



Bolema: Boletim de Educação Matemática

ISSN: 0103-636X

ISSN: 1980-4415

UNESP - Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Pesquisa; Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Silva, Angélica da Fontoura Garcia; Pinheiro, Maria Gracilene de Carvalho; Canova, Raquel Factori

Análise das Reflexões de uma Professora dos Anos Iniciais
Participante do Observatório da Educação a Respeito da sua Prática

Bolema: Boletim de Educação Matemática, vol. 32, núm. 62, 2018, pp. 1113-1133

UNESP - Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Pesquisa; Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

DOI: 10.1590/1980-4415v32n62a18

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291265266019>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais informações do artigo
- Site da revista em redalyc.org

redalyc.org
UAEM

Sistema de Informação Científica Redalyc

Rede de Revistas Científicas da América Latina e do Caribe, Espanha e Portugal

Sem fins lucrativos acadêmica projeto, desenvolvido no âmbito da iniciativa
acesso aberto

Análise das Reflexões de uma Professora dos Anos Iniciais Participante do Observatório da Educação a Respeito da sua Prática

Analysis of an Early Elementary School Teacher Reflections Participating in the Education Observatory about her Practice

Angélica da Fontoura Garcia Silva*

 ORCID iD 0000-0002-2435-9240

Maria Gracilene de Carvalho Pinheiro**

 ORCID iD 0000-0003-4240-5041

Raquel Factori Canova***

 ORCID iD 0000-0003-0474-240X

Resumo

Este artigo tem o objetivo de apresentar a análise das reflexões, a respeito da própria prática, de uma professora participante de um processo formativo quanto ao tema fração, com destaque para uma situação quociente envolvendo equivalência de frações. Este estudo foi desenvolvido no âmbito do Programa Observatório da Educação. Para isso observaram-se as informações produzidas em quatro momentos e procurou-se analisar à luz da teoria de Schön, sobretudo acerca da reflexão sobre a ação, as interpretações que a docente fez de sua prática profissional; e, com base em Serrazina, a respeito das relações dos seus conhecimentos com a reflexão realizada por ela. Durante a formação, observou-se que a constituição de um espaço de discussão coletiva favoreceu a (re)significação dos conhecimentos para o ensino das frações. Acredita-se que o curso de formação tenha contribuído para ampliar a reflexão da professora, levando-a a perceber e trabalhar suas fragilidades e a reforçar as suas potencialidades, ampliadas pela postura investigativa acerca da diversidade de procedimentos metodológicos que podem ser utilizados no ensino das frações.

Palavras-chave: Formação. Observatório da Educação. Prática. Anos Iniciais. Fração.

* Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica (PUC), São Paulo. Professora Pesquisadora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN), São Paulo, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Raimundo Pereira de Magalhães, 3305, Vila Pirituba, São Paulo, São Paulo, Brasil, CEP: 05145-200. E-mail: angelicafontoura@gmail.com.

** Doutoranda, com bolsa CAPES, do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN), São Paulo. Endereço para correspondência: Av. Raimundo Pereira de Magalhães, 3305, Vila Pirituba, São Paulo, São Paulo, Brasil, CEP: 05145-200. E-mail: gracilene.pinheiro@gmail.com.

*** Pós-Doutoranda, com bolsa CAPES, do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN), São Paulo. Endereço para correspondência: Av. Raimundo Pereira de Magalhães, 3305, Vila Pirituba, São Paulo, São Paulo, Brasil, CEP: 05145-200. E-mail: fraquelc@yahoo.com.br.

Abstract

This article aims to present the analysis of the reflections, regarding the practice itself, of a teacher participating in a formative process regarding the fractions subject, with emphasis on a quotient situation involving equivalence of fractions. This study was developed under the Education Observatory Program. In order to do so, we observed the information produced in four moments and attempted to analyze, in the light of Schön's theory, mainly the reflection on the action, the interpretations that the teacher made of her professional practice; and, based on Serrazina, the relations of her knowledge with the reflections she made. Throughout the development process, we noticed that the establishment of a space for collective discussions helped (re)-signify the knowledge to teach fractions. We believe that the development course has contributed to enlarge the teacher's reflection, guiding her to realize and work on her weaknesses, and to reinforce her strengths. The latter were enlarged by the investigative attitude about the diversity of methodological procedures that can be used in when teaching fractions.

Keywords: Development. Education Observatory. Practice. Early years. Fraction.

1 Introdução

O estudo aqui descrito refere-se à temática ensino e aprendizagem de frações em situações quociente envolvendo a ideia de equivalência. Nele será apresentado o processo de reflexão de uma professora sobre a sua prática ocorrido antes, durante e depois da sua participação em uma formação continuada, oferecida por um Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, no âmbito do Programa Observatório da Educação.

Esse programa desenvolveu um projeto de formação e pesquisa, financiado pela CAPES com o propósito de constituição de um grupo colaborativo de formação e pesquisa. No projeto desenvolvido no Observatório da Educação buscou-se investigar as transformações da prática docente e o desenvolvimento profissional de professores que lecionam para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, quando os participantes estão inseridos em um processo de estudo de pesquisas em Educação Matemática e empenhados em promover inovações curriculares nas suas salas de aula.

A investigação concentra-se na análise e interpretação de uma das professoras participantes do Projeto a respeito da sua própria prática – Professora Marcela. As informações produzidas foram coletadas em 4 momentos diferentes: antes do processo formativo foi apresentado a alunos do 5º ano do Ensino Fundamental (de 9 e 10 anos de idade) de algumas escolas um questionário inicial e, entre elas, estava a sala da professora em questão. Após análise, ao identificarmos um percentual de acerto muito baixo em uma das questões, decidimos colocá-la em discussão no módulo de formação que tratou dos números racionais e seu ensino.

O segundo momento foi contemplado durante esse processo formativo: buscamos elementos nas discussões em que a professora investigada participou e nas reflexões relacionadas, direta ou indiretamente, à mesma situação. No terceiro momento, um ano após o

término do módulo que discutiu a temática, observamos uma aula planejada e desenvolvida pela professora participante, a qual se propôs a introduzir essa temática. No quarto momento, realizado quatro anos depois da finalização do processo formativo, essa professora voltou a aplicar a questão em destaque para seus alunos, gravou sua mediação durante a aula, relatou por escrito sua experiência e concedeu uma entrevista para discutir a temática.

A seguir, destacaremos a relevância desta investigação, expondo resultados de outras pesquisas que também discutiram questões relativas aos processos de ensino e de aprendizagem das frações e, a nosso ver, justificam nossas escolhas. Explicitaremos a base teórica adotada na análise das informações produzidas no decorrer dos estudos e a descreveremos, brevemente, apresentando os procedimentos metodológicos, a análise e a discussão das informações produzidas. Por fim, teceremos nossas considerações acerca do estudo.

