida, a fundamentação do livro de Euclides, argumentamos que, na transição da Matemática clássica para a moderna, noções elementares, como a de número e de medida, foram alteradas. Com isso, a questão da incomensurabilidade recebeu, no período moderno, uma abordagem numérica, através da associação de qualquer razão a um número real.

Essas transformações abriram a possibilidade de expressar em termos numéricos uma série de conceitos fundamentais para a Matemática atual, como os de função, limite, derivada etc. Entretanto, é necessário observar que trabalhar, na geometria de hoje, com os números reais representando as grandezas contínuas e suas razões, exige, muitas vezes, problematizar os casos de incomensurabilidade. A resposta moderna veio junto com a ideia de *medir em infinitas etapas*, o que levou à incontornável incorporação de processos infinitos à noção de número (real).

Outra característica importante da Matemática moderna é a sua expressão através da álgebra simbólica. A possibilidade de estabelecer regras gerais de manipulação dos símbolos, representando quantidades numéricas desconhecidas ou variáveis, deu maior liberdade operacional aos procedimentos matemáticos. Como afirma J. Dieudonné, em seu livro *A formação da matemática contemporânea*, a demanda sobre o desenvolvimento da Matemática no período moderno "levou a reconhecer a necessidade de uma *estenografia* que tornasse

---

(Ibid., p. 259, grifo do autor, tradução nossa). O esforço despendido em preservar a unidade afastada do mundo dos números, o que, na estruturação dos *Elementos*, obrigou Euclides a elaborar demonstrações separadas para o caso em que a unidade figure entre as quantidades consideradas, só se justificaria, para Szabó, por essa questão filosófica. Um exemplo disso, seria a demonstração da proposição VII.9, que estabelece a regra para proporção entre quatro números, o que demandou a construção da proposição VII.15, que traz um resultado similar, mas para o caso da unidade estar no lugar de um desses números.

[16] Essa discussão sobre o papel do número e sua ligação com a geometria na filosofia de Platão é interessante, mas transcende o objetivo deste texto. Para um melhor entendimento dessa questão, sugerimos a leitura do artigo "A natureza dos números na *República* de Platão", de A. B. Araújo Jr. (2010).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a08

compreensível a série de operações sem esforço" (DIEUDONNÉ, 1990, p. 63, grifo do autor).

Por estarmos habituados à linguagem e ao modelo de raciocínio matemático atual, não é incomum, para facilitar a compreensão de algum enunciado da Matemática clássica, a tradução da sentença para a linguagem algébrica moderna. Porém, mais que uma nova notação que simplifica certos procedimentos matemáticos, a introdução dos símbolos e das regras da álgebra demandou uma reelaboração profunda dos fundamentos da Matemática antiga. Por esse motivo, o uso da linguagem algébrica para traduzir proposições da Matemática clássica pode levar a interpretações equivocadas das bases do pensamento grego e da estrutura conceitual subjacente aos *Elementos*.

Um exemplo de equívoco que esse procedimento pode gerar é o que frequentemente ocorre quando analisamos enunciados da geometria clássica que envolvem proporções entre grandezas. A utilização da linguagem algébrica atual, nesses casos, pode ocultar o significado do processo de comparação entre grandezas que caracteriza tais proposições. Nos *Elementos*, ao invés de se estabelecer uma propriedade específica de um objeto geométrico, enuncia-se uma propriedade comum entre esse objeto e algum outro, utilizado como termo de comparação. Assim, ao se deparar com uma sentença, como a expressa por Euclides (2009, p. 124) na proposição I.35, que diz que "paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si", um leitor moderno pode questionar: mas por que não é dito logo que a área de um paralelogramo é o produto do comprimento da sua base pelo comprimento da sua altura? Ou, de forma mais concisa, que $A = b \times h$?

Essa indagação surge, a nosso ver, de uma compreensão limitada dos pressupostos e dos problemas enfrentados na formalização da Matemática grega. O método de comparação entre grandezas, potencializado pela teoria das proporções de Eudoxo, que, a um leitor atual, pode fazer soarem redundantes determinadas proposições, na verdade, permitiu que a Matemática clássica, valendo-se de um corpo conceitual mais simples, viesse a se estruturar em bases lógicas tão rigorosas, para a época, quanto são as da Matemática moderna para nós.

