



Bolema: Boletim de Educação Matemática

ISSN: 0103-636X

ISSN: 1980-4415

UNESP - Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Pesquisa; Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Morales, Hernán

Influencia de un Proceso de Formación de Profesores en el Sistema de Enseñanza del Concepto de Área en Estudiantes de Pedagogía en Matemáticas, un Estudio de Caso

Bolema: Boletim de Educação Matemática, vol. 32, núm. 62, 2018, pp. 1050-1067

UNESP - Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Pesquisa; Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

DOI: 10.1590/1980-4415v32n62a15

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291265266016>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org  
UAEM

Sistema de Información Científica Redalyc  
Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal  
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

# Influencia de un Proceso de Formación de Profesores en el Sistema de Enseñanza del Concepto de Área en Estudiantes de Pedagogía en Matemáticas, un Estudio de Caso

## Influence of the Teachers' Training Process in the Area Concept Teaching System in Mathematics Pedagogy Students, a Case Study

Hernán Morales\*

 ORCID iD 0000-0002-9683-0927

### Resumen

En el proceso de formación de profesores de educación media en matemáticas, que se desarrolla en la Universidad Católica de la Santísima Concepción (UCSC), en la ciudad de Concepción, Chile, nos ha interesado observar el proceso de modificación del sistema de enseñanza de matemáticas en un estudiante, desde el inicio en un curso de didáctica de la geometría, hasta que realiza una práctica profesional en una escuela. Para dar cuenta de los efectos de esa modificación se propuso un modelo de gestión de aula basado en la Teoría de las Situaciones Didácticas, que le permitió planificar y realizar una clase de geometría para enseñar el concepto de área de un cuadrilátero. Luego se comparó el trabajo de enseñanza que realizó el estudiante en dos momentos excluyentes, lo realizado en el aula universitaria a sus compañeros estudiantes, con lo realizado en la escuela cuando el mismo estudiante, en rol de profesor, le enseña a alumnos reales. Esta comparación nos permite observar la influencia del proceso de formación sobre la modificación del sistema de enseñanza del estudiante. El proceso de enseñanza que realizó el estudiante fue contrastado con elementos teóricos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM).

**Palabras clave:** Formación de profesores. Gestión de aula. Espacio de Trabajo Matemático. Área de un cuadrilátero. Fibración.

### Abstract

In the process of training middle school mathematics teachers, which takes place at the Universidad Católica de la Santísima Concepción (UCSC), in the city of Concepción, Chile, we have been interested in observing the process of modifying the mathematics teaching system on a student, from the beginning in a geometry didactics course, until the practicum in a school. To account for the effects of this modification, a classroom management model based on the Theory of Didactic Situations was proposed, which allowed us to plan a geometry class to teach the area concept of a quadrilateral. To account for the teaching work carried out by the student in two exclusive moments; in the university classroom to their classmates in the role of a school student, and in the school when the same student as a teacher teaches real students. The teaching process carried out by the student was observed and contrasted with theoretical elements of the Mathematical Work Space (MWS).

**Keywords:** Teacher training. Classroom management. Mathematical Work Space. Area of a quadrilateral. Fibration.

\* Ph.D.(c) Université de Montréal (UdeM). Académico Facultad de Educación, Departamento de Didáctica, Universidad Católica de la Santísima Concepción (UCSC), Concepción, Chile. Dirección postal: Alonso de Ribera, 2850, Concepción, Chile, C.P: 4090541. E-mail: hmorales@ucsc.cl.

## 1 Introducción

Uno de los actuales temas de conversación en la sociedad chilena, respecto de las mejoras en los procesos educativos, está ligado a la formación inicial de profesores por parte de las universidades. A través de los medios se puede dar cuenta de la discusión sobre la pertinencia y desarrollo que se otorga para formar profesores suficientemente bien preparados para entregar una buena enseñanza a los alumnos de las escuelas en Chile (OCDE; MUNDIAL, 2009; AVALOS; MATUS, 2010; CEPPE, 2013; ARCE, 2014; EDITORIAL, 2015; RUFFINELLI, 2015; MINEDUC, 2016). Esta discusión toca el proceso de formación de profesores de matemáticas para la educación media; son las universidades las encargadas de formar buenos y exitosos profesores en este ámbito.

El estudiante, cuando llega a la universidad, ya trae una idea sobre cómo enseñar algún tipo de contenido matemático, y probablemente esa concepción es producto de su experiencia personal vivida como alumno en una escuela. La universidad, a través del proceso de formación, interviene sobre este estudiante; sobre su concepción de enseñanza, y esa intervención debería provocar algún tipo de influencia o cambio en los procesos de enseñanza del estudiante. Pero, ¿qué tipo de influencia o cambios provoca el proceso de formación?, ¿cuál es su aporte?, ¿qué aspectos de la concepción de enseñanza se modifican?

## 2 Justificación

Desde el año 2006 nos encontramos, como académicos, realizando asignaturas en el Programa de Formación de Profesores de Pedagogía en Educación Media en Matemáticas, en la Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile, UCSC, en el que se forman profesores especialistas en matemáticas para enseñar a alumnos desde los 12 a los 17 años de edad de las escuelas chilenas, en coherencia con el currículum propuesto por el Ministerio de Educación chileno (MINEDUC, 2016).

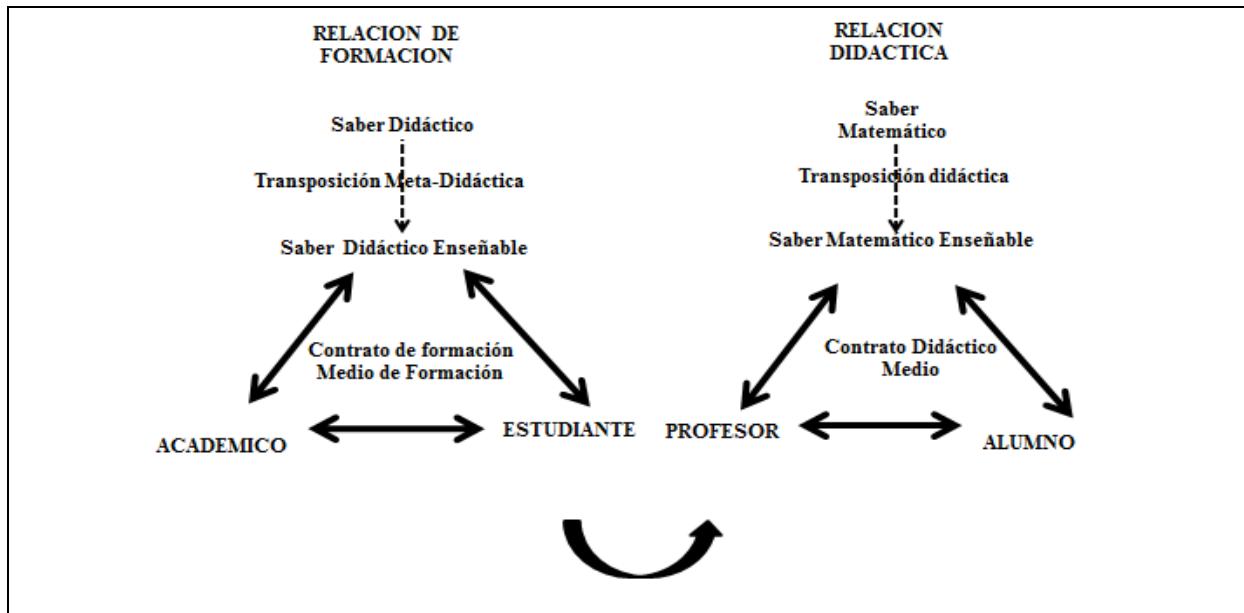
En este programa de formación, realizamos la asignatura de Didáctica de la Geometría, y la asignatura de Práctica Profesional. En la primera enseñamos a los estudiantes elementos de la planificación y enseñanza de la geometría en el aula universitaria, un escenario simulado, y en la segunda observamos y supervisamos a los estudiantes cuando asisten en forma individual a centros educativos y en ellos intervienen y desarrollan su sistema de práctica o procesos de enseñanza a alumnos en etapa escolar en el contexto real del aula (EDUCACIÓN, 2012).

