



Bolema: Boletim de Educação Matemática

ISSN: 0103-636X

ISSN: 1980-4415

UNESP - Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Pesquisa Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Conceição, Joana; Rodrigues, Margarida

Estruturação Espacial no 1º Ano de Escolaridade: da estruturação local para a estruturação global em figuras 2D

Bolema: Boletim de Educação Matemática, vol. 34, núm. 67, 2020, pp. 354-374

UNESP - Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Pesquisa Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

DOI: 10.1590/1980-4415v34n67a01

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291265340003>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais informações do artigo
- Site da revista em redalyc.org

redalyc.org
UAEM

Sistema de Informação Científica Redalyc

Rede de Revistas Científicas da América Latina e do Caribe, Espanha e Portugal

Sem fins lucrativos acadêmica projeto, desenvolvido no âmbito da iniciativa
acesso aberto

Estruturação Espacial no 1º Ano de Escolaridade: da estruturação local para a estruturação global em figuras 2D

Spatial Structuring in 1st Grade: from local structuring to global structuring

Joana Conceição*

 ORCID iD 0000-0002-4295-0368

Margarida Rodrigues**

 ORCID iD 0000-0003-4658-6281

Resumo

Neste artigo, temos como objetivo compreender como os alunos do 1.º ano progridem na estruturação espacial de figuras bidimensionais compostas por quadrados (pentaminós), analisando as estratégias utilizadas por esses alunos para compor pentaminós, para determinar a congruência entre pentaminós e a antecipação de compostos, e o papel dos desenhos das construções. Os dados foram recolhidos durante a primeira sequência de tarefas do ciclo um, respeitante à implementação de uma experiência de ensino de uma investigação baseada em design. Foram usadas as técnicas de recolha de dados de observação participante e recolha documental. Os resultados mostram que, inicialmente, os alunos constroem manipulando as peças individualmente por tentativa e erro, estratégia associada à estruturação local. Progressivamente, vão evoluindo na sua capacidade de coordenar componentes e compostos, impulsionados pelas relações que estabelecem na manipulação do material e na reflexão que vão fazendo na passagem do material para o desenho. À medida que vão estabelecendo relações mais complexas, baseadas na coordenação de componentes e compostos, vão sendo também capazes de construir com antecipação. A construção com antecipação, baseada em imagens mentais prévias, sugere o uso da operação integração, operação associada à estruturação global. Utilizam o movimento de rodar e inverter inicialmente com materiais e, depois, mentalmente para determinar a congruência entre dois pentaminós e para antecipar o resultado da manipulação de pentaminós.

Palavras-chave: Estruturação Espacial. Coordenação. Integração. Desenhos. Movimentos Mentais.

Abstract

In this paper, we aim to understand how 1st grade students develop their spatial structuring of 2D figures composed by squares (pentominoes) by analyzing students' strategies to compose pentominoes, to determine the congruency between pentominoes and to anticipate composites, and the importance of drawing the constructions. Data was collected during the implementation of the first sequence of tasks, from cycle two, of a design-based research. Results show that, at first, students build pentominoes by manipulating squares individually and by trial and error, which is a strategy associated to local structuring. Gradually, students evolve in their capacity of coordinating components and composites, stimulated by the relationships they establish and reflect upon between manipulatives and drawings. As they establish more complex

* Mestre em Educação Matemática na Educação Pré-escolar e nos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico pela Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa (ESELX-IPL). Doutoranda em Educação (especialidade Didática da Matemática), no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IE-UL), Lisboa, Portugal. Endereço para correspondência: Alameda da Universidade, Lisboa, Portugal, CEP: 1649-013. E-mail: conceicao@campus.ul.pt.

** Doutora em Educação (especialidade Didática da Matemática) pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL). Professora Coordenadora na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa (ESELX-IPL), Lisboa, Portugal. Endereço para correspondência: Campus de Benfica do Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa, Portugal, CP: 1549-003. E-mail: margaridar@eselx.ipl.pt.

relationships, based on the coordination of components and composites, they start to be able to build with anticipation. Building with anticipation, based on mental images, suggests the use of integration operation, which is associated with global structuring. Students use movements as rotating and flipping, at first, with manipulatives and later mentally to determine the congruency between two pentominoes and to anticipate the result of pentominoes manipulation.

Keywords: Spatial Structuring. Coordination. Integration. Drawings. Mental Movement.

1 Introdução

Sabemos que as crianças começam por ter uma percepção global das figuras geométricas sem conseguirem identificar componentes (BATTISTA, 2012). À medida que identificam componentes e relações entre esses componentes, começam a aprofundar a sua compreensão acerca das propriedades das figuras, passando da apreensão global para um entendimento mais profundo da sua natureza e estrutura, ainda que, inicialmente, seja a um nível essencialmente visual. Para que esta passagem aconteça, é preciso oferecer às crianças experiências de aprendizagem que lhes permitam construir imagens mentais essenciais para raciocinar a um nível mais formal. A estruturação espacial, enquanto ato mental de criar uma organização ou forma para um objeto ou conjunto de objetos (BATTISTA, 2008), pela identificação de componentes, pelo estabelecimento de relações entre componentes em compostos e pelo estabelecimento de relações entre componentes, compostos e o todo, pode permitir fazer essa ponte.

Numa fase inicial, um trabalho de exploração das estruturas das figuras, que possibilite aos alunos reconhecer componentes e estabelecer e compreender relações entre componentes e entre diferentes figuras, vai lhes permitir começar a construir modelos mentais que representem estruturas de figuras. Tarefas que envolvam construções e operações com figuras (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN; BUYS, 2005) têm potencial relevante para permitir aos alunos construir essas relações. A passagem da manipulação física para a representação mental assente na estruturação espacial dos objetos constitui uma base importante para a estruturação geométrica.

Van Nes e Van Eerde (2010) reconhecem a importância da estruturação espacial, relacionando-a com o desenvolvimento do sentido de número, numa fase inicial, quando os alunos identificam certas quantidades pela sua estrutura espacial ou quando decompõem essas quantidades em números de referência que os ajudam a agilizar o processo de contagem. Por isso, a estruturação espacial, para além da sua importância no âmbito da Geometria, oferece contributos fundamentais para a aprendizagem dos números através do raciocínio espacial.

Dada a importância da estruturação espacial na construção de modelos mentais que representem as relações espaciais presentes em figuras, importa perceber de forma mais aprofundada como é que este processo acontece, em particular nos primeiros anos de escolaridade. Além de os estudos, neste âmbito e nível de ensino, serem escassos, o seu desenvolvimento é importante, pois é, também, aqui, que os alunos

começam a ser capazes de passar de uma percepção global para a identificação de componentes e para o estabelecimento de relações.

Neste artigo, temos como objetivo compreender como é que os alunos do 1.º ano progridem na estruturação espacial de figuras bidimensionais compostas por quadrados (pentaminós), procurando responder às seguintes questões: Que estratégias utilizam para compor pentaminós?; Que relações estabelecem para determinar a congruência entre figuras e para antecipar compostos?; Que relevância têm os desenhos das construções nessa estruturação?

2 Estruturação espacial

De acordo com Battista e Clements (1996), a estruturação espacial consiste no ato mental de criar uma organização ou forma para um objeto ou conjunto de objetos, ou seja, constitui uma forma de abstração que permite criar uma representação mental de uma estrutura.