O estabelecimento de fórmulas algébricas na geometria, mesmo uma aparentemente simples como a que fornece a área de um paralelogramo, envolve considerações não triviais a respeito da comensurabilidade das grandezas envolvidas (LIMA, 1991). Além disso, operar com letras simbolizando um valor numérico requer outras reestruturações nas bases da Matemática herdada da Antiguidade clássica, além do conceito de número e de medida.

O uso da linguagem algébrica só se impôs com o desenvolvimento e a validação de um tipo de raciocínio que foi substituindo, paulatinamente, o pensamento sintético que caracterizava a Matemática grega: o raciocínio analítico. No caso dos *Elementos*, a introdução

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a08

de incógnitas para representar certas grandezas referidas nas proposições, não só oculta as diferenças entre os sistemas numéricos das Matemáticas antiga e moderna, mas pode também induzir a crença de que o raciocínio seguido na demonstração de um teorema na geometria atual seria aceito como válido na Matemática euclidiana.[17] Uma das características dos *Elementos* é o raciocínio sintético utilizado na demonstração dos teoremas. Na síntese, construímos uma solução por meio das consequências das suposições iniciais dadas. Já pelo modelo analítico, segundo B. Russell, avançamos

> para a abstração e a simplicidade lógica sempre maiores; em vez de indagar o que pode ser definido e deduzido daquilo que se admita para começar, indaga-se que mais idéias e princípios gerais podem ser encontrados, em função dos quais o que fora o ponto de partida possa ser definido ou deduzido (RUSSEL, 1981, p. 9).

No raciocínio analítico atual, que foi se impondo ao sintético na Matemática formal a partir do Renascimento europeu, uma incógnita é introduzida para representar uma solução que se supõe existente e, através das operações algébricas que regulam a manipulação dos símbolos, chega-se a um resultado que determina a solução. Essa forma tão característica de expressar o raciocínio matemático hoje em dia foi primeiramente sistematizada por F. Viète, mas só se estabeleceu definitivamente dentro da Matemática ao longo da Modernidade, com mudanças nos critérios de rigor e com o gradativo afastamento entre as operações quantitativas e suas representações geométricas.

Esse processo de introduzir letras para representar grandezas desconhecidas e operar com elas sem questionar sua condição de existência foi chamado por Viète de *Logistica Speciosa*. Contudo, de acordo com o modelo proposto por esse matemático do século XVI, ainda seria necessário validar a solução analítica pela construção[18] da resposta encontrada, ou seja, mesmo nas origens da álgebra, o pensamento sintético dos *Elementos* ainda se impunha como a forma segura de raciocínio.[19]

Outro aspecto importante, já tratado na seção anterior, é que a estruturação da Matemática euclidiana sobre definições, postulados e noções comuns, que partem, na maioria das vezes, da intuição geométrica mais elementar, seria, para correntes historiográficas mais tradicionais, fruto de demandas da filosofia antiga, que também foram se perdendo no período

[17] Como afirma Schubring (2008, p. 4, tradução nossa): “Enquanto a matemática dos 'antigos' tratava cada caso separadamente e de forma independente, sem procurar padrões comuns, o método analítico visava à generalidade. Aquilo que, para os modernos, eram apenas variações da mesma propriedade, para os gregos eram novos casos, devido à posição diferente de alguma reta em uma figura”.
[18] Para uma visão crítica da questão da construtibilidade na Matemática antiga e suas relações com o pensamento sintético, sugerimos o artigo de Knorr (1983), “Construction as existence proof in ancient geometry”.
[19] A respeito da transição do pensamento sintético ao analítico na Matemática, ver o livro de H. J. M. Bos (2001), *Redefining geometrical exactness*, e o capítulo do livro *Analysis and synthesis in mathematics* escrito por M. Panza (1997), *Classical sources for the concepts of analysis and synthesis*.

moderno. No contexto da elaboração dos *Elementos*, a noção de verdade corrente postulava a existência de uma realidade independente do pensamento, que poderia ser conhecida e descrita pela adequação deste, ou da linguagem que o expressa, a essa realidade que se pretende descrever.