En los últimos tres años nos ha interesado observar el impacto de nuestro proceso de formación, ya que las señales institucionales, internas y externas, asociadas a la formación (MINEDUC, 2006; UCSC, 2015) promueven una reflexión y autoanálisis sobre lo realizado. Además nos interesa cautelar las observaciones realizadas por el mundo social sobre la formación de profesores, que se caracterizan por tener una visión más bien crítica (OCDE; MUNDIAL, 2009; AVALOS; MATUS, 2010; COX; MECKES; BASCOPÉ, 2011; EDUCACIÓN-2020, 2015) y promover una respuesta argumentada y científica a ellas.

La participación como académico en ambas asignaturas nos ofrece una posición privilegiada para observar la práctica de la enseñanza de la geometría por parte de los estudiantes, y que se pueden evidenciar y comparar las experiencias simuladas y reales en clases con alumnos. Hemos elegido un contenido común para observar su proceso de enseñanza en las distintas asignaturas señaladas, así como en los diferentes escenarios, simulado y real, que se desarrollan en el aula universitaria y en la escuela respectivamente; y hemos elegido el contenido de área por un sentido de oportunidad y que coincide con el momento en que se desarrolla este trabajo.

### 3 Antecedentes Teóricos

Proponemos que un proceso de formación de profesores se produce un ciclo representado a través de la siguiente estructura (Figura 1):



**Figura 1 – Estructura de Formación**  
 Fuente: Morales (2018, p. 70)

Este ciclo se inicia en la universidad, en una relación de formación cuya construcción

y propuesta se fundamenta en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) (BROUSSEAU, 1986, 2007, 2013), que se caracteriza por ser una teoría que busca la consistencia de los objetos y conceptos necesarios para generar situaciones que promuevan la adquisición de conocimientos matemáticos a través de situaciones didácticas y adidácticas, considerando la relación del sujeto con “todo lo que actúa sobre el alumno y/o sobre lo que el alumno actúa” (BROUSSEAU, 2013, p. 3), es decir la relación *sujeto-medio*.

En el ciclo señalado en la Relación de Formación, fundamentado como un modelo teórico análogo a la TSD (BROUSSEAU, 1986, 1997), el académico propone los elementos de las teorías de la didáctica de la matemática, que llamamos saber didáctico, y que serán considerados para formar profesores, realizando una transposición meta-didáctica, equivalente a la transposición didáctica de Chevallard (1991), y estableciendo el saber didáctico enseñable que será presentado al estudiante de pedagogía en matemáticas.

Este proceso corresponde a la formación de profesores que se realiza en el aula universitaria, con la presencia de un contrato de formación, equivalente al contrato didáctico, lo que nos permite presentar un paradigma de formación *estudiante-medio de formación*, equivalente al *sujeto-medio* propuesto por Brousseau (1986). Entonces, el académico presenta las situaciones de formación al estudiante a través de un modelo de gestión de aula que considera tres etapas, preparación, realización e integración.

La etapa preparación conlleva una situación de aformación, equivalente a la situación adidáctica (BROUSSEAU, 1986); la etapa realización implica la presencia de los elementos de la TSD, situación de acción, formulación, validación, institucionalización; y la etapa integración implica nuevas situaciones adidácticas.

Luego, se produce la Relación Didáctica, en la cual el estudiante en formación asiste a la escuela, que llamamos escenario real, y asume el rol de profesor en el cual enseña a alumnos<sup>1</sup> reales. Allí se produce un proceso de enseñanza que, suponemos, se realiza a partir de los elementos y componentes presentados en la Relación de Formación.

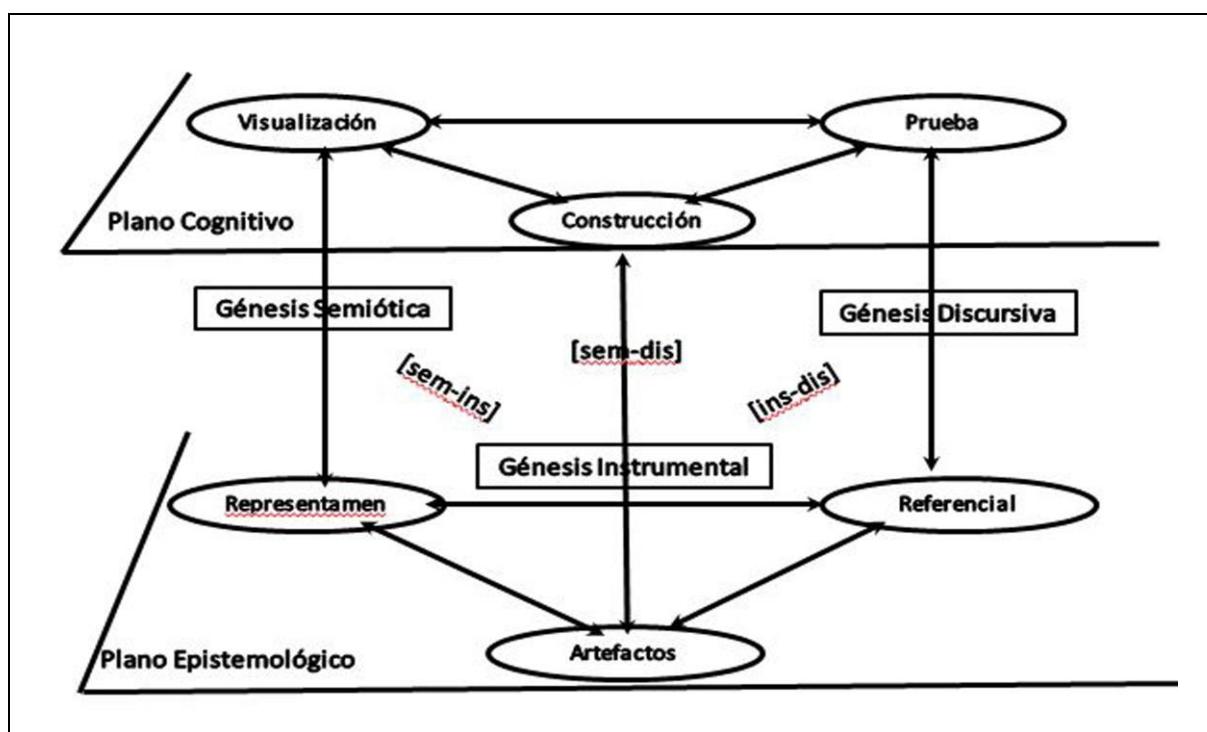
#### 4 El Espacio de Trabajo Matemático (ETM)

Dentro de las líneas de investigación de las bases didácticas en matemáticas más actualizadas, observadas en la literatura, se encuentra el Espacio de Trabajo Matemático

<sup>1</sup> Para efectos diferenciadores, llamamos estudiante al individuo que se encuentra en un proceso de formación de profesores en la universidad, y alumno al individuo que se encuentra en el aula escolar.

