



Bolema: Boletim de Educação Matemática

ISSN: 0103-636X

ISSN: 1980-4415

UNESP - Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Pesquisa; Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Vargas, María Fernanda; Fernández-Plaza, José Antonio; Ruiz-Hidalgo, Juan Francisco

Significado de derivada en las tareas de los libros de 1º de Bachillerato

Bolema: Boletim de Educação Matemática, vol. 34, núm. 68, 2020, pp. 911-933

UNESP - Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Pesquisa; Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

DOI: 10.1590/1980-4415v34n68a04

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291265342005>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org
UAEM

Sistema de Información Científica Redalyc

Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

Significado de derivada en las tareas de los libros de 1º de Bachillerato

Meaning of derivative in the book tasks of 1st of “Bachillerato”

María Fernanda Vargas*

 ORCID iD 0000-0002-2618-2995

José Antonio Fernández-Plaza**

 ORCID iD 0000-0001-6570-0866

Juan Francisco Ruiz-Hidalgo***

 ORCID iD 0000-0002-4805-6922

Resumen

Dada la importancia de los libros de texto dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, este artículo se centra en las tareas propuestas en cinco libros de texto de 1º de Bachillerato para este tema. El objetivo es identificar los significados de derivada que ponen de manifiesto los libros de texto escolares a través de las tareas que proponen. Se trata de una investigación cuantitativa en la que mediante un análisis clúster se agruparon las tareas según similitud. Los resultados muestran que los libros destacan tres significados de la derivada: uno procedural-algebraico, un segundo algorítmico y otro conceptual-geométrico; dominados por el sistema de representación simbólico y que manifiestan un sentido de aplicación exclusivamente matemático.

Palabras clave: Análisis de tareas. Libros de texto. Matemáticas. Análisis clúster. Significado de un contenido matemático escolar.

Abstract

Due to the importance of textbooks within the processes of teaching and learning in Mathematics, this article focuses on the tasks proposed in five textbooks of 1st of *Bachillerato* for this topic. The goal is to identify meanings of derivative in the textbooks through the proposed tasks. It is a quantitative research in which, by means of a cluster analysis, the tasks were grouped according to similarity. The results show that the books emphasize three meanings of the derivative: one procedural-algebraic, one algorithmic, and finally another conceptual-geometric meaning, all of them dominated by the symbolic representation system and that exclusively show a mathematical context.

Keywords: Tasks analysis. Textbooks. Mathematics. Cluster analysis. Meaning of school mathematics content.

* Máster en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada (UGR). Profesora de matemática en la Universidad de Costa Rica, San Ramón, Costa Rica. Dirección postal: Universidad de Costa Rica, Sede de Occidente, 20201, San Ramón, Costa Rica. E-mail: mariafernanda.vargas@ucr.ac.cr.

** Doctor en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada (UGR). Profesor Ayudante Doctor de la Universidad de Granada (UGR). Dirección postal: Campus Universitario de Cartuja, 18071, Granada, España. E-mail: joseanfplaza@ugr.es.

*** Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada. Profesor Contratado Doctor Indefinido del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (UGR). Campus Universitario de Cartuja, 18071, Granada, España. E-mail: jfruiz@ugr.es.

1 Introducción

Los libros de texto han sido una de las principales herramientas docentes. Se estima que el profesorado los emplea como su principal guía, incluso por encima de las indicaciones curriculares establecidas, por lo que se consideran una fuente de estilo y contenido pedagógico (PEPIN; HAGGARTY, 2001). Por lo tanto, su estudio permite entender, de manera indirecta, las prácticas docentes y, a su vez, da indicios sobre el aprendizaje del alumnado. Su relevancia ha generado que las investigaciones sobre los mismos hayan ido en aumento (p. e. ALMEIDA; SILVA, 2018; PARK, 2016; WANG; BARMBY; BOLDEN, 2017).

Pepin (1997) señala que, para los docentes, una de las características fundamentales de los libros de texto es la calidad y diferenciación de los ejercicios que en ellos se proponen, ya que es mediante las tareas planteadas que se le brinda al alumnado oportunidades de aprendizaje. La relación entre el tipo de tarea que los estudiantes realizan cuando se les enseña matemática y la matemática que aprenden ha sido objeto de investigación durante muchos años (p. e. BREEN; O'SHEA, 2010). Diversos estudios afirman que lo que los estudiantes aprenden está determinado, en buena medida, por las tareas que se les asigna (SULLIVAN; CLARKE; CLARKE, 2013). Específicamente, las tareas transmiten mensajes sobre qué son las matemáticas y qué implica conocerlas; es decir, su significado. Incluso, se piensa que, sobre cualquier otra acción en el aula, plantear tareas que inviten al estudiante a pensar por sí mismo es el principal estímulo para el aprendizaje (SULLIVAN; CLARKE; CLARKE, 2013).