Battista (2008) apresenta uma proposta para o desenvolvimento do raciocínio geométrico por níveis de estruturação. Raciocínio geométrico aqui é entendido como a “invenção e o uso formal de sistemas conceptuais para investigar as formas e o espaço” (BATTISTA, 2007, p. 843). Estes níveis são apresentados por ordem crescente relativamente ao grau de sofisticação e consistem na:

1. Estruturação espacial (os alunos identificam os componentes dos objetos, combinam componentes em compostos, estabelecem relações entre componentes e compostos entre si e entre eles);
2. Estruturação geométrica (os conceitos geométricos são usados para descrever a estruturação espacial);
3. Estruturação lógica/axiomática (organização formal dos conceitos geométricos).

A proposta apresentada por Battista (2008) foca-se no desenvolvimento do raciocínio geométrico, mas parece estar subentendida a importância de valorizar, pelo menos numa fase inicial, o desenvolvimento do raciocínio espacial. Battista (2007) define raciocínio espacial como a “capacidade de ‘ver’, examinar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações, envolvendo gerar e analisar imagens, transformar e operar com imagens, e colocá-las ao serviço de outras representações mentais” (BATTISTA, 2007, p. 843).

De acordo com Battista (2007), o raciocínio espacial está subjacente à maior parte do raciocínio geométrico, considerando que a construção de sistemas geométricos formais se estrutura a partir de experiências espaciais, associadas ao raciocínio espacial, mas não se esgota nesta dimensão. Para Battista (2007), o raciocínio espacial constitui a base e permite desenvolver ferramentas cognitivas importantes para a análise geométrica formal. Por isso, desenvolver uma compreensão e apropriação das estruturas que possam

suportar o uso de conceitos e definições com compreensão é um trabalho que deve ser desenvolvido nos primeiros anos.

Mamolo, Ruttenberg-Rozen e Whiteley (2015) afirmam que o raciocínio espacial tem assumido, na literatura, várias designações: raciocínio espacial, raciocínio visual e raciocínio visuoespacial. Whiteley, Sinclair e Davis (2015) indicam que os termos visualização, raciocínio visuo-espacial e raciocínio espacial têm sido usados, nos trabalhos de investigação, algumas vezes como sinônimos, outras vezes apresentando algumas variações ou ainda como distintos. Neste estudo, adotamos a definição de Battista (2007) para raciocínio espacial.

O processo de estruturação espacial está associado ao reconhecimento de componentes de uma figura que podem ser estabelecidos como unidades, ao estabelecimento de relações entre esses componentes para formar unidades compostas e ao estabelecimento de relações entre essas unidades compostas que podem ser duplicadas ou combinadas para formar o todo (BATTISTA; CLEMENTS, 1996). Sarama e Clements (2009) referem que o trabalho com figuras bidimensionais deve procurar levar os alunos a aprofundarem a compreensão das figuras, através da análise das relações que existem entre as partes e o todo dessas figuras. Estas relações parecem incidir nas relações presentes na estrutura das figuras e, por isso, estão ligadas à estruturação espacial. A construção de representações mentais baseadas nestas relações é fundamental para raciocinar sobre figuras bidimensionais.

2.1 Estruturação local e estruturação global

Segundo Battista e Clements (1996), a estruturação espacial implica uma série de relações que é preciso estabelecer e que vão progredindo para um nível de abstração cada vez maior. Desta forma, a estruturação pode ser local ou global, dependendo da capacidade de coordenar e integrar componentes e compostos das figuras.

Para Battista e Clements (1996), a coordenação e a integração constituem duas operações cognitivas que assumem uma importância fundamental no processo de estruturação espacial. A coordenação tem a ver com a capacidade de pôr em interrelação diferentes partes de um objeto, combinando-as. Assume diferentes níveis de sofisticação, sendo que a progressão depende do aprofundamento das relações que vão se estabelecendo através das ações sobre os objetos. Assim, é possível que os alunos sejam capazes de coordenar diferentes partes de uma figura sem ainda conseguirem estabelecer uma relação entre essas partes e o todo. No contexto da investigação realizada por Battista, Clements, Arnoff, Battista e Borrow (1998), a coordenação é particularmente associada às construções retangulares como forma de estruturar arranjos retangulares, em que as diferentes vistas ortogonais estão associadas ao comprimento e à largura. No entanto, constituindo uma operação que permite interrelacionar espacialmente diferentes partes de uma figura, a

coordenação poderá ter implicações na estruturação de outros tipos de figuras bidimensionais para além das estruturas retangulares.

De acordo com Battista et al. (1998), a operação cognitiva associada à integração utiliza elementos previamente abstraídos ou estruturados, interrelacionando-os para fazer corresponder um modelo mental a um objeto. Para isso, é necessário reconhecer diferentes partes e coordená-las; daí que a operação de integração implique a coordenação. Battista e Clements (1996) referem que, quando os alunos ainda não têm modelos mentais já construídos que possam corresponder à estrutura de um objeto sobre o qual se está a trabalhar, é necessário recorrer a outras estratégias de estruturação. Essas estratégias estão relacionadas com as transformações de imagens mentais que já possuem e que permitem gerar novos modelos mentais mais adequados.

É, assim, necessário que os alunos tenham experiências de aprendizagem que permitam conhecer a estrutura de diferentes objetos para formar modelos mentais adequados (BATTISTA; CLEMENTS, 1996), nomeadamente experiências de aprendizagem que contemplam a manipulação física e mental desses objetos. Dado que a estruturação é, de acordo com Battista e Clements (1996), baseada na ação dos alunos, a relação entre a ação física (manipulação de objetos) e a ação mental (ações mentais e reflexão sobre as ações físicas e mentais) tem uma relevância especial. Através da combinação destas ações e da reflexão que vai incidindo sobre elas, os alunos vão conseguindo refinar os seus modelos mentais (BATTISTA et al., 1998) e desenvolver a forma como estruturam o espaço.

A operação de integração implica a antecipação. Presmeg (2006) afirma que, na criação de um arranjo espacial, há uma imagem visual preconcebida que guia o processo de construção. Esse processo parece estar relacionado com a antecipação referida por Sarama e Clements (2009), onde já há uma intencionalidade clara no processo de construção, baseada na existência de imagens mentais prévias e de relações já estabelecidas. Sarama e Clements (2009) atribuem a capacidade de antecipação a níveis de desempenho, respeitantes à composição e decomposição de figuras bidimensionais, mais complexos, o que implica ter já alguma estruturação espacial de um determinado objeto para mobilizar as relações presentes nessa estruturação noutras situações semelhantes.

Como referido, as relações que se estabelecem entre as diferentes partes que compõem os objetos podem resultar de uma estruturação local ou de uma estruturação global. Quando há uma estruturação dos objetos, considerando as relações entre componentes em compostos, mas as relações entre os compostos e o todo ainda não são percecionadas verifica-se uma estruturação local (BATTISTA; CLEMENTS, 1996). No caso da estruturação local, nem sempre se verifica uma construção com antecipação e a coordenação pode estar ausente. A coordenação pode ser referente a componentes ou a compostos que se coordenam entre si, à coordenação de componentes e compostos sem uma relação entre as partes e o todo, porque ainda não há um modelo global, ou à coordenação entre componentes, compostos e o todo. No caso da estruturação local, a

operação de integração não está ainda presente. A estruturação global verifica-se quando já há uma percepção das relações entre componentes, compostos e a figura como um todo, sendo evidente a sua coordenação e a integração. O processo de estruturação espacial deve permitir a evolução de uma estruturação local para uma estruturação global (BATTISTA; CLEMENTS, 1996).