(ETM) (KUZNIAK, 2011; KUZNIAK; RICHARD, 2014b; GÓMEZ-CHACÓN; KUZNIAK; VIVIER, 2016; KUZNIAK; TANGUAY; ELIA, 2016; NIKOLANTONAKIS; VIVIER, 2016; KUZNIAK; RICHARD; MICHAEL-CHRYSANTHOU, 2017). Como elemento esencial, lo que busca el ETM es comprender lo que se pone en juego en torno al trabajo matemático en un marco escolar (MONTOYA-DELGADILLO; MENA-LORCA; MENA-LORCA, 2014, 2016).

El Espacio de Trabajo Matemático (ETM) es concebido como un lugar dinámico y abstracto que está organizado para fomentar el trabajo de profesores y estudiantes resolviendo un problema geométrico. El modelo articula dos planos principales, uno de naturaleza epistemológica, en nuestro caso vinculado al concepto geométrico de área, y otro de naturaleza cognitiva relacionada al pensamiento de una persona o alumno resolviendo tareas matemáticas. La organización del ETM y de ambos planos debe entenderse como un sistema dual, donde el plano epistemológico no pertenece al profesor ni el cognitivo al alumno; sino que es la forma de entender un complejo proceso didáctico en la medida que se manifiestan las acciones de enseñanza. La organización del ETM está asociada al siguiente diagrama:



**Figura 2 – El Espacio de Trabajo Matemático**  
 Fuente: Kuzniak y Richard (2014b, p. 9)

El modelo posee componentes que interactúan entre sí (GÓMEZ-CHACÓN; KUZNIAK; VIVIER, 2016; NIKOLANTONAKIS; VIVIER, 2016; KUZNIAK; RICHARD; MICHAEL-CHRYSANTHOU, 2017). En lo que respecta al plano epistemológico, este se organiza bajo criterios matemáticos, un grupo concreto de objetos tangibles denominados

representamen; un grupo de artefactos como instrumentos de dibujos, reglas, compás o *softwares*; y un sistema teórico de referencia basado en definiciones, propiedades y teoremas. En lo que respecta al plano cognitivo, este se organiza de acuerdo a los componentes visualización relacionada con descifrar e interpretar signos, construcción que depende del uso de artefactos y técnicas asociadas, y prueba relacionada con producir procesos de validación basada en sistema de referencia (KUZNIAK; RICHARD, 2014a; KUZNIAK; VIVIER; MONTOYA-DELGADILLO, 2015).

Un proceso de relación entre el plano epistemológico y el plano cognitivo puede ser identificado como una génesis que relaciona dimensiones específicas del modelo, llamadas génesis semiótica, que permite describir el proceso asociado al pensamiento visual en geometría; la génesis instrumental, que conlleva el uso de un recurso material o *softwares*; y la génesis discursiva, que hace referencia al uso de las propiedades geométricas (KUZNIAK, 2011; HENRÍQUEZ-RIVAS; MONTOYA-DELGADILLO, 2016; KUZNIAK; VIVIER; MONTOYA-DELGADILLO, 2015).

Esta estructura de génesis entre los dos planos ayuda a entender la circulación del conocimiento dentro del trabajo matemático; una circulación que, en sí misma, es bastante compleja. El profesor produce una situación didáctica a través de lo que llamamos un ETM idóneo, que corresponde al modo en que el profesor propone y diseña la clase, y considerando el contexto de los alumnos, “el diseñador desempeña un rol parecido al de arquitecto que diseña un espacio de trabajo para usuarios potenciales” (GOMEZ-CHACÓN, KUZNIAK, VIVIER, 2016, p. 12) y se visualiza a través de las clases reales, textos. El ETM idóneo puede ser modificado de acuerdo a circunstancias de la clase. Este ETM idóneo activa las génesis y la circulación del conocimiento matemático se da en los planos verticales y que explicamos a continuación.

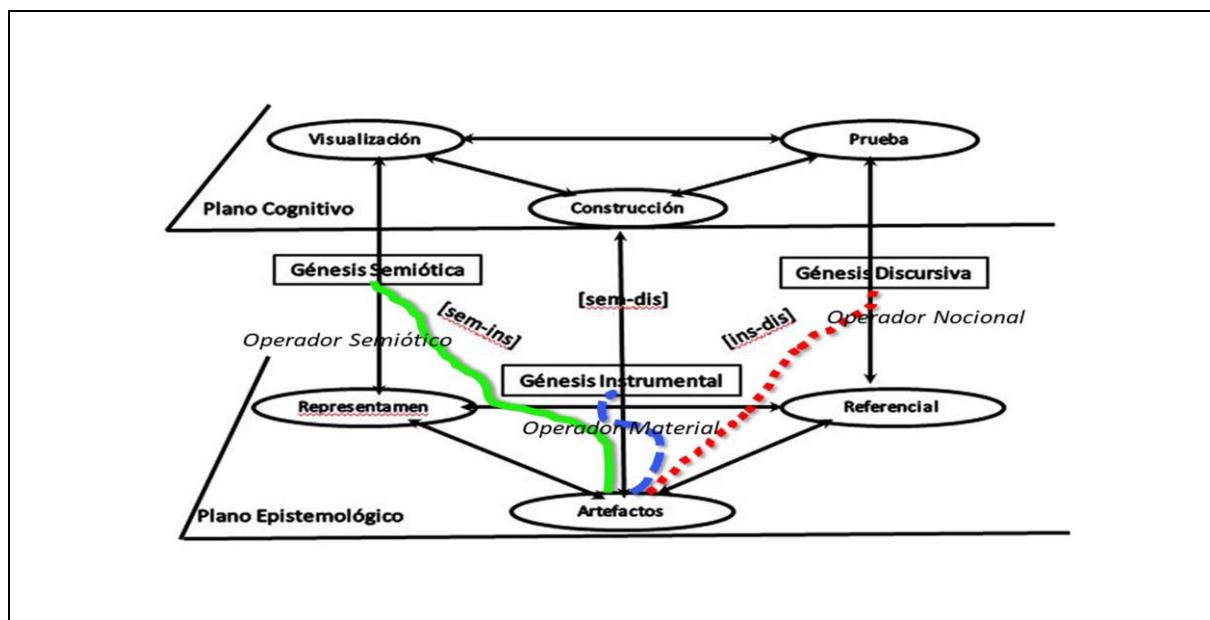
## 5 El modelo ETM, la fibración y los movimientos en el plano del ETM

El trabajo geométrico se realiza y resulta de una relación e interconexión entre las tres génesis, de modo que se originan tres planos verticales (ver la Figura 2 anterior) que son identificados por las génesis que las componen: semiótica – instrumental [sem-ins], instrumental - discursiva [ins-dis], y semiótica – discursiva [sem-dis], y el trabajo matemático, complejo e integrado se realiza en esos planos (KUZNIAK; RICHARD; MICHAEL-CHRYSANTHOU, 2017). Es justamente la existencia de estos planos lo que otorga un punto de vista teórico para la observación del sistema de enseñanza de un estudiante

en los escenarios, que ya hemos mencionado, que ocurren en un proceso de formación, y se ha propuesto el término fibración (KUZNIAK; RICHARD; MICHAEL-CHRYSANTHOU, 2017) como etiqueta para los movimientos en el plano y componentes del ETM (TANGUAY; KUZNIAK; GAGATSI, 2014).