Dada su relevancia, en los últimos años ha habido un interés creciente por abordar trabajos sobre las tareas escolares (p. e. HADAR; RUBY, 2019; LITHNER, 2017; SMITH; STEIN, 1998). Un aspecto muy analizado en los libros de texto tiene que ver con el tipo de tareas que se plantean y la demanda cognitiva que requieren; por ejemplo, Tran y Tarr (2018) analizaron la demanda cognitiva de las tareas de datos bivariados en una serie de libros. Asimismo, Ramos y Casas (2018) estudiaron la coherencia entre la demanda cognitiva de los estándares escolares y las tareas de los libros de texto para el tema de álgebra, encontrando que, realmente, no están alineados.

Específicamente para temas relacionados con el cálculo, Bhaird et al. (2016), preocupados por el hecho de que los alumnos pueden aprobar la asignatura de cálculo sin tener una verdadera comprensión conceptual, analizaron las oportunidades de razonamiento creativo que se brindan en las evaluaciones (tareas y exámenes) a estudiantes de primer año universitario. Sus resultados muestran que las tareas analizadas requieren especialmente de un razonamiento algorítmico. Siguiendo esta línea, en Vargas, Fernández-Plaza y Ruiz-Hidalgo

(en prensa) se analizaron las tareas propuestas por los libros de cinco editoriales españolas para el tema de derivada. Dicho trabajo consistió en una caracterización cualitativa de las tareas tras el análisis de once variables, dicho análisis constituye el punto de partida del presente trabajo. La intención de dicho trabajo era ahondar en cuales elementos del significado de la derivada se destacan en los libros de texto.

De forma similar, otros autores se han centrado en el significado de contenidos matemáticos que se manifiesta en los libros de texto, un caso es el de Balcaza, Contreras y Font (2017) quienes analizan cómo se desarrolla la noción de optimización en tres libros de texto de bachillerato, con el fin de detectar el significado que se pretende abordar en el aula, así como las dificultades que se pueden encontrar en torno a este concepto. Por otra parte, en Contreras, García y Font (2012) se analizan los distintos significados que configuran la enseñanza del límite.

Con la intención de ampliar el análisis desarrollado en Vargas, Fernández-Plaza y Ruiz-Hidalgo (en prensa) proponemos, aquí, una investigación cuantitativa cuyo objetivo general es determinar los significados de derivada presentes en las tareas propuestas en los libros de texto de 1º de Bachillerato y cuyos objetivos específicos son:

- Agrupar por su similitud las tareas propuestas por los libros de texto de 1º de Bachillerato para el tema de derivada.
- Caracterizar los grupos identificados, los cuales, a su vez, permitan visualizar los significados de derivada presentes en los libros de texto.

2 Marco teórico

Entendemos por tarea escolar “una propuesta que solicita la actividad del alumno en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como oferta intencional para el aprendizaje o como instrumento para evaluación del aprendizaje” (MORENO; RAMÍREZ, 2016, p. 244). El análisis de las tareas propuestas en libros de texto escolares ha sido abordado de distintas maneras y no existe un marco teórico unificado que plantea las herramientas y posibilidades existentes (FAN, 2013). Dado que nuestro objetivo se relaciona con el significado de derivada que se manifiesta en los libros de texto, manifiesto a través de las tareas propuestas, a continuación, describimos el marco general en el que se basa nuestro trabajo, posteriormente mencionamos otros aspectos a considerar en el análisis de tareas que nos permitirán ampliar el estudio.

2.1 Significado de un contenido matemático escolar

Para nuestro trabajo adoptamos el marco desarrollado en Rico (2012) denominado el *significado de un contenido matemático escolar*. Tal como señala Biehler (2005), la educación matemática, y en nuestro caso la investigación, debe basar sus decisiones en aspectos curriculares, por lo que el significado debe ser pensado y construido para la matemática escolar. Precisamente, esta es una de las potencialidades del marco teórico que contemplamos, que está pensado y dirigido a la matemática escolar.

Dicho marco adopta la postura de significado que plantea Frege (1996), en la que el significado de un concepto, desde una perspectiva semántica, está determinado por tres elementos: signo, sentido y referencia. Esta idea ha sido retomada y adaptada en Rico (2012) considerando que el significado de un contenido matemático escolar está compuesto por: (a) estructura conceptual, (b) sistemas de representación, y (c) los sentidos y modos de uso. Desde esta perspectiva, el significado de un concepto matemático escolar viene caracterizado por las tres componentes, consideradas como un todo. Cada una de estas tres componentes se conforma de una serie de aspectos y elementos que permiten caracterizar el significado (ver Cuadro 1), lo cual, a su vez, puede usarse como herramienta metodológica para el análisis.

Estructura conceptual			Sistemas de representación	Sentido y modos de uso
Campo conceptual	Campo procedimental	Campo actitudinal		
Hechos Conceptos Estructuras	Destrezas Razonamientos Estrategias	Actitud emocional Aspecto moral y normativo Aspecto ético	Verbal Símbólico Numérico Gráfico Tabular	Modo de uso Contexto Situación

Cuadro 1 – Componentes del significado de un contenido matemático escolar

Fuente: Rico y Moreno (2016)

De este modo, en la matemática escolar comprender el significado de un concepto implica “conocer su definición, representarlo, mostrar sus operaciones, relaciones y propiedades, sus modos de uso, interpretación y aplicación a la resolución de problemas” (RICO, 2016, p. 94). Esta idea ha sido considerada en distintos trabajos como Castro-Rodríguez et al. (2016), Fernández-Plaza, Rico y Ruiz-Hidalgo (2013) y Martín-Fernández, Ruiz-Hidalgo y Rico (2016, 2019). A continuación, describimos brevemente las componentes del significado:

1. Se entiende por *estructura conceptual* al conjunto de conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos y proposiciones, así como sus criterios de veracidad, asociados a un contenido matemático. Para la caracterización de esta estructura se plantean tres campos o categorías generales: campo conceptual, campo procedimental y campo

actitudinal (BELL; COSTELLO; KÜCHEMANN, 1983; HIEBERT; LEFEVRE, 1986).