Como mostra A. O. Lovejoy (2005), em seu livro *A Grande Cadeia do Ser e do Conhecer*, uma concepção comum em toda pré-modernidade é a existência de um "isomorfismo" entre a realidade e o conhecimento. Haveria na constituição do Cosmo e do conhecimento hierarquias equivalentes que ordenam a existência e estabelecem a direção do processo de formação dos indivíduos e os caminhos da filosofia. Nessa perspectiva, entender os processos do conhecimento é entender a constituição do próprio Ser. O rompimento com essa "Grande Cadeia do Ser e do Conhecer" seria, em relação ao conhecimento, uma das principais características do pensamento moderno.

A promessa de emancipação, vinda com a Modernidade, quebrou as hierarquias que fundamentavam a visão de mundo pré-moderna e que estruturavam a noção de uma "Grande Cadeia do Ser e do Conhecer", promovendo, na filosofia, um progressivo distanciamento entre a Ontologia e a Epistemologia – entre o Ser e o Conhecer. Esse processo, que pode ser ilustrado pela terminologia kantiana apresentada na *Crítica da Razão Pura*, criou uma separação entre esses dois campos, ao estabelecer a impossibilidade do conhecimento das "coisas em si" – dos *númenos* –, mas apenas do modo como a realidade aparece ao sujeito do conhecimento – os *fenômenos* (KANT, 2001).

A fundamentação da Matemática moderna, ocorrida na segunda metade do século XIX, se deu permeada por essa outra perspectiva da realidade. O papel ontológico que a geometria desempenhava na filosofia antiga, por exemplo, foi se perdendo no decorrer desse processo. Nesse novo contexto, um critério de verdade corrente permitia sustentar que a veracidade de uma sentença não pressupõe uma relação direta a um fato da realidade, mas sim que essa sentença seja coerente com um conjunto de hipóteses ou crenças que fazem parte de um sistema.[20]

Essa perspectiva pode ser percebida na Matemática através do modelo axiomático expresso nas geometrias não-euclidianas, que substituiu categorias como "autoevidência" e "veracidade" pela noção de "consistência interna". Essa mudança colocou a Matemática em

[20] Nossa intenção é apenas pontuar que é possível pensar as construções teóricas de um período, analisando a noção de verdade cultivada em uma dada época, seja ela consciente ou não. A natureza da verdade, e as diferentes formas de categorizá-la, é um tema amplo que não seria possível tratar aqui. Para uma visão dessa problemática, sugerimos o livro editado por M. P. Lynch (2001), *The nature of truth*, que consiste numa coletânea de textos de importantes nomes que moveram esse debate.

bases teóricas muito distintas da perspectiva clássica, ao relativizar noções como ponto, reta, plano etc., que passaram a ser caracterizadas a partir de propriedades formais e não mais pela relação que possuíam com suas representações sensíveis. Esse passo tem um significado filosófico profundo, já que a geometria clássica forneceria, na perspectiva de Platão, um modelo de raciocínio superior construído sobre as bases seguras da realidade mais elementar, condensada em seus axiomas. Tal modelo foi usado, dentre outras coisas, para refutar a própria ideia de estabelecer conclusões a partir da coerência conceitual, ao invés de buscar os fundamentos da realidade, como podemos ver nessa passagem do diálogo *Crátilo* (436b-e), em que Sócrates analisa a relação entre as *coisas que são* e seus nomes:

> Sócrates: Está claro que o primeiro a estabelecer nomes os estabeleceu em consonância com sua concepção de natureza das coisas. É essa a nossa opinião, não é?
> Crátilo: Sim.
> Sócrates: Ora, supondo que sua concepção estivesse incorreta e tendo ele estabelecido os nomes conforme sua concepção, o que imaginas que acontecerá a nós que o tomamos como nosso orientador? Não seremos enganados?
> Crátilo: Bem, Sócrates, com certeza não é o caso. Aquele que estabeleceu, que atribuiu os nomes necessariamente conhecia as coisas que estava nomeando. Caso contrário, como venho dizendo reiteradamente, não seriam, de modo algum, nomes. Ademais, há uma prova peremptória de que o nomeador não perdeu de vista a verdade, prova que tens que aceitar, nomeadamente: seus nomes são universalmente *coerentes entre si*. Ou não notaste que todos os nomes que pronuncias foram formados com base no mesmo método e visando o mesmo objetivo?
> Sócrates: Isso não constitui, contudo, uma contra-argumentação, caro Crátilo. De fato, se o nomeador cometeu um erro no início e, na sequência, impôs aos outros nomes uma coerência com seu próprio erro inicial, nada há de estranho nisso. É precisamente o que ocorre às vezes nas construções geométricas; o erro inicial é pequeno e passa despercebido, mas todas as muitíssimas deduções estão *erradas*, *embora coerentes*. A conclusão é que todos os homens devem devotar grande cuidado e muita atenção ao início de qualquer empreendimento, de modo a *apurar se seu fundamento está correto ou não*. Se a isso for dedicado o devido cuidado, as etapas subsequentes se seguirão com clareza (PLATÃO, 2010, p. 129-130, grifo nosso).