2 Relevância e fundamentação

Estudos nacionais e internacionais no campo da Educação Matemática, como os de Campos (2013); Canova (2013); Cardoso e Mamede (2009); Garcia Silva (2007); Kieren (1993); Nunes e Bryant (1997); Nunes et al. (2006) e Vergnaud (1990) consideram as frações como uma das ideias mais importantes e complexas a serem ensinadas na Educação Básica e enfatizam que, do ponto de vista cognitivo, sua aprendizagem é um grande desafio.

Isso também é observado em documentos oficiais. Os *Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN* – (BRASIL, 1997), por exemplo, orientam os professores para introduzirem o ensino dos números racionais para alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, com propósito de ampliar o conjunto dos Números Naturais. Entretanto, advertem acerca das possíveis dificuldades encontradas pelas crianças. Os autores ainda propõem que o ensino desse tema se dê utilizando diferentes significados: parte-todo, quociente e razão. Todavia sinalizam haver uma forte tendência, por parte dos professores brasileiros, em trabalhar o conceito utilizando prioritariamente o significado parte-todo. Esse fato também foi observado, já no final da década de 90, por Campos et al. (1995) e parece se manter ainda hoje, de acordo com as investigações mais recentes, como as de Garcia Silva (2007) e Pinheiro (2014), por exemplo.

Não podemos falar de fração e não falar de Vergnaud (1983, 1990) que serviu de marco teórico para a maior parte dos estudos brasileiros aqui referenciados. Esse autor define que um campo conceitual é formado por um conjunto de situações cuja compreensão necessita do domínio de diversos conceitos de naturezas diferentes; por um conjunto de invariantes e por

suas representações simbólicas.

Em relação ao quociente, Vergnaud (1983) discute que a divisão envolve regras operatórias complexas como, por exemplo, multiplicação, utilização de subtrações e divisões sucessivas; busca do quociente, que pode envolver resto e resultar em frações e requerem o estabelecimento de relações como, por exemplo, o tamanho do todo com o número de partes; ou as partes com a equivalência de área entre elas.

Neste artigo optamos por analisar os processos de ensino e aprendizagem de uma situação quociente que envolve a ideia de equivalência e poderia também ser resolvida pelos esquemas muito utilizados no modelo parte-todo – a partição.

Apoiamo-nos também em resultados de investigações como a de Campos (2013), por exemplo. A autora, fundamentada nos estudos de Streefland (1997) e Nunes et al. (2006), considera que a introdução do ensino de frações pela exploração do significado quociente oportuniza vivência de situações com as quais o aluno pode revelar maior compreensão de seu uso, uma vez que a situação quociente pode ser apresentada a partir da extensão da divisão entre números naturais.

Ademais, estudos como os de Lamon (2005) e Nunes et al. (2006) consideram importante investigar como as crianças compreendem as classes de equivalência entre frações, pois trata-se de uma ideia fundamental, uma vez que prepara para a compreensão de noções importantes, como a da proporcionalidade.

Campos (2013), apoiada nos estudos realizados por Behr et al. (1984) e Kerslake (1986), também afirma que os alunos encontram dificuldades para a identificação do invariante equivalência. Sobre esse fato, Cardoso e Mamede (2009, p. 2866), ao observarem que, na resolução de atividades que envolvem a equivalência de frações, os alunos apresentavam melhor desempenho em situações quociente, argumentam que isso talvez ocorra pelo “facto deste tipo de situação ir ao encontro do conhecimento informal dos alunos”.

Nessa perspectiva, parece-nos relevante apresentar a análise das reflexões, a respeito da própria prática, de uma professora participante de um processo formativo quanto ao tema fração, com destaque para situação quociente envolvendo equivalência de frações.

Buscaremos referência acerca da reflexão sobre a ação em Schön (1987), para analisar as interpretações que a docente faz de sua prática profissional; e em Serrazina (1999, 2013), para relacionar seus conhecimentos com a reflexão realizada por ela.

Schön (1987) defende que o saber profissional se traduz num conjunto de competências marcadas pela prática da reflexão em diferentes níveis: “conhecimento na ação” refere-se ao conhecimento que os profissionais demonstram na execução da ação; “reflexão na

ação” corresponderia, para o autor, às descrições verbais ocorridas enquanto os profissionais atuam; e “reflexão sobre a ação” indica a reconstrução mental da ação, para tentar analisá-la retrospectivamente.

O mesmo autor valoriza a prática, cria a categoria de profissional reflexivo e propõe o conceito de reflexão na ação, definindo-o como o processo no qual os professores aprendem a partir da análise e da interpretação de sua própria atividade prática. Assim, para Schön (1987), a reflexão vai além da descrição do que foi feito em sala de aula; pressupõe também um questionamento sobre situações práticas. Ele afirma também que é na reflexão sobre a ação que nos tornamos capazes de enfrentar situações novas e tomar decisões apropriadas; porém, é a reflexão sobre a reflexão na ação que ajuda o profissional a progredir no seu desenvolvimento.

Os estudos de Schön são ampliados por Serrazina (1999, 2013). Ao pesquisar a capacidade de reflexão dos professores de Matemática com quem trabalhou, Serrazina (1999) observou que há uma relação entre a autoconfiança e os conhecimentos específicos da área. Segundo ela, a capacidade de refletir sobre a própria prática “tornou-se mais profunda à medida que aumentava a sua autoconfiança que, por sua vez, estava ligada ao aprofundamento dos seus conhecimentos de Matemática” (SERRAZINA, 1999, p. 163).

Consideramos, assim como a autora, que o fato de priorizarmos a pesquisa que propicie ao professor um espaço para a discussão mais aprofundada do conteúdo pode permitir uma maior profundidade também nas reflexões efetuadas durante e depois da pesquisa. Assim, nos apoiamos também nos pressupostos de Serrazina (1999, 2013), para focar nosso trabalho num campo específico do conhecimento – a Matemática – e num conteúdo determinado: a representação fracionária dos números racionais envolvendo o significado quociente.

3 Procedimentos metodológicos

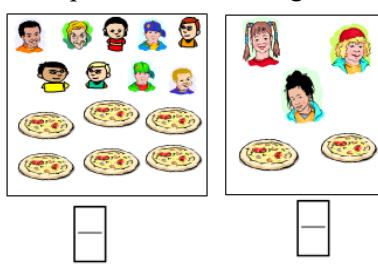
Este estudo que teve, como já explicitamos aqui, o objetivo de apresentar a análise das reflexões, a respeito da própria prática, de uma professora participante de um processo formativo quanto ao tema fração, com destaque para situação quociente envolvendo equivalência de frações, foi composto por quatro momentos. Inicialmente – 1º momento –, ocorrido no ano de 2012, em salas do 5º ano do Ensino Fundamental de duas escolas públicas estaduais paulistas, foi realizada uma pesquisa – em sala de aula, de forma individual e sem auxílio de material – em que os alunos resolveram 12 questões de fração (CANOVA, 2013).