Dado que el análisis a realizar es de tareas propuestas, resulta complicado estudiar el campo actitudinal, por lo que nos limitamos a las dos primeras.

- a. Dentro del campo conceptual se considera el conjunto de conceptos y relaciones que hacen alusión al contenido matemático, aquí son tan importantes las unidades, de forma individual, como la red que construyen.
 - b. En el campo procedural se consideran las operaciones, propiedades y métodos matemáticos involucrados en el contenido. Se incluyen, aquí, destrezas, razonamientos y estrategias.
2. Entendemos las representaciones como “las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características más relevantes” (CASTRO; CASTRO, 1997, p. 96). En ese sentido, se distinguen dos grandes familias de representaciones, las simbólicas y las gráficas, de quienes, a su vez, se desprenden los siguientes tipos de representaciones: simbólico, gráfico, numérico y verbal.
 3. Finalmente, para Ruiz-Hidalgo (2016, p. 139), el sentido de un concepto lo proporcionan “las diversas formas de entender, expresar y usar un concepto, y constituyen su significado conjuntamente”. Estas formas de entender y utilizar el concepto se pueden identificar de tres maneras diferentes: 1) a través de los distintos términos y modos de uso cotidianos empleados al referirse a un determinado concepto; 2) en los contextos matemáticos que da respuesta el concepto y determinan para qué se usa; 3) en las situaciones o escenarios en los que tiene aplicación y se trabaja el concepto.

2.2 Análisis de tareas escolares

Existen diversos aspectos a analizar sobre las tareas escolares; hemos organizado las categorías de análisis de tareas propuestas por Moreno y Ramírez (2016) y Gómez y Romero (2015) en tres grandes bloques:

- Relacionadas con aspectos *sintácticos* (forma) de la tarea: este primer bloque contempla aspectos como la estructura y la formulación de la tarea; además los materiales y recursos necesarios para su resolución.
- Relacionadas con aspectos *semánticos* (de significado): se consideran, aquí, algunos elementos que conforman el significado de la derivada y que pueden ser analizados en

una tarea matemática escolar, como lo son: el contenido, los sistemas de representación, el contexto, la situación y el tipo de función involucrada.

- Relacionadas con aspectos de *aprendizaje o cognitivos*: se consideran, aquí, aspectos como la demanda cognitiva y la capacidad matemática que fomenta la tarea, así como el manejo de sistemas de representación que se solicita, entre otros.

En este trabajo se consideraron solo los aspectos semánticos y cognitivos, estos últimos como un complemento importante del significado. Nuestro objetivo se concretiza en identificar los elementos del significado y cognitivos que se destacan sobre la derivada de una función en los libros de texto, lo cual permita visualizar la idea que sobre esta noción se pone de manifiesto.

3 Metodología

En Vargas, Fernández-Plaza y Ruiz-Hidalgo (en prensa) realizamos un análisis cualitativo de las tareas propuestas para el tema de derivada por los de texto de 1º de Bachillerato, para ello consideramos los libros de las editoriales Anaya (COLERA et al., 2008), Bruño (ARIAS; MAZA, 2015), Edelvives (CARDONA; REY, 2015a, 2015b), Santillana (ANTONIO et al., 2015) y SM (VIZMANOS et al., 2008). Tal como se muestra en la Tabla 1, en ese primer trabajo se analizaron 592 tareas, las cuales dividían en 1249 ítems.

Tabla 1 – Número de tareas e ítems por libro de texto

Posición de la tarea	Cantidad de tareas propuestas por libro de texto*				
	SM	Anaya	Edelvives	Bruño	Santillana
En el desarrollo del contenido	31 (67)	33 (45)	-	38 (84)	33 (58)
En un apartado específico de ejercicios	72 (148)	106 (205)	73 (200)	113 (217)	94 (225)
Total	102 (215)	139 (250)	73 (200)	151 (301)	127 (283)

*En los paréntesis se indica el número de ítems

Fuente: elaboración propia

Esos mismos ítems constituyen el objeto de estudio de este trabajo. A continuación, describimos las variables del sistema de categorías considerado, posteriormente nos referimos a la herramienta estadística que utilizamos para agrupar los ítems y, así, poder identificar significados dados a la derivada.