Na Matemática contemporânea, erigida sobre outros pressupostos – inclusive esses rejeitados por Platão –, foi sendo construído um novo arcabouço conceitual, em alguma medida coerente com perspectivas filosóficas surgidas na Modernidade. No caso da geometria, nas palavras de Dieudonné (1990, p. 55): "essa dissociação do sentido e do nome concretiza [...] o processo fundamental que libertou a Matemática das amarras que a ligavam excessivamente ao real". Já a álgebra, que era tida como uma espécie de aritmética simbólica, ganhou novas interpretações com a emergência das estruturas algébricas, desatrelando-se os procedimentos algébricos dos seus significados estritamente aritméticos. A álgebra abstrata surgida desse processo respondia ao ideal de generalização e de abstração cada vez maior que caracteriza a Matemática formal do século XX.

Todas essas mudanças promoveram uma ruptura com alguns alicerces da geometria herdada dos gregos, conforme mostrado por D. Hilbert (2003), que apresenta, em sua obra

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a08

Fundamentos da geometria, a estruturação desse campo nas novas bases e perspectivas teóricas. Nas palavras de I. Mueller, que contrasta essas duas formas de se conceber os fundamentos da Matemática em seu livro *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*:

> De todas as diferenças entre a matemática grega e a moderna, a mais fundamental se refere ao papel da geometria em cada uma delas. Pode-se dizer que a história da matemática do século XIX é a história da substituição da geometria pela álgebra e pela análise. Não há verdade geométrica que não tenha uma representação não geométrica, normalmente muito mais compacta e útil. De fato, muitos matemáticos preferem dizer que a geometria tradicional é simplesmente uma interpretação de certas partes da álgebra moderna. [...] As diferenças entre as geometrias de Hilbert e de Euclides se originam de um contraste fundamental entre o papel dominante da estrutura na matemática moderna e sua virtual ausência na matemática antiga (MUELLER, 1981, p. 1-ix, tradução nossa).

Todas essas diferenças entre as Matemáticas antiga e moderna devem ser levadas em consideração ao analisarmos as bases e a organização dos *Elementos*, além da forma das proposições que o compõem. A introdução de símbolos e fórmulas da álgebra moderna na tradução de seus enunciados pode ofuscar não só as diferenças no conceito de número e de medida, mas também nos critérios de rigor e de verdade que, segundo as linhas historiográficas mais tradicionais, estariam por trás da Matemática euclidiana e que seriam frutos de demandas muito distintas daquelas requeridas da Matemática na Modernidade.

5 Considerações finais

Introduzir uma letra do alfabeto para representar uma quantidade desconhecida ao resolver um problema matemático é uma das habilidades básicas que um estudante deve adquirir em seus primeiros contatos com a álgebra na escola atual. Esse ato, que pode simplificar a análise e a resolução de um problema, traz uma série de pressupostos conceituais e posições filosóficas, normalmente invisíveis a quem manipula os símbolos algébricos. Neste artigo, mostramos como desconsiderar tais pressupostos e estender os procedimentos modernos para outras Matemáticas – no caso estudado, a parte da Matemática grega expressa nos *Elementos* – pode levar a uma leitura anacrônica da história da Matemática e a uma visão equivocada dos caminhos seguidos pelos matemáticos do passado.

Finalizando, se faz necessário levantar um aspecto não abordado da ideia de se interpretar a Matemática antiga associando-a a um possível pensamento algébrico. Há autores que conjecturam a existência de uma "álgebra geométrica" direcionando a construção dos enunciados e demonstrações na Matemática clássica. Essa hipótese, aplicada à interpretação da linguagem geométrica que caracteriza as sentenças de um livro como os *Elementos* e dos

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a08

caminhos seguidos na estruturação lógica de suas proposições, gerou um acalorado debate, que se intensificou na segunda metade da década de 1970.