El modelo ETM presenta el concepto de fibración (KUZNIAK; RICHARD, 2014b; LAGRANGE et al., 2016; KUZNIAK; RICHARD; MICHAEL-CHRYSANTHOU, 2017), que es una propuesta teórica que busca describir el trabajo matemático desde una perspectiva de resolución de problemas. En este modelo hay tres tipos de fibraciones internas, que se focalizan en el rol de problema, operador, representación y control (BALACHEFF; MARGOLINAS, 2005), y cada una de ellas tiene un efecto sobre las génesis semiótica, instrumental y/o discursiva.

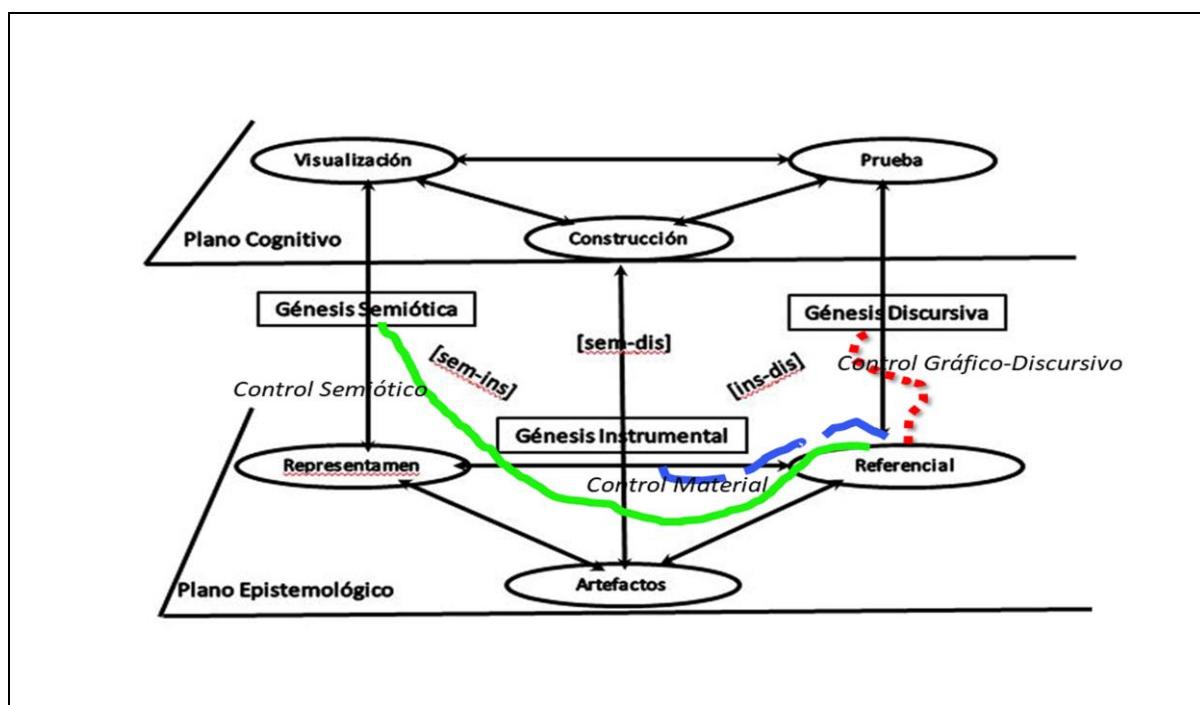
Se plantea que el rol de problema pertenece al plano epistemológico, que es donde habita precisamente el problema matemático. El primer tipo de fibración está asociado a la componente artefacto y cumple un rol de operador (BALACHEFF; MARGOLINAS, 2005). Un operador semiótico, material o conceptual, tiene un efecto sobre las génesis, ya que el uso de un operador influencia la formación de partes semiótica, nocial y material de un artefacto. En la Figura 3 se muestra este tipo de fibración



**Figura 3 – Fibración Operador**  
 Fuente: Kuzniak, Richard y Michael-Chrisanthou (2017, p. 12)

El segundo tipo de fibración cumple un rol de control (BALACHEFF; MARGOLINAS, 2005), y está asociada a la componente referencial. Esta fibración muestra que un control semiótico, material o gráfico-discursivo, afectan las génesis y a este tipo de fibración la llamamos control semiótico, material o discursivo-gráfico. Por ejemplo, la

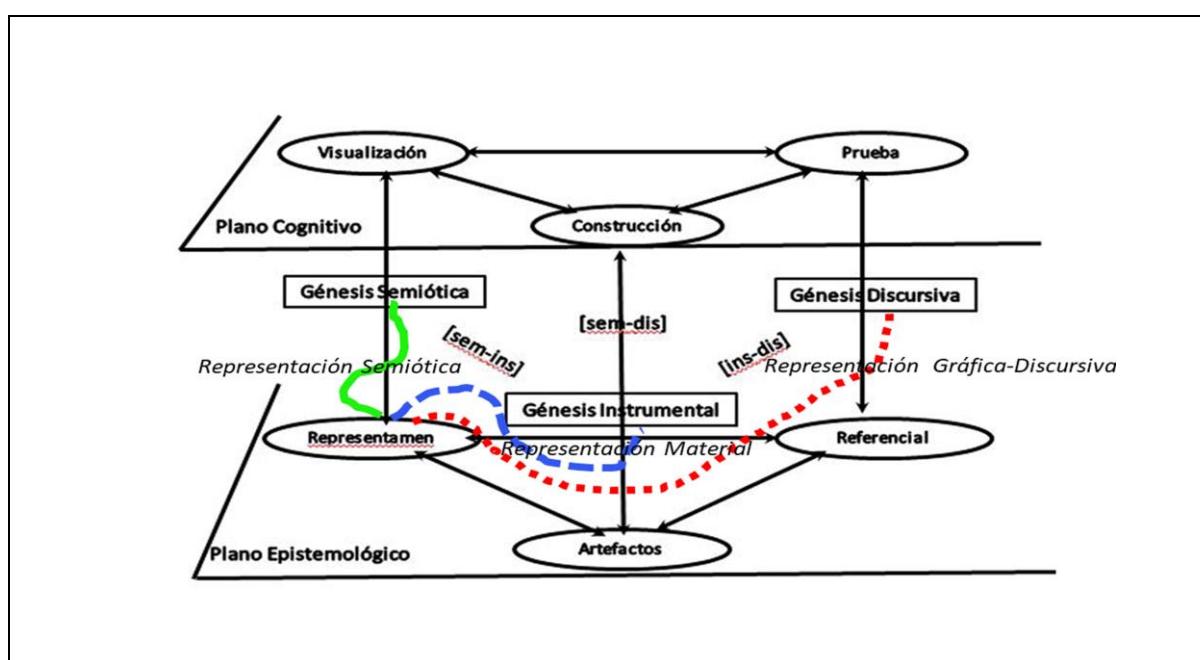
manifestación de una fórmula permite un control material sobre la génesis instrumental. En la Figura 4, abajo, se representa la relación.