3.1 Sistema de categorías

Tal como señalamos en el marco teórico, hemos contemplado para el análisis aspectos de la categoría semántica, dado que nos permiten profundizar en los componentes del significado y de la cognitiva, ya que nos ayudan a entender a qué nivel de dificultad son

abordados dichos componentes. El análisis fue revisado por cada uno de los autores del artículo. De la categoría semántica consideramos:

- a) Contenido: identificamos el contenido matemático que abordaba cada ítem, para el caso particular de los ítems analizados las modalidades fueron: definición de derivada de una función en un punto, reglas de derivación, extremos relativos, monotonía, recta tangente y normal, representación de funciones, resultados y propiedades, otros (que incluyen ítems que no abordan un tópico específico de la derivada como *halle la imagen de...*).
- b) Contexto: entendido como la función o necesidad a la que la derivada atiende en cada ítem. Tras el análisis se comprobó que el contexto matemático podía ser: (a) algebraico-numérico (ítems planteados en un contexto meramente algebraico como el cálculo de la función derivada), (b) geométrico (ítems alusivos al componente geométrico de la derivada: extremos, recta tangente, monotonía, representación; así como aquellos ítems que abordan distintas propiedades o resultados que debían ser analizados o interpretados desde la gráfica), y (c) aplicado (la noción de derivada es aplicada para la resolución de problemas).
- c) Tipo de función: el tipo de función involucrada en la tarea es un factor que influye en la complejidad de esta. Para ello, basados en el trabajo desarrollado por Jiménez (2017), consideramos los siguientes rasgos de la función: polinómico, potencia de exponente negativo, radical, función algebraica, exponencial, logarítmica, trigonométrica, trigonométrica inversa, producto, cociente, composición de funciones, función a trozos y valor absoluto. De este modo, entendemos como función simple a aquella que presente solo uno de los siguientes rasgos: polinomio, trigonométrico, trigonométrica inversa, logarítmico, exponencial o radical. De lo contrario, será no simple con n rasgos.
- d) Sistema de representación para formular la tarea: verbales, gráficos, numéricos, simbólicos y/o tabulares.

De los aspectos cognitivos seleccionamos:

- e) Manejo que se realiza al sistema de representación (procesamiento o conversión): siguiendo a Duval (1999), se analizó si la tarea propuesta engloba en su resolución transformaciones dentro de un mismo sistema (procesamiento), o bien requiere de traducciones de un sistema a otro (conversión).
- f) Demanda cognitiva: se tomó como referencia la taxonomía de Stein, Grover y Henningsen (1996), en la cual se consideran cuatro tipos de tareas, según la demanda cognitiva (Cuadro 2). Para el análisis de la demanda cognitiva generamos una subcategoría de tipos de tareas según lo solicitado, lo cual nos permitió, posteriormente,

agruparlas según la demanda, tal como se indica en el Cuadro 2.

Tipo de demanda cognitiva	Descripción	Tipos de tareas consideradas
Memorización	Son aquellas tareas que piden al estudiante recordar hechos, reglas o definiciones. La respuesta implica una reproducción exacta y memorizada.	No hallamos tareas de este tipo
Procedimiento sin conexión	El fin de la tarea es aplicar algún algoritmo para resolver un problema; se trata más de aplicar que de comprender. Estas tareas se caracterizan porque no requieren explicaciones y porque no hay ambigüedad sobre lo que hay que hacer y cómo hacerlo	Tareas de cálculo
Procedimiento con conexión	Estas tareas, aunque requieren de un procedimiento para ser resueltas, su intención va más allá del proceso mismo, intentando desarrollar niveles más profundos de comprensión acerca de los conceptos. Su principal característica es que no son tareas que pueden resolverse solo conociendo el algoritmo, requieren cierto esfuerzo por parte del estudiante.	Representación gráfica Identificación
Hacer matemática	Estas son las tareas de mayor demanda cognitiva, ya que el camino de resolución no está predeterminado. Requieren una verdadera comprensión de los conceptos, procesos, propiedades y así establecer relaciones entre estos	Justificación y argumentación Resolución de problemas

Cuadro 2 – Taxonomía propuesta por Stein et al. (1996)

Fuente: Stein et al. (1996)

Las seis variables consideradas en este análisis pueden entenderse en términos de los elementos que constituyen el significado de un contenido matemático, tal como se muestra en el Cuadro 3. Pues, como mencionamos anteriormente, los aspectos cognitivos sirven para profundizar en el análisis.

Componente del significado	Variable analizada
Estructura conceptual	Contenido Tipo de función Demandas cognitivas Manejo de los sistemas de representación
Sistemas de representación	Sistemas de representación Manejo de los sistemas de representación
Sentidos y modos de usos	Contexto

Cuadro 3 – Elementos del significado en cada una de las variables

Fuente: elaboración propia

3.2. Análisis de conglomerados

Para llevar a cabo el análisis de los datos hemos empleado el análisis de conglomerados. Este análisis tiene por objetivo principal la clasificación de los casos en grupos relativamente homogéneos, a partir de un conjunto de variables clasificatoria (HÄRDLE; SIMAR, 2015; WENDLER; GRÖTTRUP, 2016), lo cual nos permitirá identificar grupos de ítems similares, que mediante su caracterización definan perfiles de significado dados a la derivada, agrupación que sería imposible detectar de manera explícita a través de la observación directa de los datos.