O teste foi aplicado por uma das pesquisadoras, que leu cada questão com as crianças, dando um tempo entre uma leitura e outra, para que elas pudesse refletir e respondê-las. Após

a análise das respostas, percebemos que uma das questões teve um índice muito baixo de acerto e decidimos investigar um pouco mais sobre seu entendimento. Nesse mesmo ano foi desenvolvido, em meses posteriores, no período de 04 de setembro a 27 de novembro em um módulo do programa Observatório da Educação, um processo formativo com professores dos Anos Iniciais, com o tema *Representação fracionária do número racional*, no qual decidimos colocar para discussão essa questão. Tratava-se de uma atividade inspirada em Nunes et al. (2004) e classificada como quociente envolvendo a ideia de equivalência de frações. Ela é composta de duas situações e suas representações icônicas correspondentes com dois espaços destinados as respectivas representações fracionárias:

Nove meninos dividem igualmente seis pizzas.

Três meninas, na mesma pizzaria, dividem igualmente duas pizzas.



→ Representação fracionária

Cada menino come mais do que cada menina.

Cada menino come menos do que cada menina.

Cada menino come tanto como cada menina.

→ Identificação da ideia equivalência

Explique como você pensou

→ Justificativa

As informações a respeito dessa discussão foram produzidas e coletadas no decorrer das sessões de formação, quando as professoras discutiram, por meio da análise da situação investigada no primeiro momento, sobre as dificuldades encontradas quando se propõem situações envolvendo a ideia de quociente. Além disso, ao iniciar as sessões de formação, as 18 professoras participantes elaboraram e resolveram outras situações que julgavam ser adequadas para introduzir o ensino de frações com crianças do 5º ano. A elaboração das situações e a discussão sobre os resultados da investigação que ocorreu no primeiro momento são parte da formação – 2º momento deste estudo.

Um ano após o encerramento do processo formativo, ocorreu o terceiro momento de coleta: fomos observar uma aula planejada e desenvolvida por uma das professoras que havia participado do processo formativo, a Professora Marcela. Naquele momento solicitamos apenas que ela preparasse e desenvolvesse uma aula para introduzir o tema frações.

Finalmente, após quatro anos, ocorreu o quarto momento deste estudo, quando retornamos a uma das escolas participantes do projeto e reencontramos a Professora Marcela. Pedimos a ela que aplicasse a questão em estudo aos seus alunos. Ela prontamente aceitou e

pediu para todos eles que resolvessem a questão individualmente e, enquanto resolviam, transitou entre as carteiras, fazendo questionamentos quanto às resoluções. Em seguida, abriu a discussão e teve o cuidado de filmar e gravar. Ao nos apresentar os dados, pedimos que relatasse como tinha sido essa experiência. Assim, a partir dessa coleta, apresentamos aqui a análise e a discussão dos dados coletados nos quatro momentos.

4 Análise e discussão dos dados

4.1 Primeiro momento: antecede o processo formativo

Nossa pesquisa, cuja origem e trajetória foram explicitadas nas seções anteriores, analisou o protocolo de 163 alunos do 5º ano, o que resultou em 326¹ possíveis representações fracionárias. Desse total, apenas 57 (17,5%) foram representações corretas das frações. A inversão do numerador pelo denominador foi o erro mais frequente, principalmente na fração seis nonos, como podemos observar no protocolo do aluno 65 – Figura 1. Na mesma figura, as representações do aluno 123 estão entre os 17,5% das representações corretas. Todavia, apesar de saber representar as frações, ele não comprehende o significado delas, pois não percebe a equivalência de frações e assinala a alternativa: “Cada menino come mais que cada menina”.

<p><i>Nove meninos irão dividir igualmente 6 pizzas e não deve sobrar nada. Três meninas irão dividir igualmente 2 pizzas e também não deve sobrar nada. As pizzas são idênticas. Represente a fração que cada criança irá receber de pizza.</i></p> <p>Protocolo do aluno 65</p>	<p><i>Nove meninos irão dividir igualmente 6 pizzas e não deve sobrar nada. Três meninas irão dividir igualmente 2 pizzas e também não deve sobrar nada. As pizzas são idênticas. Represente a fração que cada criança irá receber de pizza.</i></p> <p>Protocolo do aluno 123</p>
---	--

Figura 1 – Protocolos exemplares: alunos 65 e 123
 Fonte: Acervo das pesquisadoras (2013).

¹ O total de 326 se refere a duas representações fracionárias por questão.

Inferimos que o aluno 65, da mesma forma que a maioria dos alunos, apesar de reconhecer a representação $\frac{a}{b}$, não comprehende a relação entre o numerador e o denominador, uma vez que os inverte, ao representar a fração. O aluno 123, por sua vez, mesmo representando adequadamente, não reconhece a equivalência, fundamentando sua escolha no número de meninos. Possivelmente, esse aluno considera apenas a quantidade de crianças, sem estabelecer qualquer relação de quociente.

Continuando a análise estatística, observamos que 24 dos 163 alunos, possivelmente, identificaram a equivalência, assinalando corretamente a afirmação, mas somente dois apresentaram justificativas coerentes.

Analizando o ocorrido, consideramos ser esse um baixo desempenho, uma vez que, segundo estudos como os desenvolvidos por Nunes et al. (2006) e Campos (2013), quando se proporciona às crianças contato com situações quociente, elas intuitivamente as comprehendem melhor. Foi após essa análise que consideramos interessante discutir e refletir um pouco mais sobre o ensino dessa situação, mas, dessa vez, com professores participantes do processo formativo que lecionavam para alunos desse ano de escolaridade.

4.2 Segundo momento: início do processo formativo

Participaram do processo formativo 18 professoras. Como no terceiro e no quarto momentos, aqui restringimos o foco da análise às reflexões sobre a prática da professora Marcela.

No primeiro encontro do processo formativo, solicitamos que ela elaborasse situações envolvendo tipos de problemas vistos como adequados para introduzir o ensino de frações, de modo a favorecer a compreensão dos alunos. Isso se fez, pois pretendíamos identificar, na perspectiva de Vergnaud (1990), quais eram os significados explorados nas situações, os tipos de representações abordadas e, por fim, constatar se nelas era explorado algum invariante da fração – ordem, equivalência e conservação da unidade de referência.

A Professora Marcela, assim como todas as participantes do processo formativo, elaborou situações envolvendo somente os significados parte-todo e operador: três situações envolvendo a ideia de parte-todo e duas de operador. Isso nos permitiu confirmar resultados como os das pesquisas de Cardoso e Mamede (2009) e Garcia Silva (2007), as quais indicaram haver uma forte tendência, por parte das professoras, em trabalhar o conceito de fração utilizando o significado parte-todo, seguido do significado operador. Isso nos parece

preocupante, uma vez que documentos curriculares oficiais que subsidiam a prática dos professores da rede estadual paulista e pesquisas da área indicam que o quociente também deve ser trabalhado pelos educadores dos Anos Iniciais.