A ideia da existência de uma "álgebra geométrica" na Matemática grega teria sua origem em trabalhos publicados pelos pesquisadores P. Tannery e H. G. Zeuthen em fins do século XIX e começo do XX – tendo sido essas teses promovidas, sobretudo, nas obras de O. Neugebauer –, em que se interpretam fragmentos de textos da Matemática babilônica como resultados algébricos expressos em linguagem geométrica. Como há uma hipótese historiográfica que sugere que a Matemática produzida na Babilônia teve influência nos primórdios da Matemática grega, seria razoável considerar que tais concepções geométricas a respeito dos procedimentos algébricos pudessem estar presentes, igualmente, na posterior sistematização da Matemática na Grécia antiga.

Alguns pesquisadores, como Szabó (1978)[21] e Knorr (1975) já vinham questionando essa ilação e também a ideia de existir uma "álgebra geométrica" entre os gregos, mas o debate assumiu seu período de maior efervescência com a publicação do artigo de S. Unguru (1975), *On the need to rewrite the history of Greek mathematics*. Um dos alvos da crítica desse trabalho é um livro do matemático B. L. van der Waerden (1961), *Science awakening*, no qual o pensamento matemático grego é descrito como um pensamento algébrico em "roupagem geométrica". Waerden (1976) publica uma resposta, seguida de mais dois artigos de conhecidos matemáticos que saem em sua defesa: H. Freudenthal (1977) e A. Weil (1978). A tréplica de Unguru (1979) fecha a primeira fase dessa contenda, que se desenrolou ao longo da década seguinte e ainda continua viva na historiografia da Matemática.[22]

Referências

ARAÚJO Jr., A. B. de. A natureza dos números na *República* de Platão. **Kriterion**, Belo Horizonte, v. 51, n. 122, p. 459 - 471, jul./dez. 2010.

ARISTÓTELES. **Metafísica**. Trad. Marcelo Perine. São Paulo: Edições Loyola, 2005.

BERGGREN, J. L. History of Greek mathematics: a survey of recent research. **Historia Mathematica**, London/New York, v. 11, n. 4, p. 394-410, nov. 1984.

BERKA, K. Was there an Eleatic background to pre-Euclidean mathematics? In: HINTIKKA, J.; GRUENDER, D.; AGAZZI, E. (Ed.). **Pisa Conference Proceedings**: volume 1. Dordrecht/Boston: D.

[21] A primeira edição do livro de Szabó é de 1969.
[22] Para uma síntese desse debate, e de sua evolução, ver os artigos: "History of Greek mathematics: a survey of recent research", de Berggren (1984), "Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid's Elements: how did he handle them?", de Grattan-Guinness (1996), "The debate on a 'geometric algebra' and methodological implications", de Schubring (2008) e "What is 'geometric algebra', and what has it been in historiography?", de Høyrup (2017).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a08

Reidel Publishing Company, 1980. p. 125-131.

BICUDO, I. Platão e a matemática. **Letras Clássicas**, São Paulo, n. 2, p. 301-315, 1998.

BOS, H. J. M. **Redefining geometrical exactness**: Descartes' transformation of the early modern concept of construction. New York: Springer-Verlag, 2001.

BURKERT, W. **Lore and science in ancient pythagoreanism**. Cambridge: Harvard University Press, 1972.

DIEUDONNÉ, J. **A formação da matemática contemporânea**. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1990.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FOWLER, D. H. Ratio in early Greek mathematics. **Bulletin (new series) of the American Mathematical Society**, Providence, v. 1, n. 6, p. 807-846, nov. 1979.

FOWLER, D. H. **The mathematics of Plato's Academy**: a new reconstruction. New York: Oxford University Press, 1999.

FREUDENTHAL, H. What is algebra and what has it been in history? **Archive for History of Exact Sciences**, New York, v. 16, n. 3, p. 189-200, set. 1977.

GONÇALVES, C. H. B.; POSSANI, C. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia antiga. **Revista Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n. 47, p. 16-24, dez. 2009.