Para ello, consideramos las modalidades de cada variable como características independientes, codificándolas con 0 (ausencia de dicha característica) o 1 (presencia), cada ítem analizado se representó mediante un vector de entradas 0 y 1, de dimensión 27. Por ejemplo, el ítem cuyo vector se aprecia en la Figura 1 es un ítem que abordaba el contenido de recta normal a una curva (8), con una función simple, en un contexto geométrico, utilizando el sistema de representación verbal y simbólico, que demandaba un proceso sin conexión y un procesamiento del sistema de representación.

Item	CONTENIDO									TIPO DE FUNCION			DEMANDA			CONTEXTO			SISTEMA DE REPRESENTACION						MANEJO DE LA			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Descon	Simple	1,2	3,...	1	2	3	1	2	3	3 Verb	Sim	Tab	Gra	Num	Ilus	Proc	Conv	
S239-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0

Figura 1 – Vector del ítem S239-1

Fuente: elaboración propia

La justificación de esta forma de codificar reside en que las modalidades dentro de cada variable no se pueden ordenar. Por ejemplo, si en la variable contenido hubiésemos asignado un código del 1 al 8, el algoritmo del análisis clúster entendería que aquellos ítems en cuya primera entrada aparece un 2 y un 3, estarían más cercanos que aquellos que tienen un 2 y un 8; lo cual en nuestro caso no tiene sentido.

Una vez representados todos los ítems, recurrimos al programa *RStudio*. La técnica requiere que se establezca una medida de asociación, es decir, de cercanía (métrica) o similitud según el tipo de variable que se esté trabajando. Para variables dicotómicas como las aquí consideradas, una de las opciones como medida de similaridad es la basada en coincidencias. En el Cuadro 4 se aprecian las posibles combinaciones para dos variables.

		Variable 2	
		Presencia (1)	Ausencia (0)
Variable 2	Presencia (1)	<i>a</i>	<i>b</i>
	Ausencia (0)	<i>c</i>	<i>d</i>

Cuadro 4 – Tabla contingencia variables dicotómicas

Fuente: elaboración propia

De todas las medidas de similaridad, nosotros hemos empleado la denominada Rogers-Tanimoto, la cual mide la probabilidad de coincidencia entre dos variables, duplicando la ponderación en las no coincidencias y cuya fórmula es

$$\frac{a + d}{a + d + 2(b + c)}$$

Empleamos el análisis jerárquico aglomerativo, que comienza con tantos clústeres como objetos tengamos que clasificar y en cada paso se recalcularan las distancias entre los grupos existentes y se unen los grupos más o menos similares. El algoritmo acaba con un clúster conteniendo todos los elementos, formando una jerarquía. Para el análisis jerárquico pueden emplearse distintos métodos, entre los más usados están *Single*, *Average*, *Complete* o *Ward.D*;

en nuestro caso, empleamos este último, el cual minimiza la suma de los cuadrados de las diferencias entre cada individuo y su centroide dentro de cada grupo (PÉREZ, 2004). Aunque reconocemos que con otros métodos se obtenían resultados bastante similares.

4 Resultados

Al realizar los clústeres no diferenciamos los ítems por editorial. Para visualizar el resultado del proceso jerárquico, se empleó un dendrograma, o árbol de clasificación, el cual se puede aprecia en la Figura 2.

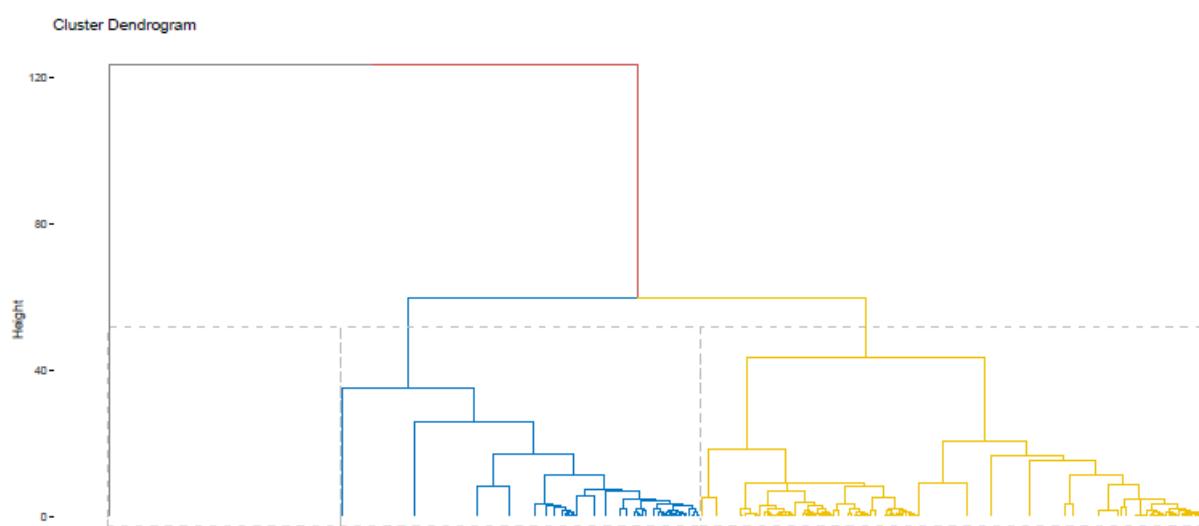


Figura 2 – Dendrograma del análisis clúster
Fuente: elaboración propia

Así, tras el análisis de los 1249 ítems, considerando las seis variables antes descritas, obtuvimos tres grandes grupos distribuidos tal como se observa en la Figura 3.