O Currículo do estado de São Paulo aponta que o professor deve utilizar, para introduzir frações para alunos do 5º ano: parte-todo, razão e quociente, porém o documento não indica o significado operador para esse segmento de ensino.

Com relação às pesquisas, notamos que, de um lado, investigadores como Canova (2013) e Nunes et al. (2007) consideram a situação quociente como facilitadora da construção e da compreensão do conceito de fração, quando o professor a utiliza para introduzir as frações; e, por outro lado, investigações como a de Campos et al. (2012, p. 371) nos chamam a atenção pela inexistência de “transferência clara do conhecimento de notação aprendido em situações parte-todo para situações quociente em séries próximas ao ensino desta notação”.

Resultados como os nossos, a respeito da prática docente calcada nos procedimentos que envolvem situações parte-todo e operador, foram também observados em outros estudos nacionais e internacionais, como os de Garcia Silva (2007) e Nunes e Bryant (2009). Esses últimos, por exemplo, afirmam também haver uma forte tendência de professores britânicos a trabalhar o conceito de fração, utilizando, principalmente, o significado parte-todo.

Outra característica observada nos enunciados das situações elaboradas foi quanto ao questionamento da representação: elas indagam a representação de uma situação dada ou de composição de frações². A esse respeito, em entrevista, a Professora Marcela afirma: “*No primeiro dia, quando escrevi os problemas, pensei em diversificar o máximo e não só colocar tantas questões bobinhas como do chocolate dividido em partes iguais, mas não tinha a noção dos significados, representações e invariantes*” (Entrevista com a Professora Marcela, 2014).

À luz da Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud (1990) defende que na construção de um conceito matemático é necessário considerar um conjunto de situações que dará significado a esse conceito; um conjunto de invariantes operatórios no qual objetos e propriedades estão inter-relacionados; e um conjunto de representações que podem ser utilizadas para representar as situações. Nesse sentido, os dados aqui apresentados serviram de objeto de discussão pelas professoras durante o processo formativo. Ao refletir sobre o ocorrido, o grupo considerou que, apesar de haver certa diversidade, a aprendizagem do conceito de fração poderia dar-se de forma comprometida, pois, assim como o ocorrido com a Professora Marcela, as professoras investigadas não tinham consciência da necessidade de propor

² Apoiados em Vergnaud (2009), consideramos composição de frações como o resultado de uma adição de frações (soma ou total) ou de uma de suas parcelas.

situações que levassem os estudantes a vivenciar atividades utilizando diferentes situações, representações e invariantes.

Nessa mesma direção, descrevemos a seguir as discussões e a análise das informações sobre o observado nas respostas apresentadas pela Professora Marcela às situações por ela elaboradas. Com isso acreditamos ser possível verificar se os esquemas utilizados nos dão mais indícios acerca de seu domínio de representações e invariantes operatórios não identificados na elaboração.

As respostas registradas nos protocolos – Figura 2 – nos mostram que, de maneira geral, a professora fez uso da estratégia do cálculo de algoritmos e da ideia de partição, em que considera que em n partes iguais, cada parte pode ser representada como $\frac{1}{n}$.

As respostas nos revelam inicialmente que, independente do tipo de situação proposta, ao resolver, a Professora Marcela utilizou-se principalmente da ideia de partição, mas também se valeu da ideia de operador, o que é mais um indício de que, possivelmente, ela promovia o ensino utilizando-se, sobretudo, dos significados parte-todo e operador – Situação 3. Na Situação 2, a professora partiu de uma situação do cotidiano e fez uso da partição e de procedimentos de cálculo – Figura 2.

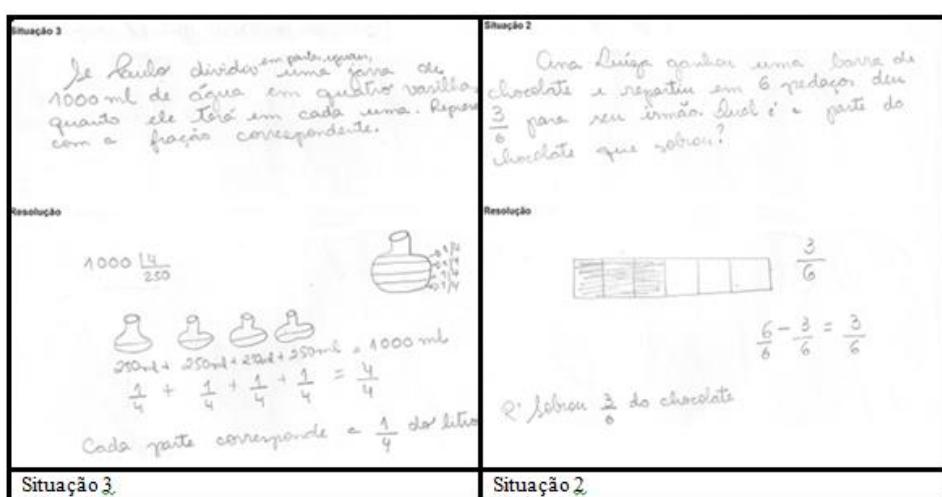


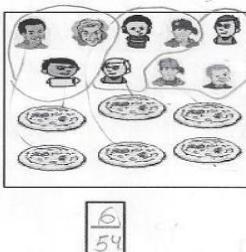
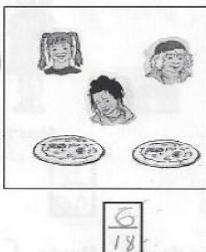
Figura 2 – Respostas da Professora Marcela em situações por ela elaboradas
 Fonte: Acervo das pesquisadoras (2014).

Analisando a proposta e a resolução da Professora Marcela na Situação 3, observamos que o problema elaborado solicitava apenas a fração que correspondia à situação descrita por meio da ideia de parte-todo, uma vez que envolvia o volume de 1000 ml, que seria “dividido em partes iguais” (4) e questionou qual a fração que representaria cada uma dessas partes. Entretanto, ao resolvê-la, a professora valeu-se tanto da ideia de operador como de partição, visto que representou a partição, as quatro frações e a quantidade, em ml que cada jarra

continha.

Além disso, ficou comprovado também, pelo questionário inicial, que a Professora Marcela encontrava dificuldades para resolver situações quociente, pois nesse tipo de situação, de maneira geral, ela fez uso de estratégias partitivas, dificultando a sua resolução e, às vezes, levando-a à representação equivocada da quantidade fracionária. Dentre outras questões, propusemos a essa professora a mesma situação proposta aos alunos e apresentada no primeiro momento deste estudo.