2.2 Composição e decomposição

Clements e Sarama (2014) propõem uma trajetória de aprendizagem para a composição e decomposição de figuras 2D que é um aspecto ligado à estruturação espacial. Esta trajetória apresenta uma progressão em que são evidentes as relações entre componentes entre si ou entre componentes e o todo, estando, por isso, ligada ao processo de estruturação espacial, nos anos iniciais. Dada a escassez de trabalhos, neste nível de ensino, incidente na estruturação espacial, este quadro oferece um contributo importante para percebermos melhor o tipo de relações que as crianças são capazes de estabelecer.

(0-3 anos) Pré-compositor	Manipula figuras sem conseguir combiná-las para compor uma figura maior. Decompõe por tentativa e erro.
(4 anos) Juntador de peças	Compõe figuras onde cada peça corresponde a uma parte da construção.
(5 anos) Construtor de figuras	Combina peças para compor uma parte da construção, por tentativa e erro. Escolhe figuras pelo aspecto global ou medida dos lados.
Decompositor simples	Decompõe figuras simples que têm indícios para a decomposição.
Compositor de figuras	Compõe figuras com antecipação. Escolhe peças tendo em conta os ângulos e os comprimentos dos lados. Usa os movimentos de rodar e inverter para posicionar as peças.
(6 anos) Compositor de substituição Decompositor de figuras	Compõe figuras a partir de peças mais pequenas e usa a tentativa e erro para trocar partes compostas. Decompõe figuras usando imagens mentais.
(7 anos) Compositor de figuras iterativo	Constrói e duplica figuras compostas (unidades superordenadas) compreendendo a equivalência entre a peça grande e as peças pequenas.
Decompositor de figuras com imagens mentais.	Decompõe figuras com antecipação para construir novas figuras.
(8 anos) Compositor de figuras com unidades superordenadas Decompositor de figuras com unidades superordenadas	Constrói e aplica unidades superordenadas. Decompõe figuras usando novas imagens mentais ou formas de composição já conhecidas.

Quadro 1 – Trajetória de aprendizagem para a composição e decomposição de figuras 2D

Fonte: CLEMENTS; SARAMA (2014).

Nesta trajetória, verificamos que há uma progressão da manipulação com materiais para a manipulação mental em que as relações entre componentes e o todo vão sendo cada vez mais complexas e com um nível de abstração maior. A partir dos cinco anos, as crianças começam a compor figuras com

antecipação, embora não seja claro o tipo de figuras que conseguem compor.

O tipo de movimentos que as crianças executam para estabelecer relações entre (i) componentes em compostos, (ii) compostos e (iii) componentes, compostos e o todo, para fazer corresponder as peças a uma orientação ou determinar a congruência é um aspeto de particular interesse para o estudo da estruturação espacial. Clements e Sarama (2014) propõem uma trajetória de aprendizagem para os movimentos de deslizar, rodar e inverter. Estes movimentos constituem experiências espaciais importantes que poderão ser a base visual necessária para a aprendizagem das isometrias, em anos mais avançados. Também aqui podemos observar uma progressão que vai da manipulação de materiais para a manipulação de imagens mentais com antecipação.

0-3 anos	Consegue mover formas para uma localização.
4 anos	Roda mentalmente objetos em tarefas simples.
5 anos	Usa os movimentos corretos com apoio perceptual, mas nem sempre de forma precisa em direção e quantidade.
6 anos	Executa movimentos de deslizar e inverter, horizontal e verticalmente, usando materiais manipuláveis. Executa voltas de 45°, 90° e 180°.
7 anos	Executa movimentos de deslizar e inverter na diagonal. Executa movimentos de deslizar e rodar sem apoio perceptual.
8+ anos	Prevê o resultado de movimentar figuras usando imagens mentais.

Quadro 2 – Trajetória de aprendizagem para os movimentos de deslizar, rodar e inverter.

Fonte: CLEMENTS; SARAMA(2014).

Nesta trajetória, o uso do movimento de deslizar materiais parece ser aquele que as crianças conseguem executar mais cedo, seguido do movimento de rodar e, por fim, inverter. Estes movimentos são executados numa primeira fase com o apoio de materiais manipuláveis e, mais tarde, mentalmente.

As duas trajetórias oferecem uma visão acerca do tipo de relações esperadas para as crianças, nos anos iniciais, permitindo compreender melhor como ocorre essa progressão.

3 Desenhos

A par da manipulação de materiais, também os desenhos, enquanto registo de construções bidimensionais, parecem ter um papel importante no desenvolvimento da estruturação espacial dos alunos.

Piaget e Inhelder (1967) assumem os desenhos como um ato de representar que emerge através da atividade motora e perceptual intencional. Afirmam que “a construção do espaço começa num nível perceptual e continua para o nível da representação” (p. 36), mas, para isso, a observação por si só não é suficiente. Tem de haver uma intenção por trás da observação.

Thom e McGarvey (2015) sugerem que a forma como os alunos desenham as construções geométricas pode constituir um modo de pensar, tendo um papel ativo no desenvolvimento daquilo que

chamam de sensibilidade geométrica dos alunos. De acordo com estas autoras, a forma como os alunos desenham, a forma como lidam com os aspectos matemáticos dos seus desenhos e as concepções que vão emergindo com os desenhos contribuem para a compreensão das relações presentes nas figuras. Desta forma, estão a passar de um nível perceptual para o nível da representação. Assim, à medida que vão desenhando e refletindo sobre os aspectos particulares do seu desenho, enquanto registo de um objeto geométrico, os alunos vão aprofundando a compreensão acerca da estrutura e das relações espaciais nele contidas. Ao desenhar figuras específicas, as crianças estão a tentar representar essas mesmas figuras e esse processo é importante e benéfico para as crianças (SARAMA; CLEMENTS, 2009).

Os desenhos, a par dos materiais manipuláveis e das representações mentais constituem formas de representar os objetos geométricos. Trabalhar com diferentes representações permite aos alunos estabelecer relações entre essas representações aprofundando a sua compreensão acerca do conceito ou objeto geométrico em estudo. Como referem Thom e McGarvey (2015), “a forma como os alunos se envolvem a desenhar permite-lhes trabalhar de forma conectada com, em e através de diferentes dimensões” (p. 474).

4 Metodologia

O trabalho apresentado, neste artigo, insere-se numa investigação qualitativa que segue a modalidade de investigação baseada em design, procurando-se com esta modalidade “desenvolver teorias acerca do processo de aprendizagem e dos meios desenhados para suportar essa aprendizagem” (GRAVEMEIJER; COBB, 2006, p. 75), em miniciclos contínuos de design, implementação e análise que, por sua vez, ocorrem em ciclos mais alargados. Os dados aqui apresentados foram recolhidos durante a implementação da primeira de três sequências de tarefas respeitantes à experiência de ensino. Esta primeira sequência, de seis tarefas, procurou incidir nas relações entre unidades de composição, considerando relações de posição entre essas unidades, e no estabelecimento de unidades compostas. Para isso, ao longo desta sequência, foram propostas tarefas aos alunos, com polídrons e com pentacubos, que tinham como objetivo levá-los a estabelecer relações entre unidades simples (quadrados ou cubos), ou compostas (usando as unidades anteriores).