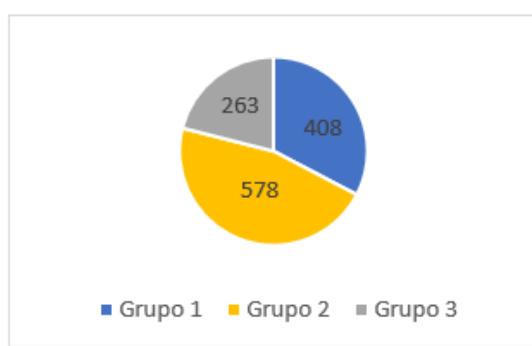


Figura 3 – Cantidad de ítems por grupo
Fuente: elaboración propia

A continuación, describimos de forma general cada uno de los grupos, lo cual nos brindará una primera idea de los tipos de tareas propuestas en los libros de texto. Posteriormente, profundizamos en las semejanzas y diferencias entre los grupos según cada una de las variables consideradas. Finalmente, asociamos a cada uno de los libros estudiados un

grupo de tarea según lo que predominó en cada caso.

4.1 Grupos de ítems

En un primer grupo, al que denominamos simbólico-algebraico (ver Figura 4), los ítems abordaban el cálculo de derivadas de funciones simples, empleando para ello tanto la definición como las reglas de derivación, siendo su contexto predominante el algebraico, aunque algunos de sus ítems son más aplicados. La redacción de estos ítems se hace utilizando mayormente el sistema simbólico y no se requieren conversiones.

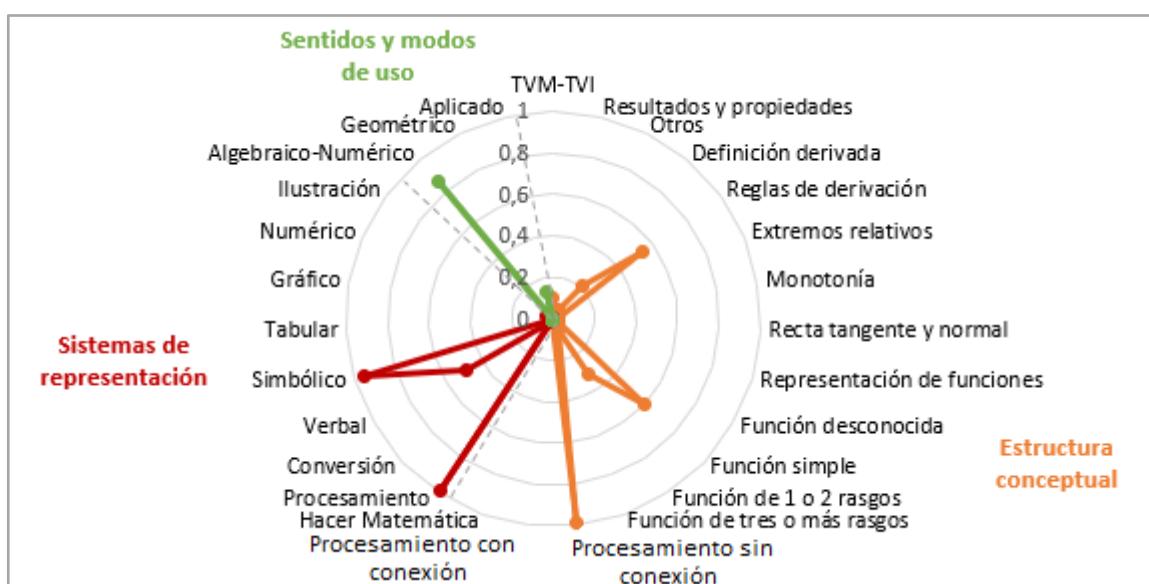


Figura 4 – Características del grupo 1, simbólico-algebraico

Fuente: elaboración propia

Como indicamos anteriormente, al agrupar los ítems no hicimos distinción por editorial; sin embargo, una vez identificados los grupos procedimos a identificar el número de ítems de cada editorial que conformaban cada grupo. En la Tabla 2 se observa que en este grupo la mayor participación la tiene Santillana y Bruño. Teniendo menos presencia el libro de la editorial Edelvives.

Tabla 2 – Cantidad de ítems que cada libro aporta a los grupos

Editorial	Número de ítem dentro del grupo		
	1 (408 ítems)	2 (578 ítems)	3 (263 ítems)
SM	83	103	29
Anaya	74	131	45
Santillana	120	101	62
Edelvives	39	85	76
Bruño	92	158	51

Fuente: elaboración propia

El segundo grupo (ver Figura 5), al que denominamos simbólico-geométrico, se

caracteriza por abordar, fundamentalmente, el contenido de extremos relativos, la monotonía de una función y la recta tangente o normal, es decir, ítems en un contexto casi exclusivamente geométrico, empleando para ello funciones simples. Lo interesante de este grupo es que, aunque el sistema de representación suele ser el simbólico-verbal, no solo se espera un procesamiento, sino que en algunos de ellos se solicita el paso a otro sistema de representación (conversión). Además, en este grupo es posible hallar ítems que demandan un procedimiento con conexión, e incluso hacer matemáticas, aunque predominan las tareas sin conexión.