**Figura 4 – Fibración Control**

Fuente: Kuzniak, Richard y Michael-Chrisanthou (2017, p. 12)

El tercer tipo de fibración cumple un rol de representación (BALACHEFF; MARGOLINAS, 2005) y está asociada a la componente representamen. Esta fibración puede producir una representación sobre cada génesis, que llamamos representación semiótica, material o discursiva-gráfica. En la Figura 5 se representa esta fibración



**Figura 5 – Fibración Representación.**

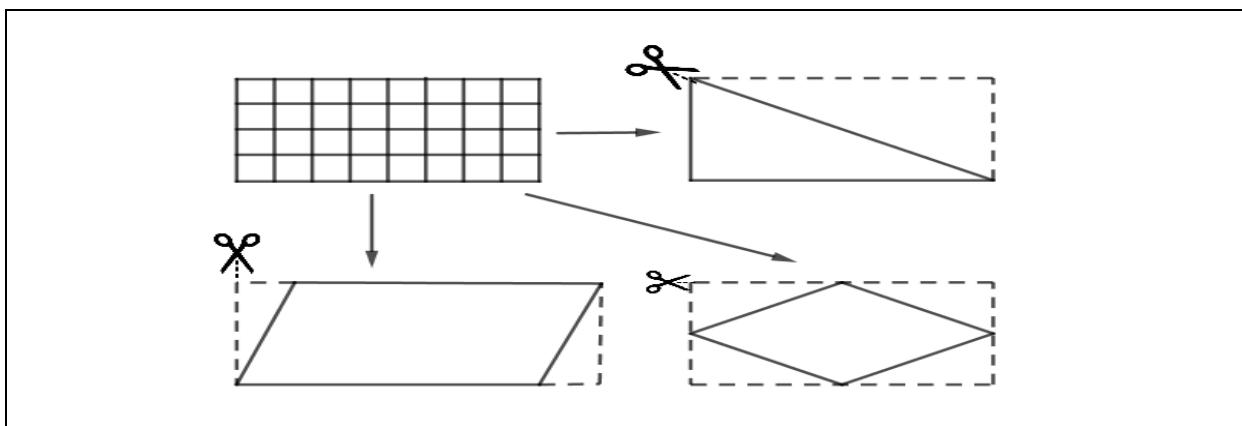
Fuente: Kuzniak, Richard y Michael-Chrisanthou (2017, p. 12)

En nuestro trabajo hemos considerado observar la fibración y manifestaciones de las componentes y activación de las génesis de modo de dar claridad y explicitar el trabajo matemático realizado en la enseñanza del área de un cuadrilátero, por estudiantes en proceso de formación como profesores de matemáticas.

## 6 Área de un cuadrilátero y principio de conservación

El área como la medida de una superficie se relaciona con el concepto de unidad de superficie como magnitud propia. El área de una superficie puede determinarse contando el número de unidades cuadradas que se requieren para cubrir exactamente la región, “y una unidad cuadrada es una región cuadrada en la cual cada uno de sus lados mide una unidad de longitud” (CLEMENS; O’DAFFER; COONEY, 1998, p. 398). En coherencia, en geometría existe el principio de conservación (MARTÍNEZ, 2014; SÁNCHEZ; URIZA, 2015) que se basa en el hecho que, al dividir o cortar un objeto, y volver a juntar sus partes, sus atributos de área permanecen invariables; la suma de sus áreas parciales es igual al total.

El principio de conservación de área es relevante en la comprensión del concepto de área de un cuadrilátero en los alumnos (ORTEGA, 2000; MARTÍNEZ, 2014; SÁNCHEZ; URIZA, 2015), dado que permite establecer relaciones del concepto de área de una figura geométrica a partir de una figura previa que ya conozca el alumno. Además, la conservación y el uso de la unidad cuadrada nos permite deducir las expresiones matemáticas o fórmulas para otros tipos de superficies como el cuadrado, el triángulo, el rectángulo, el rombo, el trapecio, como se presenta a continuación, en que con consecutivos y pertinentes cortes, se puede deducir y determinar el área de las superficies de otros diferentes figuras planas, como se muestra en la Figura 6.



**Figura 6** – Aplicación del principio de conservación; recortes  
Fuente: Propia

## 7 Antecedentes Metodológicos

En esta investigación, planteamos el método de caso para un estudiante. La información que será obtenida está vinculada con lo que ocurre en su formación en la relación de formación y, luego, en la relación didáctica. En ambas etapas se hará un análisis heurístico, descriptivo y comparativo del proceso de enseñanza utilizado por el estudiante, para visualizar los efectos de formación y aplicación respecto del modelo de gestión de aula que hemos propuesto. Elementos de una entrevista no estructurada realizada a los estudiantes se agregan al análisis cualitativo para fundamentar algunos resultados.

Hemos adoptado un tipo de investigación cualitativo-inductivo, como lo proponen Paillé e Mucchielli (2013), que permite la descripción y reflexión del problema que nos convoca, lo que conlleva que para este tipo de propuesta, en lugar de una revisión de la literatura, “parece más apropiado de hablar de un examen del problema que permita crear un espacio para la reflexión, la intuición, la meditación, la especulación” (PAILLÉ; MUCCHIELLI, 2013, p.29).

Dadas las características de nuestro trabajo, que muestra una preocupación concreta por el desarrollo e influencia de un proceso de formación de profesores sobre el sistema de enseñanza de un estudiante, nos interesa un tipo de investigación descriptiva aplicada, en que frente a un problema de investigación, su rol es de verificar el efecto de un plan de acción, en nuestro caso la utilización del modelo de gestión de aula “en que la utilidad es permitir a las personas que realizan la investigación, tomar una decisión clara” (LAMOUREUX, 2006, p. 37); decisión que en este trabajo se vincula a explicitar las influencias del proceso de formación sobre el sistema de enseñanza del estudiante.

La investigación del tipo concepción subjetiva es la que fundamenta nuestro trabajo, pues hay factores que acompañan a la subjetividad y que están relacionados con la existencia de una teoría implícita para el análisis de datos; con la influencia de estereotipos sociales; con la complejidad y variabilidad de los fenómenos; y, principalmente, con el punto de vista personal del investigador (LAMOUREUX, 2006; QUIVY; CAMPENHOUDT, 2006; PAILLÉ; MUCCHIELLI, 2013).