Ao analisarmos a resolução da professora – Figura 3 – percebemos que ela parece ter identificado a equivalência entre as quantidades de pedaços de pizzas que cada menino e cada menina receberiam, ao perceber a proporcionalidade entre as partes, sem, contudo, representar e identificar a equivalência entre as quantidades fracionárias.

 $\frac{6}{54}$	 $\frac{6}{18}$:	:
Cada menino come mais do que cada menina <input type="checkbox"/>			

Cada menino come menos do que cada menina
 Cada menino come tanto como cada menina

Porque *Dividimos cada pizza em 9 pedaços*
e os 3 meninos comem duas pizzas.

Protocolo da Professora Marcela

Figura 3 – Respostas da Professora Marcela à situação proposta no questionário inicial
 Fonte: Acervo das pesquisadoras (2014).

Percebemos que a participante dividiu os 9 pedaços de cada pizza entre 3 meninos, resultando em 3 pedaços para cada um. Como disse que cada grupo de meninos receberia 2 pizzas, concluiu que cada um receberia 6 pedaços, o que a levou a representar incorretamente a fração, pois transformou uma grandeza contínua – pizza – em discreta – pedaços de pizza.

Inicialmente a professora considerou como unidade de referência o número total de partes em que todas as pizzas foram divididas: 54 fatias, as dos meninos e 18 fatias, as das meninas e não as partes em que uma pizza foi dividida. Com isso ela mudou o referencial. Esse tipo de equívoco não foi representado pelos alunos no primeiro momento e, por isso, serviu de mote para discussão no grupo durante a sessão de formação.

Dessa forma, podemos notar que, para utilizar do esquema de partição em situações quociente, a não compreensão da necessidade de observar a unidade de referência levou a

professora a representar a fração de forma equivocada. Esses registros nos sugerem que não houve, para essa participante, nessa situação, a transferência imediata do conhecimento de parte-todo para quociente.

Durante a formação, quando discutimos as soluções apresentadas pelos alunos – primeiro momento –, as professoras tiveram, no geral, muita dificuldade de interpretar os equívocos, até mesmo porque elas também sentiram dificuldade em resolver essa questão.

Analizando o episódio a seguir, percebemos que o pesquisador, que exercia também o papel de formador, não percebeu que a Professora Marcela havia cometido tal equívoco.

A Professora Marcela inicia a discussão, ao afirmar: “*nove, cada pizza foi dividida em nove*”. Nesse momento o formador não questionou, pois deduziu que a professora tivesse distribuído a fração $\frac{1}{9}$ de pizza entre os meninos e depois, entre as meninas, perfazendo um total de $\frac{6}{9}$ de pizza, tanto para os meninos como para as meninas. Perguntou se alguém tinha utilizado outra estratégia, e a Professora Renata apresentou como ela e o seu grupo pensaram em relação às pizzas dos meninos: “*Nós dividimos cada pizza em seis [pedaços]. Aí nós contamos: são seis pizzas. Cada uma com seis pedaços dá trinta e seis pedaços, dividimos por nove crianças, deu quatro pedaços para cada uma. Mas aí ficou quatro sextos...*”.

Ao se referir às pizzas das meninas, ela afirma: “Olha, assim: o outro você dividiu em nove [pedaços], cada uma comeu um pedaço de uma pizza. Esse [apontando para uma pizza] nós dividimos em seis. Assim, dois comeram de uma pizza ...”.

Nesse momento é possível perceber que a Professora Renata não conseguiu argumentar e concluir seu raciocínio. Porém a Professora Ana, também participante do grupo de Renata, tenta apresentar outra forma de pensar:

[...] é assim: uma pizza tem seis pedaços e a outra três. Uma criança só pegou quatro; só que só sobraram dois, para a próxima [criança] pegar, mas eu acho que tudo bem [referindo-se ao fato de que dois pedaços de sextos de pizza equivaleriam a um pedaço de terços de pizza]. De qualquer jeito eles são do mesmo tamanho, os pedaços. (Gravação áudio-visual, 2014)

Quadro 1 – Episódio observado na sessão de formação
Fonte: Elaborado pelas autoras, 2018.

As professoras, ao utilizarem a partição como esquema de ação, demonstraram mais dificuldades para explicar suas estratégias para resolver situações quociente. Depois de esclarecer as dúvidas, discutir sobre a ideia de equivalência e sobre o papel da unidade de referência e analisar a classe de equivalência, a formadora ampliou a discussão sobre o significado quociente.

Nesse momento já foi possível perceber que as professoras pareciam surpresas com as ideias contidas nesse significado. Esse foi um momento em que observamos haver desequilíbrio do que era conhecido, conforme entende Piaget (2012). As participantes pareciam não “acreditar” que a fração pudesse estar associada à divisão.

Diante do exposto, a Professora Renata fez o seguinte questionamento: “*Então quociente é divisão mesmo?*” (Gravação áudio-visual, 2014). Assim, passado esse primeiro momento de discussão sobre o significado quociente, a resposta à segunda situação proposta

com esse significado foi imediata. A Professora Ana afirmou, com convicção: “É fácil: *dois bolos divididos por cinco crianças... dois quintos*”. E ainda exclamou: “*Nossa! É fácil!*”.

Considerando todas as dificuldades evidenciadas durante as discussões das situações contidas no questionário inicial em relação aos significados da fração, optamos por aprofundar, durante o processo formativo, sobretudo, as situações que envolviam a ideia de quociente. Consequentemente, a formação foi conduzida de modo a oportunizar, às professoras participantes, reflexões sobre a introdução do conceito de fração por meio desse significado.

Finalizamos o encontro, dizendo que, desde o final da década de 80³, pesquisas nacionais e internacionais afirmam que o trabalho focado somente em situações que envolvam o modelo parte-todo prejudica a compreensão do aluno acerca da ideia de que o conjunto dos números racionais é uma extensão do conjunto dos números naturais. Além disso, o modelo parte-todo induz ao processo de dupla contagem, sem garantir a compreensão da relação entre as variáveis envolvidas. Por essa razão era importante que ampliassemos nossas discussões a respeito do significado quociente e seu ensino. Assim, ao final do encontro, a Professora Marcela pediu a palavra e retomou suas dúvidas iniciais:

Tudo o que eu vi sobre fração eu vi de parte-todo, nunca tinha visto nada ligado ao quociente, ideia de divisão. Eu tive muita dificuldade para resolver aqueles problemas iniciais [referindo-se às situações apresentadas no questionário inicial a respeito do significado quociente]. O módulo que eu tive mais dificuldade foi esse de fração eu nunca havia participado de nenhum curso que discutiu fração dessa forma [referindo-se aos diferentes significados da fração], quando pedia um pensamento mais elaborado eu tinha mais dificuldade. Quando eu fui resolver o problema das pizzas, que as frações de pizza eram equivalentes, eu não conseguia fazer... Eu tentei fazer... Eu pensei numericamente - eu dividi a pizza por 9 que totalizou 54 pedaços, depois fui distribuindo em agrupamentos de três. Dividi em 54 partes, não considerei que o todo era a pizza não o total de pedaços, hoje eu sei. É bacana você admitir que agora eu sei. Eu não sabia fazer, hoje ficou claro, o legal é isso, você passa a trabalhar determinado conteúdo de forma consciente. Quando você não sabe, você acaba passando por cima, o professor tem um pouco disso: acaba meio que maquiando o ensino. Assim acho que posso ter hoje uma nova ação. (Gravação áudio-visual, 2014).