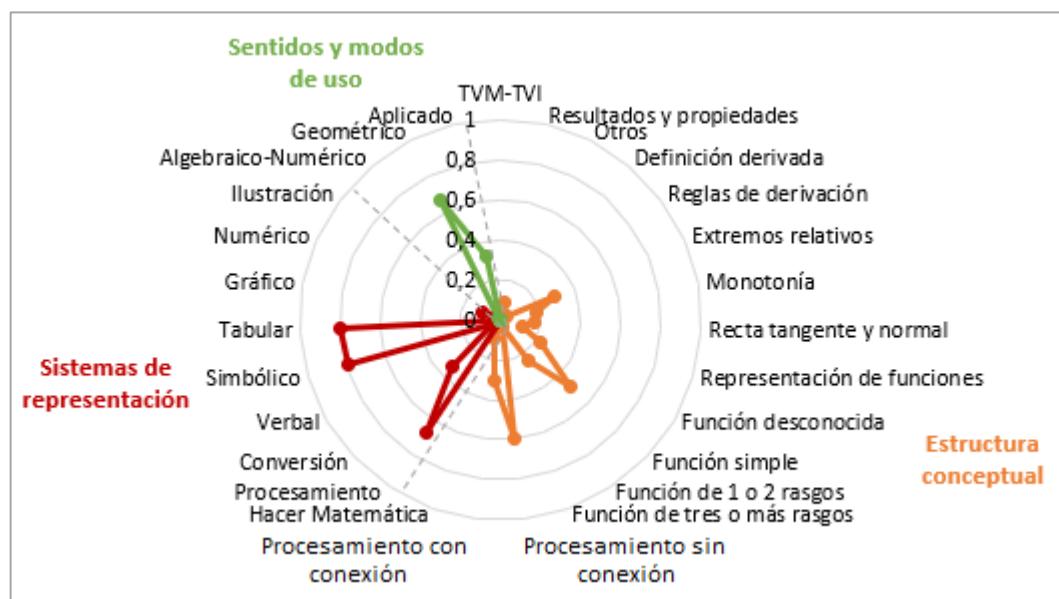


Figura 5 – Características del grupo 2, simbólico-geométrico
 Fuente: elaboración propia

Al analizar la cantidad de ítems por editorial que conforman este segundo grupo, tal como se observa en la Tabla 2, notamos que las cinco editoriales tienen una presencia similar, aunque podemos destacar que más de un cuarto de los ítems de este grupo pertenecen a la editorial Bruño.

Finalmente, el tercero y más particular de los grupos (Figura 6), se conforma de ítems dedicados a las reglas de derivación donde el trabajo del estudiante consiste solo en conocerlas y aplicarlas, por lo que le llamamos algorítmico. Tratándose ítems en los que predominan procedimientos sin conexión, en un contexto meramente algebraico. Aunque sin duda en el grupo 1 también se hallan varios ítems de este tipo, en este grupo aparecen funciones de tres o más rasgos.

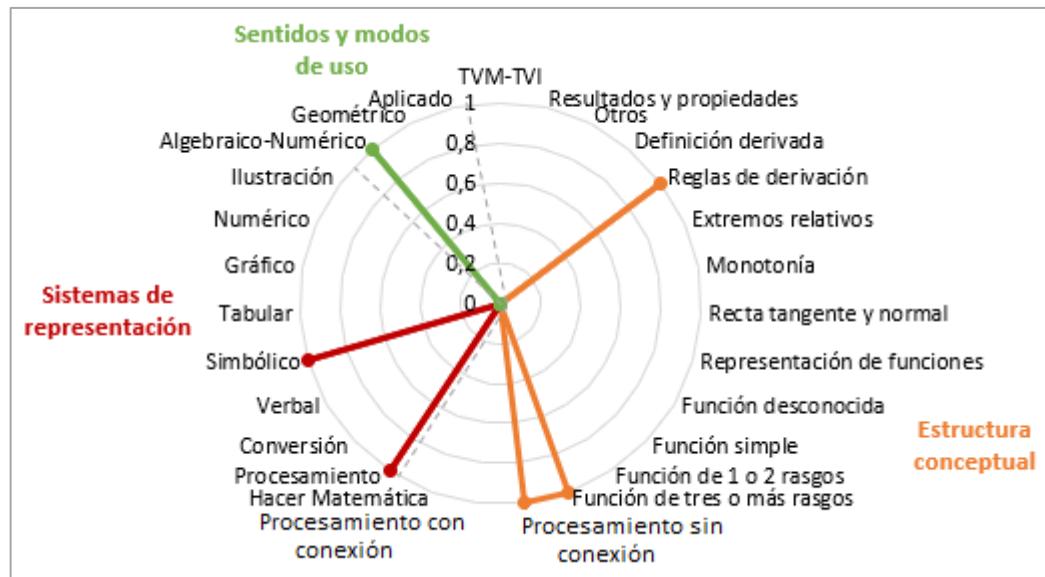


Figura 6 – Características del grupo 3, algorítmico

Fuente: elaboración propia

En la Tabla 2 vemos como Edelvives es el libro que más ítems presenta dentro de este grupo, seguido por Santillana.