En coherencia con el tipo de investigación cualitativa que hemos propuesto para nuestra investigación, el estudio de caso es una estrategia de diseño de investigación adecuada a las condiciones que implica este trabajo; es decir, el estudio de un fenómeno que ocurre en un contexto natural de enseñanza y aprendizaje y, por lo tanto, se transforma en un método “que implica la recogida de datos sobre un caso o casos, y la preparación de un informe o

presentación del caso” (RODRIGUEZ; GIL; GARCÍA, 1999, p. 92), para la descripción, caracterización, comparación o descubrimiento de nuevas relaciones respecto del tema de investigación.

Luego del análisis particular de las etapas en cada escenario observado desde la fibración y las componentes, presentamos una síntesis del recorrido del sistema de enseñanza del estudiante, basado en el modelo de la TAD de Winsløw (2013), que se puede expresar a través de la relación  $RU(e,a) \rightarrow RE(ep,ae)$ . Este modelo se basa en el hecho de que el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico asociados al sistema de enseñanza de un profesor están fuertemente condicionados e influenciados por la institución en donde habitan estos dos conocimientos (WINSLØW, 2013).

En nuestro caso  $RU(e,a)$  corresponde a la relación ( $R$ ) que existe en la universidad ( $U$ ) entre el proceso de enseñanza ( $e$ ) que posee el estudiante durante el proceso de formación en la universidad y el contenido matemático de área ( $a$ ) observado en la relación de formación; y  $RE(ep,ae)$  que corresponde a la relación ( $R$ ) que existe en la escuela ( $E$ ) entre el proceso de enseñanza que posee el estudiante como profesor ( $ep$ ) posterior al proceso de formación en la universidad y el contenido matemático de área ( $ae$ ) observado en la relación didáctica; y que se desarrolla en la escuela.

## 8 Resultados

Los resultados se presentan a partir del análisis del proceso de formación, comparando dos momentos: la relación de formación que se realiza en el escenario simulado, y la relación didáctica que se realiza en el escenario real. Para eso hemos impuesto un modelo de gestión de clases que considera tres etapas: preparación, realización e integración. A continuación, presentamos una síntesis de los resultados.

### 8.1 Síntesis descripción comparativa entre escenarios simulado y real, respecto de la etapa preparación

Respecto de la etapa preparación, en el escenario simulado el estudiante otorga presencia a elementos del mundo real, (un juego de tetris) y las figuras que lo componen para poner en acto el proceso didáctico, es decir el objeto del mundo real se transforma en objeto geométrico, lo que implica una manifestación de la componente representación y el uso de ese objeto como artefacto, lo que implica fibración del tercer tipo representación material.

Para el estudiante dar presencia a las componentes visualización y construcción del plano cognitivo es relevante en el desarrollo de su clase para la apropiación por parte del alumno del concepto de área. En el escenario simulado están sus compañeros de curso que lo han acompañado en la formación de su sistema de enseñanza, lo que le permite reflexionar sobre la didáctica y poner en acción el proceso de gestión de aula propuesto.

El sistema de enseñanza propuesto por el estudiante en el escenario simulado se debe a la influencia del proceso de formación, que induce la idea de usar elementos asociados a la componente representamen para la enseñanza de un concepto matemático. Al respecto, cuando se le pregunta al estudiante dónde aprendió a planificar, él señala,

*Estudiante: aquí en la universidad, obviamente aprendí en los ramos de didáctica.*  
(Diálogo entre el académico y el estudiante, 2017).

Además, hay rasgos de la experiencia personal del estudiante, observados en el uso del juego del tetris, que no fue presentado en el proceso de formación; es parte de su ETM personal. Esto se ve evidenciado cuando en la entrevista personal el estudiante señala:

*Estudiante: cuando planifico busco actividades que sean desafiantes para los alumnos, que ellos puedan analizar, y que sean de lo cotidiano, que llamen la atención.*  
(Diálogo entre el académico y el estudiante, 2017).

Luego, en la misma etapa preparación, en el escenario real con alumnos de una escuela, el estudiante informa el objetivo de la clase usando un lenguaje formal geométrico lo que implica activación de la componente referencial y fibración tipo 2, control gráfico-discursivo, y, casi simultáneamente, presenta una situación didáctica que se ubica como fibración del tercer tipo, representación material. Los objetos utilizados, planos construidos con goma eva, se modifican de manifestaciones de la componente representamen a la componente artefactos. El estudiante, durante el transcurso de la clase, vuelve sobre actividades pendientes y las continúa desarrollando, de esta manera se observa fibración del tipo 1, operador nocial, a través del uso del tetris para deducir las fórmulas de los cuadriláteros.

La influencia del proceso de formación se observa a través de la fibración del tipo 3, representación discursiva-gráfica, es decir la presencia de la componente representamen, la aparición del uso de objetos del mundo real con presencia de la relación *sujeto-medio*; para el desarrollo de propiedades geométricas y fórmulas de la componente referencial.

Lo que permanece estable entre escenarios es la manifestación de la componente referencial través de la fórmula del área. La modificación en el sistema de enseñanza entre escenarios está focalizada en la interacción con los alumnos, en la gestión de la devolución

por parte del estudiante; el escenario simulado ha sido una preparación para el escenario real.

## 8.2 Síntesis descripción comparativa entre escenarios de la etapa realización

En el escenario simulado el estudiante propone una situación con manifestación del representamen, soporte material del mundo real, que en su desarrollo permita la manifestación de una génesis instrumental, ya que el alumno (sus compañeros estudiantes en rol de alumnos) debe construir, y simultáneamente presenta la fórmula del área, no para activar una génesis discursiva sino para producir una deducción de la fórmula, se presenta fibración de tipo 1, operador nocional. Cuando el estudiante les pregunta, ellos responden activamente; se produce manifestación de la componente prueba pues los estudiantes en rol de alumnos ya conocen las fórmulas.

En el escenario real hay una mayor activación de la génesis discursiva que en el escenario simulado, producto de la presencia de los alumnos. Los alumnos calculan el área de la figura y no deducen la fórmula del área a través de la génesis instrumental. Esto impulsa al estudiante en rol de profesor a modificar el ETM idóneo, insistir a los alumnos para que deduzcan la fórmula del cuadrilátero y no determinar el área; es decir, gestiona la devolución. Entonces, al contrario de lo que sucede en el escenario simulado, en que el estudiante provoca una mayor presencia de fibración de tipo 1, en el escenario real se produce activación de la génesis discursiva, desde la componente referencial que va al encuentro de la génesis instrumental, la fórmula del área se explica y se muestra su aplicación en un artefacto construido, un rectángulo, produciendo fibración de tipo 2, control material.

Muchas de estas interrelaciones ocurren de manera simultánea o de manera rotativa, en un ir y venir constante, mostrando lo complejo del trabajo matemático. Como hay participación de los alumnos, se incluye manifestación de la componente construcción, y activación de la génesis discursiva desde el plano cognitivo por parte de los alumnos.

## 8.3 Síntesis descripción comparativa entre escenarios de la etapa integración

En el escenario simulado el estudiante utiliza recursos del mundo real que se transforman en artefactos para deducir las fórmulas, es decir la fibración tipo 3, gráfica-discursiva, a partir de fibración tipo 3, representación material.

En el escenario real el estudiante presenta situaciones adidácticas o problemas, él genera presencia de fibración de tipo 2, control material, y fibración tipo 1, operador nocional,

con clara presencia de institucionalización. Hay activación de la génesis discursiva de un modo tradicional se presentan las fórmulas de los diversos cuadriláteros.