Percebemos nesse depoimento evidências de que a professora Marcela reconhece a ampliação de seus conhecimentos, não só sobre o conteúdo estudado, mas também a respeito da natureza de suas dificuldades iniciais: há indícios que ela consegue distinguir os diferentes tipos de situações e percebe que parte dos equívocos cometidos ao resolver as situações tinha relação direta com a predominância da resolução por meio da ideia de parte-todo.

Analizando na perspectiva de Schön (1983) foi possível detectar o que o autor denomina como “teorias defendidas”, pois identificamos no depoimento da professora

³ Na época nos referíamos a Campos et al. (1995), Kieren (1988), Nunes e Bryant (1997).

Marcela o que esse autor chama de reflexão sobre a ação (*reflection-on-action*), ou seja, a reconstrução mental da ação pedagógica para tentar analisá-la retrospectivamente. É possível notar neste depoimento que a professora reconhecia que sua prática se resumia a situações parte-todo.

Porém o processo formativo parece ter favorecido mudanças na prática, considerando que, ao ser questionada sobre a possibilidade de utilizar atividades realizadas durante a formação em sala de aula, tanto a Professora Marcela, como as demais professoras expressaram maior interesse por aquelas em que foram explorados o significado quociente da fração. Reiteramos que antes da formação o significado quociente não era trabalhado pelas professoras em aulas ministradas por elas.

Como Serrazina (1999, 2013), consideramos que aprender a respeito das frações nessa formação provocou na Professora Marcela uma atitude de investigação e de questionamento contribuindo para a sua autoconfiança e busca por querer aprender mais Matemática.

4.3 Terceiro momento: prática da professora um ano após o fim do curso

Passado um ano do processo formativo, retornamos a uma escola no intuito de verificar como as professoras desenvolveram a aula sobre o ensino de frações, pois acreditamos que “a formação como desenvolvimento profissional tem que estar baseada nas práticas de sala de aula” (SERRAZINA, 2013, p. 78). Iremos nos restringir aqui a apresentar a descrição e a análise do que observamos apenas na aula da Professora Marcela, uma vez que foi essa professora que reencontramos quatro anos depois.

A professora iniciou o ensino de fração por meio da exploração do livro infantil *O pirulito do pato*, de autoria de Machado (2003) e, de maneira geral, utilizou-se das mesmas estratégias trabalhadas na formação: apresentação da história em *Power point*, seguida da leitura interpretativa. Passado esse primeiro momento, ela convidou os alunos a interpretarem a história da divisão do pirulito e ofereceu papel – com desenhos representando as partes em que o pirulito havia sido dividido – e tesoura para que eles fizessem o recorte das partes, de acordo com a história.

Um aspecto nos chamou a atenção: a professora trabalhou reunindo as ideias contidas nos significados parte-todo e quociente. A Professora Marcela mostrou primeiro a fração por meio de recortes de papel e comparação de áreas e, em seguida, apresentou a fração como um quociente:

Um pirulito dividido igualmente para dois patinhos. Escrevemos 1 porque é um pirulito, depois fazemos um traço para indicar a divisão, e embaixo escrevemos 2, porque é a quantidade de patinhos que receberá os pirulitos. Esse número é lido como um meio. (Gravação áudio-visual, 2014).

Durante o ensino, ela faz alguns questionamentos às crianças: “[...] como é que eu escrevo um inteiro dividido em dois? [...] se for dividido em três? [...] dividido em quatro? [...] divido em cinco? Em seis? Se dividido em sete? E em dez?” (Gravação áudio-visual, 2014). Pelo ocorrido, consideramos, assim como Serrazina (2013), que as reflexões e as ações da professora durante o processo formativo nos revelaram o sentimento de pertença, de compreensão, de ajuda mútua, de confiança na capacidade de aprender e ensinar.

Portanto, podemos afirmar que o processo de discussão e reflexão ocorrido na formação parece ter proporcionado melhorias no que se refere tanto à compreensão do tema estudado quanto à possibilidade de aprimoramento da prática docente, pois essa professora experimentou introduzir o ensino de fração de uma forma diferente daquela que se propunha até então, ou seja, mobilizando e relacionando ideias contidas em dois significados.

4.4 Quarto momento: prática da profissional após quatro anos

Passados quatro anos e percebendo, por meio de análise de outros estudos, a dificuldade dos alunos para compreender a equivalência em situação quociente e também querendo saber se as experiências vivenciadas no processo formativo influenciaram de alguma forma na prática docente, anos depois dessa formação, decidimos procurar a Professora Marcela. Encontramos essa profissional lecionando para alunos do 5º ano na mesma escola. Pedimos a ela, que aceitou pronta e gentilmente, aplicar a questão das pizzas para seus alunos resolverem individualmente, e em seguida, concluir a atividade com eles.

Enquanto os alunos resolviam a questão, a professora caminhava entre as carteiras, fazendo questionamentos quanto às resoluções. É importante destacar que esses alunos haviam passado pelo trabalho com o conteúdo fração durante o ano. Analisando os vídeos e o relato da professora, percebemos que a representação da fração $\frac{2}{3}$ de pizza foi mais simples para os alunos do que a $\frac{6}{9}$, mas ambas foram apresentadas por eles. Após os alunos enunciarem as frações, a professora foi à lousa e, junto com eles, fez a seguinte representação:

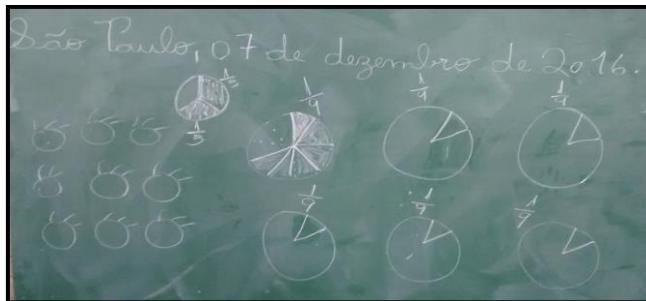


Figura 4 – Registro da professora Marcela na lousa
 Fonte: Acervo da professora, 2017.

Essas soluções foram obtidas a partir das frações unitárias $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$, a primeira fração para cada menina e a segunda para cada menino. Da mesma forma, Canova (2013) e Garcia Silva (2007) haviam observado ser esse também o esquema mais utilizado por estudantes nas salas por elas investigadas.