A recolha dos dados foi feita numa turma com 23 alunos (6 – 7 anos de idade) do 1.º ano do Ensino Básico de uma escola pública de um concelho da área metropolitana de Lisboa. A escolha da turma teve como critério a valorização da comunicação matemática na sala de aula e o trabalho colaborativo. Destes 23 alunos, foram selecionados dois pares (Gil e Raquel; Maria e Rui), que habitualmente verbalizam os seus raciocínios, para serem objeto de registo por áudio e vídeo, durante a exploração autónoma das tarefas. Contudo, durante a implementação da primeira sequência de tarefas um destes alunos (Rui) pediu transferência para outra escola, tendo sido substituído por uma colega (Dalila). Foram também considerados e videogravados os contributos de outros alunos, em situação de discussão coletiva (Daniel e Gastão). Para

além da técnica de observação participante, procedeu-se à recolha documental de produções dos alunos da turma, realizadas no decurso da implementação das tarefas referentes à experiência de ensino que foram também consideradas na nossa análise (Bruno, Sara, Frederico e Íris).

Esta investigação respeita, entre outros critérios éticos, a confidencialidade e o consentimento informado dos participantes, tendo obtido autorização da Direção Geral de Educação.

Neste artigo, vamos analisar as estratégias utilizadas pelos alunos, na resolução da tarefa 1, *Pentaminós*, na qual os alunos tinham de construir diferentes pentaminós, usando quadrados encaixáveis e, na tarefa 6, *Antecipar e selecionar*, na qual os alunos tinham de prever o resultado da manipulação de dois pentaminós. Na tarefa 1, os alunos tinham de, por um lado, descobrir figuras diferentes usando cinco quadrados do material *Polydrons* e, por outro lado, conseguir determinar a congruência entre duas construções para que não as repetissem. Ao longo do trabalho de construção, os alunos deviam ir registando as suas construções em papel com malha quadriculada. Na tarefa 6, os alunos tinham de antecipar o resultado da manipulação de dois pentaminós, usando o movimento mental de rodar ou de inverter e rodar, e selecionar o resultado da junção dos dois pentaminós apresentados, assinalando a opção que considerariam possível, dentro de um conjunto de quatro opções (Figura 1). Os alunos poderiam depois confirmar as suas previsões, utilizando materiais manipuláveis.

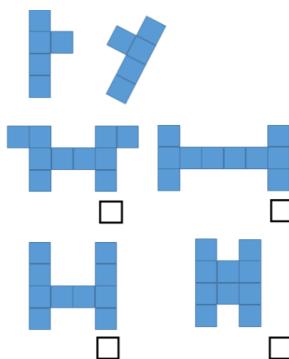


Figura 1 – Imagens apresentadas na tarefa 6
Fonte: Construção das autoras (adaptado de BRUCE; HAWES, 2015).

A escolha de *Polydrons* para a realização destas tarefas justifica-se por os alunos poderem formar unidades compostas no decurso da tarefa e poderem manipulá-las sem que estas se desmontassem. As aulas em que foram propostas estas tarefas foram estruturadas em três momentos: introdução da tarefa, trabalho autónomo dos alunos e discussão coletiva.

Para a construção do quadro de análise, adotamos uma abordagem dedutiva ao formular categorias a partir da proposta de Battista e Clements (1996). Entendemos a identificação de unidades, estabelecimento de relações em compostos e estabelecimento de relações entre unidades, compostos e o todo como subníveis de progressão associados à estruturação local ou à estruturação global.

O reconhecimento de componentes pressupõe um nível prévio em que as figuras são apreendidas de uma forma global, tal como proposto por van Hiele (1986), relativamente aos níveis de desenvolvimento do

raciocínio geométrico. Embora não referido em Battista (2008), contemplamos esse aspecto no nosso quadro. No subnível E2, estão contemplados dois indicadores semelhantes que se referem a uma estruturação por tentativa e erro ou por antecipação. Dado que ambos se referem à estruturação de componentes, optamos por incluí-los no mesmo subnível, mesmo tendo níveis de abstração diferentes, mas estabelecendo uma relação hierárquica entre eles. Para um melhor entendimento dos processos associados a estes subníveis, incluímos aspectos emergentes da própria análise dos dados que denominamos como indicadores/estratégias, utilizando aqui uma abordagem indutiva.

Níveis	Subníveis	Indicadores/estratégias
Apreensão global	E0 - Reconhecer pelo aspetto global	Considerar congruentes construções diferentes que apresentam um aspetto global semelhante.
Estruturação local	E1- Reconhecer componentes	Reconhecer componentes, mas sem estabelecimento de relações entre esses componentes.
		Construir utilizando unidades simples.
	E2 - Estabelecer relações entre componentes	Descrever semelhanças entre partes da mesma figura ou entre figuras.
		Manter uma unidade composta e manipular apenas algumas partes da construção, por tentativa e erro.
	E3 - Estabelecer relações entre compostos por coordenação	Manter uma unidade composta e manipular apenas algumas partes da construção, por antecipação.
Estruturação global	E4 - Estabelecer relações entre componentes, compostos e o todo por coordenação	Utilizar os movimentos de deslizar, rodar e inverter com recurso a materiais manipuláveis para determinar a congruência entre duas construções.
	E5 - Estabelecer relações entre componentes, compostos e o todo por integração	Relacionar diversas unidades compostas.
		Coordenar a posição e orientação de componentes e compostos para formar o todo.
		Rodar e inverter mentalmente construções. Construir por antecipação.

Quadro 3 – Quadro de análise para os níveis de estruturação espacial
Fonte: Construção das autoras (2019).

4 Resultados

4.1 Construção de pentaminós

Começamos por apresentar os resultados referentes à tarefa 1. Apresentamos as estratégias de estruturação dos alunos que são também as suas estratégias de construção.

4.1.1 Construção com unidades simples

Inicialmente, todos os alunos manipularam os quadrados, que iam juntando um a um para formar

figuras, sem parecerem antecipar relações entre os quadrados para além de uni-los pelos lados congruentes. A falta de uma antecipação ou de um plano da construção levou muitos alunos a construírem repetidamente o pentaminó B4 (Figura 2), registando-o com diferentes posições. Aparentemente este pentaminó foi mais intuitivo. A construção com unidades simples integra o subnível E1 do nosso quadro e a manipulação destas unidades permitiu aos alunos irem estabelecendo uma série de relações espaciais entre as peças, importantes para a construção com unidades compostas. O ato de desenhar as construções parece também ter tido um papel importante neste sentido.

Bruno foi sempre desmontando as suas construções em peças unitárias, não tendo chegado a manipular partes compostas. Contudo, a forma como registou as suas construções parece evidenciar que algumas dessas relações foram sendo estabelecidas. Na Figura 2, podemos ver o registo de Bruno.

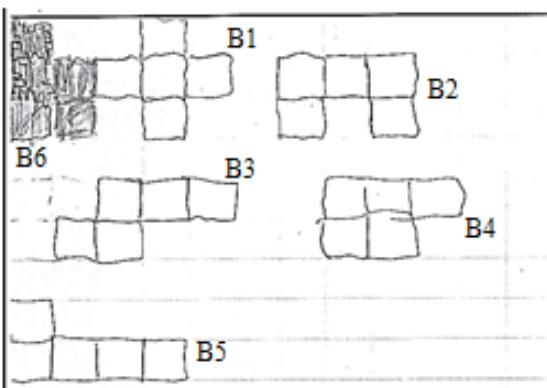


Figura 2 – Registo de Bruno para os pentaminós
Fonte: Produção dos alunos, 2018.