GRATTAN-GUINNESS, I. Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid's Elements: how did he handle them?. **Historia Mathematica**, London/New York, v. 23, n. 4, p. 355-375, nov. 1996.

HEATH, T. L. **The thirteen books of Euclid's Elements**: volume II (books III-IX). Cambridge: Cambridge University Press, 1908.

HILBERT, D. **Fundamentos da geometria**. Lisboa: Gradiva, 2003.

HØYRUP, J. What is "geometric algebra", and what has it been in historiography? **AIMS Mathematics**, v. 2, n. 1, p. 128-160, mar. 2017.

KANT, I. **Crítica da Razão Pura**. Trad. Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

KNORR, W. R. **The evolution of the Euclidean Elements**: a study of the theory of incommensurable magnitudes and its significance for early Greek geometry. Dordrecht/Boston: D. Reidel Publishing Company, 1975.

KNORR, W. R. Construction as existence proof in ancient geometry. **Ancient Philosophy**, Pittsburgh, PA, n. 3, p. 125-148, 1983.

KNORR, W. R. **The ancient tradition of geometric problems**. New York: Dover Publication, 1986.

LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria**: comprimento, área, volume e semelhança. Rio de Janeiro: SMB, 1991.

LOVEJOY, A. O. **A grande cadeia do Ser**. São Paulo: Palíndromo, 2005.

LUCAS, J. R. Plato and the axiomatic method. In: LAKATOS, I. (Ed.). **Problems in the philosophy of mathematics**. Amsterdam: North-Holland, 1967. p. 11-14.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a08

LYNCH, M. P. (Ed.). **The nature of truth**: classic and contemporary perspectives. Cambridge: The MIT Press, 2001.

MUELLER, I. Euclid’s Elements and the Axiomatic Method. **The British Journal for the Philosophy of Science**, Oxford, v. 20, n. 4, p. 289-309, dez. 1969.

MUELLER, I. **Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements**. Cambridge: The MIT Press, 1981.

PANZA, M. Classical sources for the concepts of analysis and synthesis. In: OTTE, M.; PANZA, M. (Ed.). **Analysis and synthesis in mathematics**: history and philosophy. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1997. p. 365-413.

PLATÃO. **A República (ou da justiça)**. Trad. Edson Bini. Bauru, SP: EDIPRO, 2006.

PLATÃO. Fédon (ou da alma). In: PLATÃO. **Diálogos III**. Trad. Edson Bini. Bauru, SP: EDIPRO, 2008.

PLATÃO. Crátilo (ou da correção dos nomes). In: PLATÃO. **Diálogos IV**. Trad. Edson Bini. Bauru, SP: EDIPRO, 2010.

RODRIGUES, C. C. **Tradução e diferença**. São Paulo: Editora UNESP, 2000.

RUSSELL, B. **Introdução à filosofia da matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

SCHUBRING, G. The debate on a “geometric algebra” and methodological implications. In: CANTORAL, R. et al. (Org.). **Proceedings of HPM 2008, The Satellite Meeting of ICME**: history and pedagogy of mathematics. Ciudad de México, 2008.

SCHUBRING, G.; ROQUE, T. O papel da régua e do compasso nos Elementos de Euclides: uma prática interpretada como regra. **História Unisinos**, São Leopoldo, RS, v. 18, n. 1, p. 91-103, jan./abr. 2014.

SZABÓ, Á. **The beginnings of Greek mathematics**. Dordrecht/Boston: D. Reidel Publishing Company, 1978.

UNGURU, S. On the need to rewrite the history of Greek mathematics. **Archive for History of Exact Sciences**, New York, v. 15, n. 1, p. 67-114, mar. 1975.

UNGURU, S. History of ancient mathematics: some reflections on the state of the art. **Isis**, Chicago, v. 70, n. 4, p. 555-565, dez. 1979.

WAERDEN, B. L. van der. **Science awakening**. New York: Oxford University Press, 1961.

WAERDEN, B. L. van der. Defence of a “shocking” point of view. **Archive for History of Exact Sciences**, New York, v. 15, n. 3, p. 199-210, set. 1976.

WEIL, A. Who betrayed Euclid? **Archive for History of Exact Sciences**, New York, v. 19, n. 2, p. 91-93, jun. 1978.

Submetido em 13 de Outubro de 2017.
Aprovado em 26 de Março de 2018.