Em seguida, a professora trabalhou oralmente com a ideia de quociente, quando dizia aos alunos que a fração dois terços representava duas pizzas divididas para três meninas. Quando questionados se as frações representavam a mesma quantidade ou uma mais que a outra, a maior parte dos alunos se apoiou na representação parte-todo para explicar que, no mesmo inteiro, a representação de $\frac{2}{3}$ equivale a de $\frac{6}{9}$; e concluiu que tanto as meninas como os meninos comeram a mesma quantidade. A Professora Marcela confirmou, dizendo que aquele ano tinha, sim, trabalhado “*com a ideia de quanto cabe um no outro*” (Gravação áudio-visual, 2017).

A professora continuou questionando os alunos e buscando diferentes maneiras de resolver a situação. Dessa forma, ela sugeriu que os alunos realizassem os cálculos (2 dividido por 3 e 6 dividido por 9) e observassem os resultados. Assistindo aos vídeos, foi possível perceber a surpresa, a alegria das crianças, ao perceberem que ambas as contas resultavam no mesmo valor.



Figura 5 – Expressão de surpresa e alegria das crianças
 Fonte: Acervo da professora, 2017.

Até mesmo os alunos que disseram que as quantidades eram iguais, pensando na ideia

parte-todo ficaram surpresos ao observar o resultado com números decimais. Um dos alunos que achou que os meninos tinham comido mais que as meninas, ao utilizar a calculadora, ficou muito surpreso, conforme revela o diálogo a seguir.

<p>Aluno: <i>Eu nunca pensei que essa conta daria o mesmo resultado.</i></p> <p>Professora: <i>2 dividido por 3 e 6 dividido por 9 era a mesma coisa? Por que você nunca pensou?</i></p> <p>Aluno: <i>Porque na hora da divisão são dois números diferentes.</i></p> <p>Professora: <i>E se você olha apenas para as frações, você acha que um comeu mais que o outro?</i></p> <p>Aluno: <i>Eu pensei, mas, quando fiz a conta, vi que dava o mesmo resultado.</i></p> <p>Professora: <i>E você percebeu o quê?</i></p> <p>Aluno: <i>Que as duas contas dão o mesmo resultado.</i></p> <p>Professora: <i>E isso indica o quê? Que comeram mais ou menos?</i></p> <p>Aluno: <i>Mesma quantidade.</i></p>	
---	--

Quadro 2 – Episódio observado na aula da professora Marcela

Fonte: Acervo da professora, 2017.

Na entrevista, procuramos ouvir a descrição que a Professora Marcela faria sobre sua formação, especialmente sobre sua participação no processo formativo desenvolvido no âmbito do Projeto Observatório da Educação. Buscamos identificar no seu depoimento o que Schön (1983) trata como “teorias defendidas” sobre a reflexão sobre a ação. Segundo Marcela:

[...] fui procurar [o curso de magistério] porque eu trabalhava com a monitoria de ensino e vi que as práticas e as teorias não se conversavam muito, lá aprendi metodologias diferenciadas, mas não consegui aplicar nenhum conteúdo matemático por falta de conhecimento. Fui procurar pedagogia, é lá só via metodologias. Novamente esses conflitos foram para a sala de aula. Então sempre precisei buscar um pouco mais. Após o curso do Observatório, começou a ampliar meus horizontes e comecei a entender um pouquinho mais sobre o que é e como ensinar matemática para os anos iniciais numa perspectiva de construção e não transmissão. No entanto, à medida que eu ia fazer, eu fui fazendo os cursos, eu fui percebendo o quanto ainda tinha uns déficits para compreender o conteúdo. Por exemplo, em fração fazia uma grande confusão pra resolver uma coisa que poderia ser pensado de uma forma mais simples e que meu aluno pudesse também entender.

(Gravação áudio-visual, 2017).

Analizando esse depoimento segundo a perspectiva de Schön (1983), notamos que a Professora Marcela, por meio da *reconstrução mental*, analisou sua formação. Ela mostrou-se uma profissional preocupada com seu desenvolvimento profissional; que refletiu sobre o papel da formação continuada oferecida no âmbito do Projeto Observatório da Educação se conscientizando de suas limitações em relação ao conhecimento do conteúdo e pedagógico do conteúdo.

Além disso, a professora refletiu sobre a sua prática:

Fui pra sala de aula, procurei trabalhar de uma forma diferenciada e fiz mais, trouxe também o conteúdo matemático pra essas aulas. [...] Quando trabalhei o Pirulito do pato [referindo-se à aula que ela desenvolveu durante a formação] eles [os alunos] começaram a perceber: cortaram o pirulito, mediram e perceberam quanto que valia cada pedacinho e aí fizemos reflexões também a partir de que, se o denominador aumenta, o que acontece com o pedaço. Isso eu fiz anteriormente sozinha em sala de aula, depois que discutimos isso no curso. Quando vocês foram observar [referindo-se à aula observada pelas autoras, a qual ela desenvolveu um ano após a formação], nós pudemos observar outros conceitos [referindo-se à ideia de quociente trabalhada por ela]. Com o passar dos anos, à medida que eu fui trabalhando com a literatura e a matemática, eu comecei a perceber e criar novas estratégias, mas pra isso eu precisei ampliar também meus conhecimentos, precisei ir atrás; eu não parei [referindo-se ao fato de continuar estudando e frequentando cursos]. Uma coisa que eu não fazia era comparar as medidas, conversar com o aluno que a fração é também representada por um número decimal. Então, por exemplo, a criança precisa compreender em dois terços quantos pedaços de um sexto cabem lá. Então, eles cortam os pedaços e vão montando para poder fazer e compreender [...] Eu acho que o grande avanço na minha formação foi justamente desenvolver um olhar pra matemática, mas um olhar de compreensão, não só um olhar daquilo que me ensinaram pronto e acabou [referindo-se à preocupação somente com os procedimentos].

(Gravação áudio-visual com a professora Marcela, 2017).

Analizando esse depoimento, podemos confirmar a percepção de que ela considera que sua prática continuou centrada na atividade do aluno, todavia percebe que o tratamento que dá ao conteúdo é mais amplo.

Um ano após a formação, a profissional complementou a aula utilizando a literatura para inserir a ideia de quociente e, quatro anos depois, aprofundou com as crianças ideias ligadas a outras representações numéricas – números decimais e equivalência de frações. E, a confirmar o que revela Serrazina (1999, p. 163): “isto pressupõe um elevado grau de conscientização que os ajude a reconhecer as suas falhas e fraquezas e a assumir um forte desejo de as ultrapassar”, observamos ter havido por parte da professora uma relação positiva entre a autoconfiança e a ampliação dos conhecimentos específicos da área.