Nos primeiros registos realizados por Bruno (B1, B2 e B3), cada quadrado parece ter sido desenhado individualmente (subnível E1). No entanto parece que, à medida que Bruno foi manipulando as peças e registando, foi abstraindo algumas relações entre as peças, passando essa ideia para o registo. A forma como o aluno registou algumas construções evidencia já um agrupamento de peças em unidades compostas (subnível E2). Nos registos B4 e B5, assim como no registo de vídeo, é possível ver que o desenho de, pelo menos, três unidades foi contínuo, tendo sido posteriormente discriminadas as unidades no seu interior.

4.1.2 Construção com unidades compostas

Rui, tal como outros colegas, começou por construir cada pentaminó peça a peça e, sempre que começava uma nova construção, desmontava a anterior em peças unitárias. No entanto, à medida que foi trabalhando com os *Polydrons*, Rui parece ter começado a estabelecer relações entre as peças, já não precisando desmontar totalmente cada construção para transformá-la em outra. Na Figura 3, é possível ver como Rui decompôs um pentaminó em duas partes ($2 + 3$), separando em seguida os dois quadrados e colocando-os em lados opostos da parte central que permaneceu composta da construção anterior.

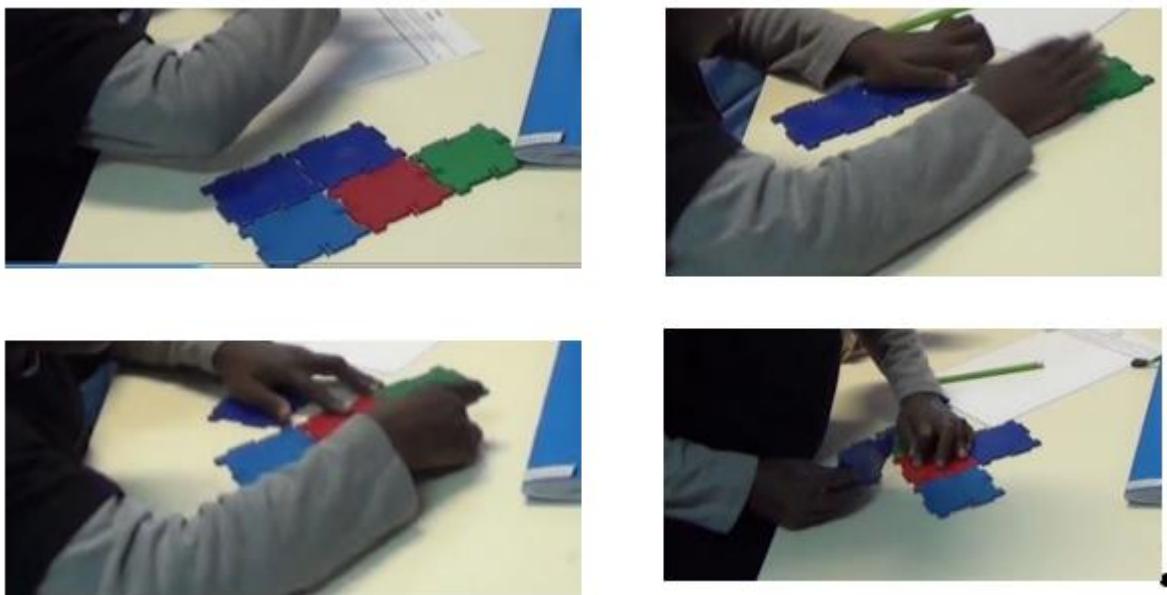


Figura 3 – Construção de Rui, utilizando unidades compostas
 Fonte: Produção dos alunos, 2018.

A construção inicial a partir da manipulação individual das peças pode indicar que estava a construir por tentativa e erro, sem um plano de construção e, por isso, as relações estabelecidas entre as peças eram locais com o reconhecimento de unidades de construção (subnível E1). À medida que foi trabalhando com o material, começou a criar relações entre as peças formando unidades compostas (subnível E2) comuns a diferentes figuras, podendo assim usar uma base comum e manipular apenas algumas partes. Ainda que se trate de uma estruturação local, a criação de unidades compostas revela que este aluno conseguiu estabelecer relações entre essas unidades, um tipo de relações mais abstrato e, por isso, mais sofisticado face à primeira parte, parecendo mostrar alguma antecipação na estruturação das figuras.

A Figura 4 apresenta o registo de Gil que o utilizou para explicar como estruturou as suas construções, durante o momento de discussão coletiva.

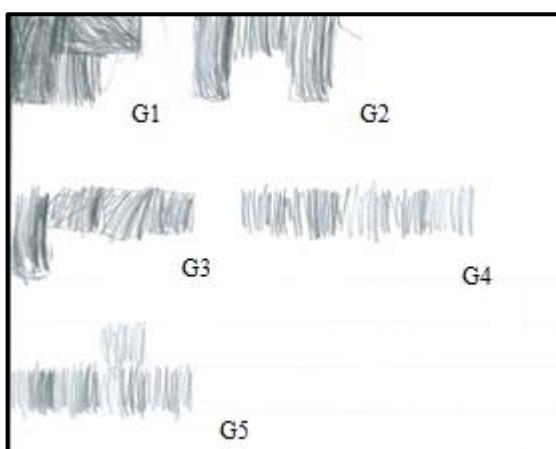


Figura 4 – Registo de Gil para os pentaminós
 Fonte: Produção dos alunos, 2018.

Referindo-se à construção G5:

Gil: Esta aqui eu pensei logo. (G5) Como... Como... Esta aqui é que foi mais difícil (G5). Eu estava a pensar quatro mais uma e ficava igual a esta (G1), por isso fiz diferente.
(Gravação em vídeo da explicação de Gil, 2018).

A descrição de Gil parece remeter para uma estratégia de composição com base em relações numéricas (4+1), reconhecendo essa relação em, pelo menos, duas construções. Por isso associou a construção G5 à construção G1 na qual essa relação é evidente. Para conseguir uma figura diferente, Gil pareceu usar a mesma relação numérica (4+1) com outra disposição. É essa relação que parece estar presente quando o aluno diz “Esta aqui eu pensei logo.”, mas, como já tinha essa relação noutra construção, procurou uma outra forma de usar a mesma relação numérica. Gil continuou, explicando o processo que utilizou para transformar a construção G3 na construção G2:

Gil: Temos esta (G3), eu quis fazer uma pistola, mas eu fiz diferente (relativamente à G1 que também tem uma forma de pistola), eu acho. Esta aqui (G3) é igual a esta (construção G2), porque não tive de desmontar, foi só pôr um aqui à frente.
(Gravação em vídeo da explicação de Gil, 2018).

A explicação do aluno evidencia que foi capaz de estabelecer relações entre ambas as figuras com base numa parte composta que identificou como comum. Embora refira que as duas construções são iguais, provavelmente foi a sua forma de exprimir o processo de construção, reconhecendo uma parte semelhante na estrutura. Por isso, foi capaz de explicitar de forma clara a diferença entre as duas construções que, por sua vez, constitui o processo que o aluno utilizou para transformar a construção G2 na construção G3: “*Foi só pôr um aqui à frente*”, construção em que manteve o composto de dois quadrados à esquerda e deslocando um dos quadrados para a parte superior à direita.