## 9 Discusión y Conclusiones

En un proceso de formación de profesores, el proceso de enseñanza de geometría en la escuela es un buen escenario para la práctica de la modificación y adaptación del ETM idóneo que se inicia en el escenario simulado. En la relación de formación se muestran, inicialmente, la presencia de dibujos y figuras geométricas, paralelogramos, rombos, trapecios que se relacionan con la fórmula del área y orientan su cálculo. Hay presencia de objetos del mundo real, sin embargo no tienen mucho protagonismo, probablemente porque los estudiantes que hacen el rol de alumno ya conocen las situaciones propuestas lo que hace que el proceso de enseñanza sea muy activo y de respuesta inmediata.

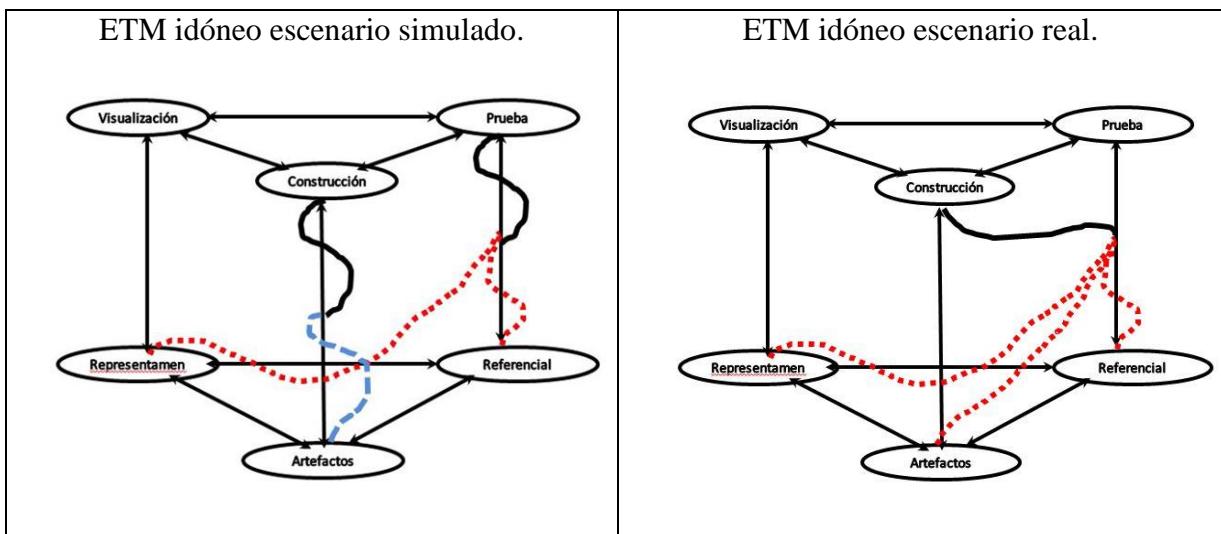
En el escenario real el ETM idóneo es más complejo e interrelacionado entre sus componentes que el del escenario simulado. Evoluciona a partir del uso de objetos e instrumentos del mundo real que devienen en artefactos geométricos, hay presencia explícita de ellos. Luego se produce un vínculo de estos artefactos con las fórmulas y conceptos geométricos de área. Algunas de estas acciones aparecen casi simultáneamente, la presencia y uso de objetos, con las opiniones y participación de los alumnos.

El ETM idóneo se acondiciona permanentemente debido a la fuerte influencia de las respuestas y participación de los alumnos, lo que implica, por parte del estudiante en rol de profesor, la necesaria presencia de gestión de la devolución, la retroacción y el contrato didáctico (BROUSSEAU, 1986, 1997). Se observa que el estudiante en rol de profesor privilegia la participación de los alumnos por sobre la imposición de la enseñanza de los contenidos de manera unidireccional.

La adecuación o modificación del ETM idóneo en el escenario real se produce por la influencia de las respuestas de los alumnos a la situación adidáctica y esto provoca un proceso complejo de interrelación entre las génesis y fibración. Observamos que el sistema de enseñanza del estudiante en rol de profesor es producto del proceso de formación, ya que hay aparición de elementos en el sistema de enseñanza, desde el escenario real, que fueron presentadas en el proceso de formación, como el área como unidad cuadrada, la relación *sujeto-medio*, la deducción de las fórmulas de cálculo de áreas a través de objetos geométricos usando el principio de conservación, el modelo de gestión didáctica de una clase (preparación, realización e integración), la presencia de la devolución. También hay que hacer notar la

presencia del ETM personal, que se manifiesta en el uso del juego del tetris como un aporte personal vivenciado previamente por él mismo estudiante.

Proponemos que la modificación del ETM idóneo del escenario simulado al real se puede mostrar a través de la siguiente estructura (Figura 7), siguiendo, en cierta medida, lo representado por las figuras 3, 4 y 5, y lo señalado en los párrafos anteriores.



**Figura 7 – Modificación ETM idóneo del estudiante, del escenario simulado al real**  
 Fuente: propia

La transición del sistema de enseñanza del escenario simulado al real simulado, observado a través del modelo de la TAD de Winslow (2013);  $RU(e,a) \rightarrow RE(ep,ae)$ , se manifiesta en que el estudiante en el escenario simulado, para enseñar el concepto de área utiliza instrumentos del mundo real que se transforman en artefactos, y estos mismos artefactos son utilizados para explicar los conceptos de área través de una activación de la génesis discursiva. En el escenario real presenta un sistema de enseñanza desde la presencia de objetos del mundo real hasta la activación de la génesis discursiva proveniente de la activación del plano cognitivo, es decir con activa participación por parte del alumno.

El estudiante utiliza en la relación didáctica, con bastante exactitud, lo aprendido en la relación de formación. A esto se agrega la propia información o experiencia personal para desarrollar un aporte al proceso de enseñanza, observado en la presencia de objetos que no fueron entregados o mostrados en la relación de formación, y que, después, sí son utilizados en la relación didáctica. Además, se muestra como muy relevante el hecho que el estudiante realice la gestión de la devolución, ya que esto denota la presencia de una relación transversal entre el mismo estudiante en rol de profesor y el alumno, lo que se revela como una fortaleza en un proceso de enseñanza de la geometría, en que hay presencia de diálogo y participación.

Podemos proyectar la información obtenida en esta investigación a los procesos de

formación de profesores de modo que, en la asignatura de didáctica de la geometría, se pueda enriquecer la experiencia personal del estudiante, su conocimiento de objetos geométricos asociados a la realidad o uso cotidiano de ellos; sus características en el mundo real. Esto enriquecería el vínculo entre el estudiante en rol de profesor y el alumno en la relación didáctica, y posiblemente impulsando un mayor logro de aprendizajes y comprensión de la geometría por parte de los alumnos escolares.