5 Considerações finais

Os dados aqui apresentados nos permitem inferir que a formação contribuiu para enfatizar a importância de saber mais Matemática, como descrito por Serrazina (2013).

Desde sua inserção na Educação, a participante defendia a necessidade de o professor adotar procedimentos metodológicos diferenciados. A busca de tais procedimentos no Magistério e na Pedagogia parece que não satisfez sua prática plenamente, uma vez que ela afirma que “[...] só via metodologias. Novamente esses conflitos foram para sala de aula”. Seu depoimento nos leva a supor que a professora esperava que a relação entre teoria e prática fosse estabelecida considerando também o conteúdo matemático, e isso ela parece ter

encontrado no curso de formação continuada desenvolvido há quatro anos. E sua participação no curso de formação levou-a a ampliar a reflexão sobre sua prática:

A esse respeito, concordamos com Serrazina (1998), quando afirma que o desenvolvimento profissional é propiciado por programas que refletam e discutam sobre novas concepções de como ensinar os conteúdos matemáticos e sobre as práticas desenvolvidas na sala de aula, que também contemplam o acompanhamento e o acolhimento ao professor. Assim, acreditamos que a professora deve ter se sentido acolhida e acompanhada, uma vez que ela fez outros cursos com a equipe que trabalhou com a temática frações.

Elá parece também ter aprofundado sua forma de refletir sobre sua atuação (diversidade de procedimentos metodológicos, qualidade da intervenção, compreensão da necessidade de trabalhar com diferentes significados e representações da fração, etc.). O estudo coletivo parece ter contribuído também para que ela identificasse “as suas fragilidades, mas também as suas potencialidades” (SERRAZINA, 2013, p. 78) acerca do tema em estudo, e isso a ajudou a investigar mais sobre os números racionais e seu ensino.

Ainda no que se refere à reflexão, concluímos, pautadas nos resultados aqui apresentados e discutidos, ter ocorrido de tal forma que a professora demonstrou-se capaz de enfrentar situações novas e tomar decisões apropriadas quando no desenvolvimento do ensino por ela ministrado em anos posteriores à formação.

Referências

- BEHR, M. J. et al. Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 15, n. 5, p. 323-341, 1984.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** (1^a a 4^a série). Brasília-DF, 1997.
- CAMPOS, T. M. M. Sobre o ensino e aprendizagem de frações. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, Costa Rica, ano 8, n. 11, p. 239-246, 2013.
- CAMPOS, T. M. M. et al. **Lógica das equivalências**. Relatório de pesquisa não publicado. São Paulo: PUC, 1995.
- CAMPOS, T. M. M. et al. A representação de quantidades menores do que uma unidade. **Acta Scientiae**, Porto Alegre, v. 14, p. 363-373, 2012.
- CANOVA, R. F. **Um estudo das situações parte-todo e quociente no ensino e aprendizagem do conceito de fração**. 2013. 196f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2013.
- CARDOSO, P.; MAMEDE, E. Considerações sobre o ensino-aprendizagem do conceito de fração à luz de um estudo com alunos do 6.^º ano do Ensino Básico. In: X CONGRESSO INTERNACIONAL GALEGO-PORTUGUÊS DE PSICOPEDAGOGIA, 10, 2009, Braga. **Actas...** Braga: Universidade do

Minho, 2009. p. 2863-2876. ISBN- 978-972-8746-71-1.

GARCIA SILVA, A. F. **O desafio do desenvolvimento profissional docente:** Análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, tendo como objeto de discussão o processo do ensino e aprendizagem de frações. 2007. 308f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

KERSLAKE, D. **Fractions:** Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary Mathematics project. Windsor: NFER-Nelson, 1986.

KIEREN, T. Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In: CARPENTER, T.; FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A. (Ed.). **Rational numbers:** An integration of research. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1993. p. 49-84.

KIEREN, T. **Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development.** In: J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle-grades. Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics, 1988, p. 53-92.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding:** Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 2. ed. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 2005.

MACHADO, N. J. **O Pirulito do Pato.** São Paulo: Scipione, 2003.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Understanding rational numbers and intensive quantities.** Nuffield Foundation, 2009. (Key understandings in mathematics learning, Paper 3). Disponível em: <<http://www.nuffieldfoundation.org/reports>>. Acesso em: 24 abr. 2012.

NUNES, T. et al. **Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching.** In: ANNUAL MEETING FOR THE ASSOCIATION POUR LA RECHERCHE SUR LE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES, 28-31 de janeiro de 2004, Paris. Paper.

NUNES, T. et al. **Fractions:** Difficult but crucial in mathematics learning. London Institute of Education, London: ESRC-Teaching and Learning Research Programme, 2006.

NUNES, T. et al. La compréhension des fractions chez les enfants. In: MERRI, M. (Ed.). **Activité humaine et conceptualisation.** Toulouse: Presses Universitaires du Mirail, 2007. p. 255-262.

PIAGET, J. **Seis Estudos de Psicologia.** 5. ed. RJ: Forense Universitária, 2012.

PINHEIRO, M. G. de C. **Formação de professores dos anos iniciais:** conhecimento profissional docente ao explorar a introdução do conceito de fração. 2014. 206f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2014.

SCHÖN, D. **The reflective practitioner** – how professionals think in action. London: Temple Smith, 1983.

SCHÖN, D. **Educating the reflective practitioner** – toward a new design for teaching e learning in the professions. San Francisco: Jossey Bass, 1987.

SERRAZINA, M. L. **Teacher's professional development in a period of radical change in primary mathematics education in Portugal.** 1998. 406 f. Tese (PhD in Mathematics Education) – Universidade de Londres, Lisboa: APM, 1998.

SERRAZINA, M. L. Reflexão, conhecimento e práticas lectivas em matemática num contexto de reforma curricular no 1.º ciclo. **Quadrante**, Lisboa, v. 8, n. 9, p. 139-167, 1999.

SERRAZINA, M. L. O programa de formação contínua em matemática para professores do 1.º ciclo e a melhoria do ensino da Matemática. **Revista da Investigação às Práticas** – Escola Superior de Educação, CIED, Lisboa, v. 2, n. 3, p. 75-97, set. 2013. Disponível em: <<http://repositorio.ipl.pt/bits/tream/10400.21/3099/1/O%20Programa%20de%20Forma%C3%A7%C3%A3o%20Cont%C3%ADnuo%20em%20Matem%C3%A1tica.pdf>> Acesso em: 14 abr. 2017.

STREEFLAND, L. Charming fractions or fractions being charmed? In: NUNES, T.; BRYANT, P. (Ed.). **Learning and teaching Mathematics**. An international perspective. Hove, UK: Psychology Press, 1997. p. 347-372.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. New York: Academic Press Inc, 1983. p. 127-174.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro, revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: UFPR, 2009. 322p.

**Submetido em 09 de Novembro de 2017.
Aprovado em 06 de Junho de 2018.**