O grupo de construções G1, G2, G3 e G4 evidencia aspectos semelhantes entre cada construção: há, pelo menos, uma base de três quadrados que se manteve, havendo depois dois quadrados que vão mudando de lugar: primeiro o da direita da linha de baixo (G1) que avança uma posição para a direita (G2) e depois passa para a linha de cima (G3) e depois o de baixo da esquerda que também passa para a linha de cima formando um pentaminó com cinco quadrados em linha (G4). Este registo, tão sistemático, parece evidenciar que, aqui, a manipulação das peças não foi aleatória, pelo contrário, houve uma monitorização do processo que parece ser bastante clara. Nos registos, o aluno também não se preocupou em individualizar sempre os quadrados, o que também é revelador de o aluno olhar para os compostos nas suas construções. Por exemplo, G4 apresenta uma barra linear sem a discriminação dos quadrados constituintes. Isto, aliado ao facto de o aluno verbalizar que quis fazer uma pistola, parecendo, por isso, ter já um plano de construção mental, parecem indicar que, neste caso, estamos perante uma estruturação global (subnível E4).

4.2 Discutindo a congruência

Ao longo da tarefa, quase todos os alunos registaram construções iguais com posições diferentes. Conhecer e compreender as estratégias que os alunos utilizaram para determinar a congruência de duas figuras permite-nos também perceber como é que estruturaram essas mesmas figuras, nomeadamente, que relações estabeleceram quer entre componentes de uma mesma figura quer entre componentes de duas figuras.

Na Figura 5, que apresenta o registo de Dalila, verificamos a existência de vários desenhos que correspondem à mesma construção (D1, D2 e D3), embora com posições diferentes. Dalila explicou como pensou e por que razão considerou estes pentaminós diferentes.

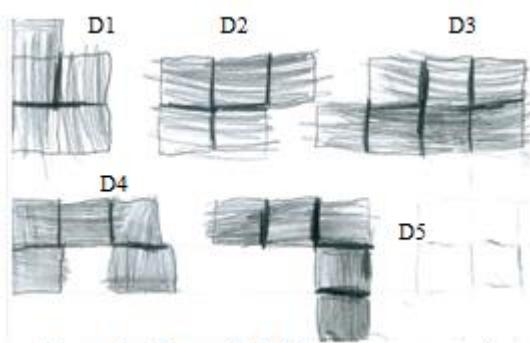


Figura 5 – Registro de Dalila para os pentaminós
 Fonte: Produção dos alunos, 2018.

Para explicar como construiu o D1 e o D2, Dalila disse:

Dalila: 3 e depois 2 (D1) (apontando verticalmente, no sentido cima baixo) e depois ficou parecido com um carrinho. E este (D2) pus 3 e 2 (apontando horizontalmente, no sentido esquerda direita) mas se tivesse virado ao contrário ficava este (D1), porque eu virei e ainda não tinha desmanchado se tivesse virado assim como este (D1) ficava igual a este (D1), mas eu pus 3 em cima (no D2) como aquele (aponta para a parte correspondente do primeiro registo) e depois ficou de outra forma porque se fosse ... para ter aqui mais um não valia".

Professora: Então tu para fazeres essa nem sequer desmanchaste, pois não?

Dalila: (Acena que não com a cabeça).

Professora: Então como fizeste? Viraste?

Dalila: - Foi assim (vai buscar a folha). Eu tinha assim (orientação da figura D1) e depois virei ao contrário assim (faz o gesto de rodar para a direita).

(Gravação em vídeo do diálogo entre Professora e Dalila, 2018).

A professora trouxe o material para que a aluna mostrasse a sua estratégia e Dalila explicou:

Dalila: Virei ao contrário (volta a rodar a construção D1 90º para a direita, fazendo corresponder a construção com o registro D2).

Dalila: E depois neste fiz assim, ao contrário (roda a construção D2 180º para a esquerda, fazendo quase corresponder o material com o desenho D3).

(Gravação em vídeo da explicação de Dalila, 2018).

Dalila reconheceu duas partes compostas e reconheceu também a congruência entre D1 e D2, porque, como explicou com o auxílio dos materiais, se rodar a construção D2 fica igual à D1. No entanto,

pareceu assumir que a congruência entre as duas figuras depende da manutenção da sua posição. Dalila parece evidenciar uma estruturação local, pois, embora consiga já abstrair unidades compostas, a relação com o todo pode carecer de um maior aprofundamento, daí que apenas reconheça como iguais as figuras que têm a mesma posição.

Como estratégia para determinar as diferentes posições de um dado pentaminó, Dalila recorreu com frequência ao movimento de rodar a construção e, embora conseguisse mostrá-lo com os materiais, notou-se, pelos gestos que fez, que também é um movimento mental que consegue executar (subnível E3). Dalila pareceu ter mais dificuldade em explicar, por palavras, a sua estratégia, talvez por não ter ainda um vocabulário muito alargado, por exemplo, para verbalizar o movimento de rotação, utilizou a expressão “Virei ao contrário” que poderia significar a reflexão e não a rotação. Dalila recorreu por isso, a gestos que procuraram mostrar os movimentos que realizou mentalmente. Uma vez que assumiu que figuras congruentes não podem ter posições diferentes, o movimento de rodar foi usado por Dalila para mostrar que os pentaminós são diferentes, ao invés de ser usada para verificar que são congruentes.

O significado que atribuiu à primeira construção, um carrinho, pode ter contribuído para ter continuado a usar a mesma construção com outras posições, atribuindo-lhe um significado diferente, apesar de saber que se trata da mesma construção. Este facto pode condicionar a análise que faz da figura já que, apesar de reconhecer componentes e compostos, está mais focada no seu aspeto global, porque lhe atribui um significado. Possivelmente, este aspeto global com que interpretou a figura pode ter contribuído para que não percebesse que o desenho da construção D3 tem mais dois quadrados pintados. Aliás, este tipo de associação pareceu ser comum, tendo surgido noutros momentos da discussão com outros alunos.

Na continuação da discussão sobre a congruência de figuras que foram sendo apresentadas por diferentes alunos, a professora chamou a atenção para as construções apresentadas por Sara e por Gil que vemos na Figura 6.

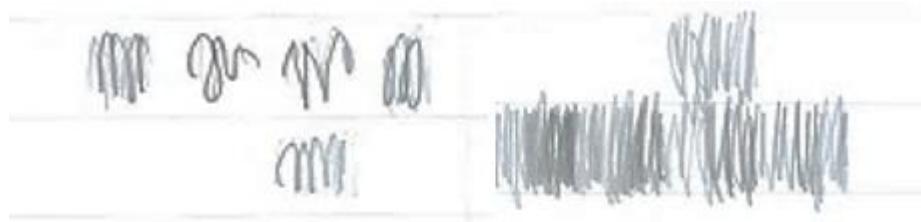


Figura 6 – Registo de Sara (à esquerda) e de Gil (à direita)

Fonte: Produção dos alunos, 2018.

Para mostrar a congruência entre as duas construções (quatro em linha com um por cima) com orientações já dadas, na Figura 7, vemos os gestos de Raquel, invertendo o pentaminó construído com *Polydrongs* (subnível E3), explicando:

Raquel: A do Gil é para cima e a da Sara, sem desmontar; esta (a peça que está por cima da linha) é para

baixo. (...) e depois se quisermos virar outra vez para cima fica igual à do Gil.
(Gravação em vídeo da explicação de Raquel, 2018).