## Referencias

- ARCE, T. D. **Formación Inicial de Profesores y Trabajo Docente**: desde la vocación a la deserción. Santiago: El Mostrador, 2014.
- AVALOS, B.; MATUS, C. **La Formación Inicial Docente en Chile desde una Óptica Internacional**. Santiago de Chile: Ministerio de Educación, 2010.
- BALACHEFF, N.; MARGOLINAS, C. Modele des connaissances pour le calcul de situations didactiques. **Balises pour la didactique des mathématiques**, France, p. 1-32, 2005.
- BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, France, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.
- BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics**. Berlin: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- BROUSSEAU, G. **Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas**. Argentina: Libros del Zorzal, 2007.
- BROUSSEAU, G. **Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques**. 2013. Disponível em: <[http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire\\_V5.pdf](http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf)>. Acesso em: 3 nov. 2017.
- CENTRO DE ESTUDIOS DE POLÍTICAS Y PRÁCTICAS EN EDUCACION – CEPPE. **Formación Inicial Docente**. Santiago, 2013. Disponível em: <<http://www.ceppe.cl/images/stories/recursos/publicaciones/Marisol%20Latorre/SABER-PEDAGOGICO-Y-FORMACION-INICIAL-DE-DOCENTES1.pdf>>. Acesso em: 19 nov. 2015.
- CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. Argentina: Aique, 1991.
- CLEMENS, S. R.; O'DAFFER, P. G.; COONEY, T. J. **Geometría**. México: Pearson Educación, 1998.
- COX, C.; MECKES, L.; BASCOPÉ, M. La institucionalidad formadora de profesores en Chile en la década del 2000: velocidad del mercado y parsimonia de las políticas. **Pensamiento Educativo. Revista De Investigación Educacional Latinoamericana**, Santiago, v. 46, n. 1, p. 205-245, 2011.
- EDITORIAL. Falencias en formación de profesores. **La Tercera**, Santiago, p. 6, 2015. Disponível em: <<http://www2.latercera.com/noticia/falencias-en-formacion-de-profesores/>>. Acesso em: 15 mar. 2016.
- EDUCACIÓN-2020, F. **Los profesores que Chile necesita**. Santiago, 2015.

EDUCACIÓN, F. D. **Programa de Actividad Curricular de Práctica Profesional.** Concepción: Facultad de Educación, UCSC, 2012.

GÓMEZ-CHACÓN, I.; KUZNIAK, A.; VIVIER, L. El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 54, p. 1-22, 2016.

HENRÍQUEZ-RIVAS, C.; MONTOYA-DELGADILLO, E. El trabajo matemático de profesores en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en el liceo. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 54, p. 45-66, 2016

KUZNIAK, A. L'espace de travail mathématique et ses générations. **ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, IREM de STRASBOURG**, France, v. 16, p. 9-24, 2011.

KUZNIAK, A.; RICHARD, P. R. Espaces de travail mathématique. Points de vue et perspectives. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 17, p. 29-39, 2014a.

KUZNIAK, A.; RICHARD, P. R. Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 17, n. 4 - I, p. 5-15, 2014b.

KUZNIAK, A.; RICHARD, P. R.; MICHAEL-CHRYSANTHOU, P. **From geometrical thinking to geometrical working competencies.** In: DREYFUS, T., ARTIGUE, M., POTARI, D., PREDIGER, S., e RUTHVEN, K. (Ed.). **Developing Research in Mathematics Education.** England: Taylor & Francis Group, 2017. p. 15.

KUZNIAK, A.; TANGUAY, D.; ELIA, I. Mathematical working spaces in schooling: an introduction. **ZDM**, Berlín, v. 48, n. 6, p. 721-737, 2016.

KUZNIAK, A.; VIVIER, L.; MONTOYA-DELGADILLO, E. El espacio de trabajo matemático y sus génesis. In: CIAEM LACME, 14., 2015, México. **Anais...** México: Ciaem, 2015. p. 1-14.

LAGRANGE, J.-B. et al. Spécificité des outils et des signes dans le travail mathématique. In: SYMPOSIUM ETM T2, .5to, Gréce. **Anais...** Gréce: University of Western Macedonia, 2016. p. 217-226.

LAMOUREUX, A. **Recherche et méthodologie en sciences humaines.** Quebec: Beauchemin, 2006.

MARTÍNEZ, S. **Recursos para la formación inicial de profesores de educación básica.** Santiago: Proyecto Fondef D09 I1023, 2014.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN – MINEDUC. **Ley num. 20.129. establece un sistema nacional de aseguramiento de la calidad de la educación superior.** Santiago: Mineduc. 2006.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN – MINEDUC. **Curriculum Vigente Decreto 264/2016.** Santiago: Ministerio de Educación, 2016.

MONTOYA-DELGADILLO, E.; MENA-LORCA, A.; MENA-LORCA, J. Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 17, n. 4-1, p. 181-197, 2014.

MONTOYA-DELGADILLO, E.; MENA-LORCA, J.; MENA-LORCA, A. Estabilidad Epistemológica del Profesor Debutante y Espacio de Trabajo Matemático. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 54, p. 188-203, 2016.

MORALES, H. La teoría de las situaciones didácticas como sustento teórico en la formación de profesores de matemáticas. In: OSORIO, J. e GLOËL, M. (Ed.). **La didáctica como fundamento de la práctica profesional docente**. Concepción, Chile: Ediciones UCSC, p. 67-88, 2018.

NIKOLANTONAKIS, K.; VIVIER, L. Future Elementary School Teachers' Mathematical Working Space for Working with Natural Number in Any Base. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 54, p. 23-44, 2016.

OCDE; MUNDIAL, B. **La Educación Superior en Chile**. Paris: OCDE, 2009.

ORTEGA, G. M. Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Relime, v. 3, n. 2, p. 131-170, 2000.

PAILLÉ, P.; MUCCHIELLI, A. **L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales**. Paris: Armand Colin, 2013.

QUIVY, R.; CAMPENHOUDT, L. V. **Manuel de recherche en sciences sociales**. Paris: Dunod, 2006.

RODRIGUEZ, G.; GIL, J.; GARCÍA, E. **Metodología de la investigación cualitativa**. Málaga: Aljibe, 1999.

RUFFINELLI, A. **Calidad de la formación de profesores e ingreso automático a la carrera docente**. Santiago: El Mostrador, 2015.

SÁNCHEZ, M. G. C.; URIZA, R. C. **La conservación en el estudio del área**. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, 2015. Disponível em: <<http://www.academia.edu>>. Acesso em: 20 abr. 2016.

TANGUAY, D.; KUZNIAK, A.; GAGATSIS, A. El trabajo matemático y los espacios de trabajo matemático. In: GÓMEZ-CHACÓN, I.; ESCRIBANO, J., et al. SIMPOSIO INTERNACIONAL ETM, 4., 2014, Madrid. **Anais...** Madrid: Instituto de Matemática Interdisciplinar. 2014. p. 21-26. .

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN – UCSC, F. D. E. **Modelo de Práctica Pedagógica para las carreras de Pedagogía de la Facultad de Educación**. EDUCACIÓN, F. D. Concepción: UCSC. 05/2015, 2015.

WINSLØW, C. The transition from university to high school and the case of exponential functions. In: CONGRESS OF EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 8., Manavgat-Side, 2013. **Anais...** Manavgat-Side, Antalya: ODTÜ, 2013. p. 1-10.

**Submetido em 24 de Agosto de 2017.  
Aprovado em 06 de Junho de 2018.**