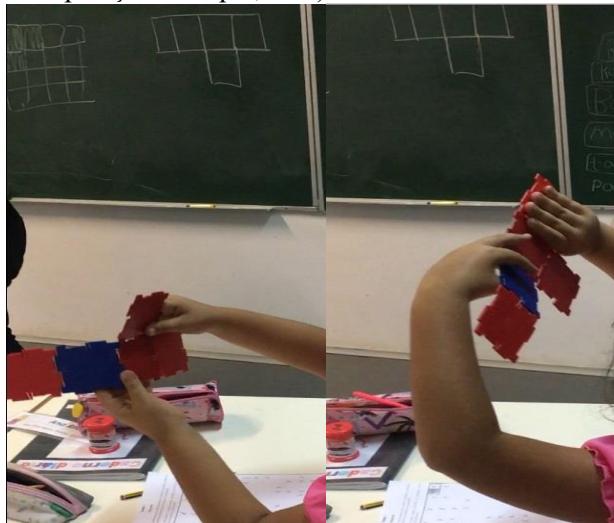


Figura 7 – Inversão da construção usando material, por Raquel
Fonte: Produção dos alunos, 2018.

A explicação dada por Raquel mostra que ela recorreu a uma inversão para transformar a construção de Gil na construção de Sara. Este é um processo já bastante abstrato para esta faixa etária, embora Raquel tenha tido o auxílio do material manipulável para conseguir executar o movimento, como vemos na Figura 7. A natureza da própria construção parece “forçar” esse processo já que, usando a rotação, não seria possível transformar a primeira construção na segunda.

4.3 Antecipação com base em modelos mentais

Dos vinte e três alunos que realizaram a tarefa 6, quatro alunos pareceram ter alguma dificuldade em antecipar qual das figuras poderia resultar da manipulação dos dois pentaminós inicialmente apresentados, já que os registos mostram que selecionaram e apagaram pelo menos três opções (subnível E2). Doze utilizaram a estratégia de juntar e rodar mentalmente, tendo assinalado inequivocamente a terceira opção. Para além destes doze, três também consideraram a terceira opção, mas, no momento de discussão, assinalaram igualmente a quarta opção. Verificamos ainda o caso de um par de alunos, Daniel e Gastão, em que Gastão considerou a terceira opção como sendo correta e Daniel a quarta. Acabaram por considerar a quarta opção, porque a justificação dada por Daniel pareceu convencer Gastão, tendo depois partilhado com a turma. Aqui, verificamos um constrangimento relacionado com o enunciado da tarefa que pedia aos alunos que selecionassem a opção pretendida e não as opções pretendidas. Talvez por isso Daniel e Gastão tenham sentido a necessidade de fazer uma opção.

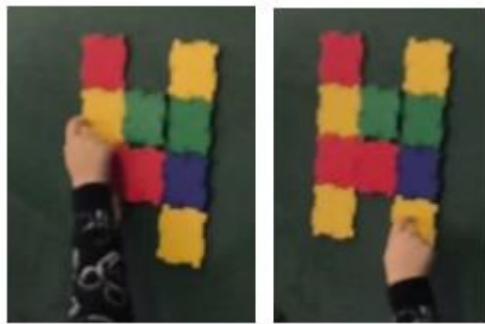


Figura 8 – Gestos de Daniel que auxiliam a sua explicação
Fonte: Produção dos alunos, 2019.

A explicação que Daniel apresenta, no seguinte excerto, mostra que recorreu à inversão mental do pentaminó. A Figura 8 mostra os gestos de Daniel para se referir às partes da figura de que vai falando:

Professora: Como é que conseguiram chegar a esta figura?

Daniel: Eu tava [sic] a olhar para aqui para a minha folha e tipo eu... eu tava [sic] a ver que... eu encontrei que... Esta coisa aqui (aponta para a quarta opção da folha da tarefa).

Professora: Explica aqui (aponta para o quadro).

Daniel: Esta parte aqui era a direito (Figura 8, à esquerda) e esta aqui era ao contrário (Figura 8, à direita). Por isso se virássemos dava para fazer, dava para fazer assim.

(Gravação em vídeo do diálogo entre Professora e Daniel, 2019).

No discurso de Daniel, é possível perceber que, relativamente à quarta opção, ele conseguiu discriminar as diferentes orientações dos dois pentaminós. Ao descrever o pentaminó da esquerda como estando “a direito” parece estar a relacionar a sua orientação e posição, na construção, com a orientação e posição dadas inicialmente, no modelo. Da mesma forma, ao referir que o pentaminó da esquerda está ao contrário sugere que ele necessitou fazer algum movimento, neste caso, uma inversão mental, para imaginar a peça com aquela orientação (subnível E4).

Por último, um dos pares, Frederico e Irís, assinalou a terceira e a quarta opções, recorrendo a movimentos mentais, ultrapassando os constrangimentos do enunciado.

5 Discussão

Inicialmente, na tarefa 1, os alunos utilizam como estratégia a manipulação isolada dos quadrados dos polydrons para formar os pentaminós, enquadrando-se no subnível E1 do quadro de análise. No entanto, à medida que o trabalho foi avançando, começaram a surgir unidades compostas por dois ou três quadrados que os alunos mantinham juntos, enquanto combinavam de diferentes formas os outros quadrados (subnível E2). Esta progressão parece estar de acordo com a proposta de Battista e Clements (1996) e que utilizamos no quadro de análise. Os alunos partem de unidades isoladas estabelecendo depois relações entre essas unidades, formando compostos.

Desta forma, os alunos parecem progredir de uma estratégia inicial em que compõem por tentativa e

erro, evoluindo depois para o agrupamento de componentes em compostos, que parecem evidenciar a construção de figuras já com alguma antecipação. Esta estratégia por antecipação baseia-se no estabelecimento de interrelações entre componentes, emergentes da manipulação e da reflexão que foram fazendo sobre essa manipulação. O tipo de estruturação aqui presente está associado ainda à estruturação local, dado que não há relações estabelecidas entre os componentes, os compostos e o todo, mas apenas entre componentes entre si e entre componentes e compostos. A relação entre componentes formando compostos e a relação entre compostos evidencia uma progressão para um nível de abstração mais elevado.

Essa progressão pressupõe a existência de imagens mentais que representem essas relações e que permitam a sua manipulação, ao nível mental, com antecipação, embora ainda sem um esquema global de organização da estrutura da figura. A estratégia de construção por antecipação substitui a construção por tentativa e erro e vai mostrando também uma progressiva independência relativamente aos materiais manipuláveis. Na primeira tarefa, enquanto durante o trabalho autónomo é evidente a dependência dos materiais, como seria esperado, durante a discussão coletiva, começamos a perceber que há uma fase permeável ao uso dos materiais, no movimento de rodar, mas que também já conseguem fazê-lo com recurso à manipulação mental. De salientar que, neste último momento da aula, os alunos estão a lidar com toda a figura e não apenas com algumas partes, o que torna a abstração mais complexa.

Os registos escritos parecem facilitar a passagem de unidades simples para unidades compostas, como é o caso de Bruno, ao oferecerem a oportunidade para os alunos refletirem sobre a natureza das construções. Tal como Thom e McGarvey (2015) afirmam, ao desenhar e refletir sobre esses desenhos, confrontando construções e desenhos, as propriedades das figuras tornam-se evidentes para os alunos.

Na sexta tarefa, uma parte significativa dos alunos é capaz de utilizar uma estratégia com base na antecipação do resultado da manipulação das peças, sem recurso aos materiais manipuláveis, verificando-se a utilização dos movimentos mentais de rodar e de inverter, este último de maior complexidade para alunos desta faixa etária, de acordo com o proposto por Clements e Sarama (2014). Estes alunos revelam assim uma progressão para um nível de estruturação global, no qual mostram ser capazes de coordenar as posições e orientações de dois pentaminós para formar uma figura composta, com recurso a movimentos mentais que lhes permitem antecipar o resultado desses movimentos (subníveis E4 e E5). Desta forma, parece que, para além de serem capazes de coordenar os dois pentaminós, também fazem corresponder a representação mental que possuem ao objeto que estão a manipular, o que está relacionado com a operação de integração (subnível E5).

Em termos de congruência, os alunos evidenciam, na discussão da primeira tarefa, o recurso a unidades compostas, muitas vezes utilizando como referência o número de quadrados presentes em cada composto, como foi o caso de Gil e de Dalila. Os alunos utilizam esses compostos para fazê-los corresponder a partes congruentes de outras construções. Evidenciam também, em várias situações, o uso de movimentos

mentais ou físicos como o de rodar as construções, para fazer corresponder uma figura a outra com uma posição diferente. De facto, este movimento foi usado pelos alunos tanto para provar que duas construções eram congruentes, como para mostrar que duas figuras congruentes eram assumidas por si como diferentes, considerando a posição e a orientação de uma figura como critérios de congruência. O movimento de rodar, tanto físico como mental, pareceu ser uma estratégia comum e acessível, nos casos observados, com exceção de alguns casos de alunos que verbalizaram que não conseguiam fazê-lo sem o material (subnível E3).

Com menor frequência, surgiu como estratégia o uso do movimento de inverter com recurso à manipulação de construções, mas revelando já alguma antecipação do processo. O uso dos movimentos de rodar e inverter, evidenciados neste estudo, vai além do proposto por Clements e Sarama (2014) uma vez que alunos de 6/7 anos de idade foram capazes de prever o resultado da manipulação de figuras, com recurso a imagens mentais, como vimos na tarefa 6. Tanto no uso do movimento de inverter como no de rodar, os alunos parecem focar-se em componentes ou em compostos que utilizam como referência para estabelecer relações entre duas construções. A análise das figuras com vista ao estabelecimento da sua congruência, em trabalho coletivo, parece, assim, contribuir para o aprofundamento das relações que os alunos conseguem estabelecer quer na mesma figura, quer entre figuras.

Uma das dificuldades que notamos no reconhecimento da congruência foi a associação de determinadas construções com posições específicas a um objeto da realidade dos alunos, propondo assim que a mesma construção poderia ter significados diferentes consoante a sua posição e, por isso, não poderiam considerar como sendo a mesma construção. A associação de construções a objetos do mundo real foi um aspeto bastante presente, ao longo desta primeira sequência, e é próprio desta faixa etária. Podemos referir que, apesar de continuarem a utilizar este tipo de associações, ao longo da primeira sequência de tarefas, esse foi um aspeto cada vez menos condicionante.

6 Conclusões

Da tarefa 1 para a tarefa 6, verificamos que os alunos foram evoluindo de estratégias mais focadas na manipulação de unidades simples para a manipulação com unidades compostas, inicialmente por tentativa e erro, e, depois, para uma construção por antecipação, sugerindo uma progressão dentro dos níveis associados à estruturação local, e em alguns casos, até à estruturação global. A reflexão acerca das estruturas e das suas relações espaciais parece ter sido potencializada pelos desenhos das construções, já que levou os alunos a olharem de forma mais aprofundada para essas construções, tal como referem Thom e McGarvey (2015).

A identificação de unidades compostas foram aspetos evidentes também no estabelecimento de relações de congruência entre figuras, assim como a utilização de rotações e inversões com ou sem recurso a materiais manipuláveis para confirmar essa congruência. O significado atribuído pelos alunos às construções

pareceu ser um constrangimento na identificação de duas figuras como congruentes, mesmo quando sobrepostas após rodar fisicamente as construções, constituindo, por isso, uma limitação neste processo.

Na passagem da manipulação de unidades simples para unidades compostas, o processo pareceu decorrer de forma célere, possivelmente potencializado pelo tipo de materiais e pelo tipo de figuras. Esta passagem está de acordo com o proposto por Battista e Clements (1996), parecendo trazer mais informação acerca deste processo, no contexto de construção e determinação de congruência entre dois pentaminós. Na utilização dos movimentos de rodar e inverter, os alunos parecem antecipar-se ao proposto por Clements e Sarama (2014).

Referências

- BATTISTA, M. The development of geometric and spatial thinking. In: LESTER, F. (ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Reston: NCTM, 2007. p. 843-909.
- BATTISTA, M. T. Development of the shape makers' geometry microworld. In: BLUME, G. W.; HEID, M. K. (ed.). **Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives (v. 2)**. Charlotte: Information Age, 2008. p. 131–56.
- BATTISTA, M. T. **Cognition-based assessment & teaching of geometric shapes: Building on students' reasoning**, Portsmouth: Heinemann, 2012.
- BATTISTA, M. T.; CLEMENTS, D. Students' understandings of three-dimensional rectangular arrays of cubes. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, VA, v. 27, n. 3, p. 258–292, mai. 1996.
- BATTISTA, M. T.; CLEMENTS, D. H.; ARNOFF, J.; BATTISTA, K.; BORROW, C. Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, VA, v. 9, n. 5, p. 503–532, nov. 1998.
- BRUCE, C. D.; HAWES, Z. The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: what is it? Why does it matter? And what can we do about it? **ZDM Mathematics Education**, Hamburg, v. 47, n. 3, p. 331–343, jun. 2015.
- CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. **Learning and teaching early math: The learning trajectories approach**. New York and London: Routledge, 2014.
- GRAVEMEIJER, K.; COBB, P. Design research from the learning design perspective. In: PLOMP, T.; NIEVEEN, N. (ed.). **Educational design research**. Enschede: Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO), 2006. p. 72–113.
- MAMOLO, A.; RUTTENBERG-ROZEN, R.; WHITELEY, W. Developing a network of and for geometric reasoning. **ZDM Mathematics Education**, Hamburg, v. 47, n. 3, p. 483–496, jun. 2015.
- PIAGET, J.; INHELDER, B. **The child's conception of space**. London: Routledge and Kegan Paul, 1967. Disponível em: https://books.google.pt/books?id=1-Rug7SafEC&printsec=frontcover&hl=pt-PT&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q=f=false. Acesso em: 4 abr. 2018.
- PRESMEG, N. Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. (ed.). **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future**. Rotterdam: Sense Publisher, 2006. p. 205-236.
- SARAMA, J.; CLEMENTS, D. H. **Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for**

young children. New York and London: Routledge, 2009.

THOM, J. S.; MCGARVEY, L. M. The act and artifact of drawing (s): observing geometric thinking with, in, and through children's drawings. **ZDM Mathematics Education**, Hamburg, v. 47, n. 3, p. 465–481, jun. 2015.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M.; BUYS, K. **Young Children Learn Measurement and Geometry**. Rotterdam and Taipei: Sense Publishers, 2005.

VAN HIELE, P.M. **Insight and Structure**. Orlando: Academic Press, 1986.

VAN NES, F.; VAN EERDE, D. Spatial structuring and the development of number sense: A case study of young children working with blocks. **Journal of Mathematical Behaviour**, v. 29, n. 3, p. 145–159, set. 2010.

WHITELEY, W.; SINCLAIR, N.; DAVIS, B. What is Spatial reasoning? In: DAVIS, B. (ed.). **Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations**. New York and London: Routledge, 2015, p. 3-14.

**Submetido em 08 de Julho de 2019.
Aprovado em 27 de Janeiro de 2020.**