Identificamos algunas similitudes entre el último grupo y el primero. Ambos presentan ítems desarrollados en un contexto meramente algebraico, donde su objetivo principal es el aprendizaje de las reglas de derivación. Sin embargo, el programa estadístico ha identificado este tercer grupo por aparte ya que son ítems idénticos en cuanto a las variables consideradas. Veamos, ahora con más detalle, las semejanzas y diferencias presentadas en cada uno de los aspectos analizados.

4.2 Descripción por variable

En cuanto al contenido, los grupos se distribuyen tal como se observa en la Figura 7. En el primer grupo, sus ítems abordan el cálculo de la derivada, tanto por reglas de derivación como mediante el uso de la definición; mientras que en el segundo grupo (el más numeroso) no destaca un contenido particular, abordando extremos relativos, la monotonía de una función y la recta normal; y el tercer grupo, que como señalamos en el apartado anterior, está compuesto por más de 250 ítems que tratan únicamente el contenido de reglas de derivación.

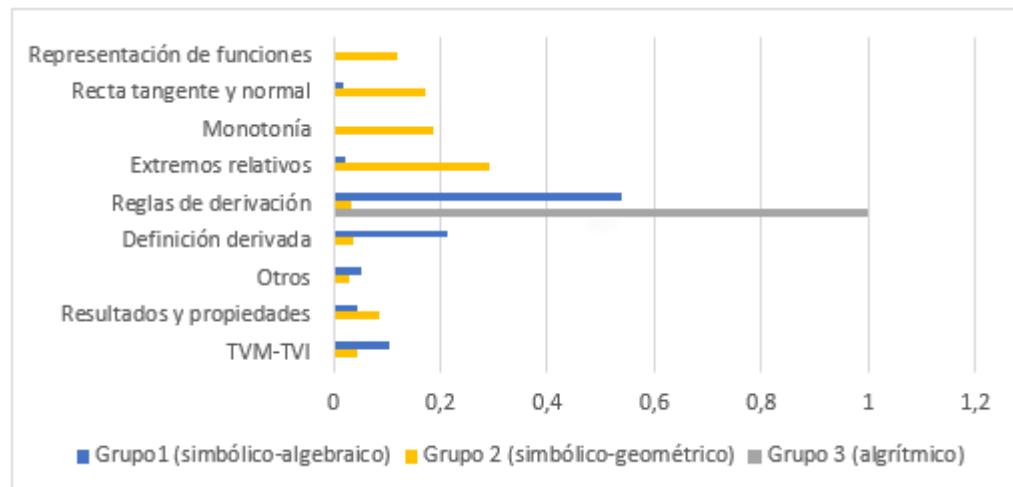


Figura 7 – Distribución de los grupos por contenido

Fuente: elaboración propia

En cuanto al tipo de función, resultó que el grupo 3 se caracteriza por ser prácticamente el único que emplea funciones de tres o más rasgos, mientras que el grupo 1 y 2 trabajan mayormente con funciones simples, tal como se observa en la Figura 8.

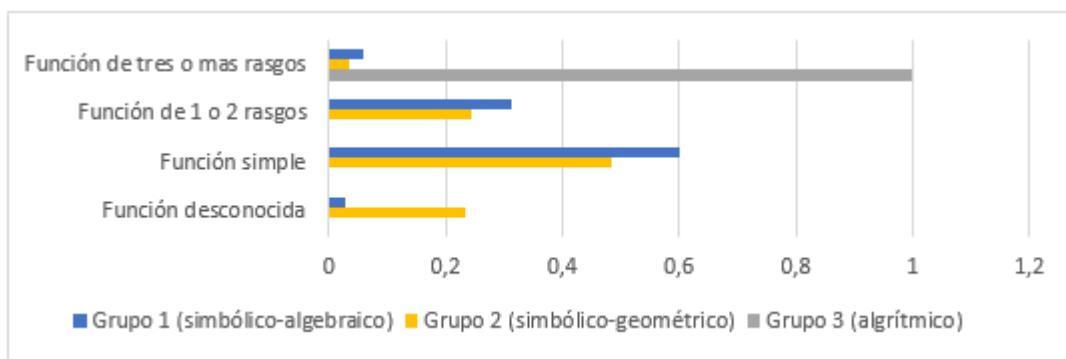


Figura 8 – Tipo de función en cada grupo

Fuente: elaboración propia

Según la demanda cognitiva de los ítems, tal como se puede ver en la Figura 9, los grupos 1 y 3 se caracterizan por ser ítems que demandan un procedimiento sin conexión, aunque en el grupo 1 se hayan algunos ítems que promueven un procedimiento con conexión; por otra parte, el grupo 2 está formado por ítems cuya demanda cognitiva es más variada, pues es posible encontrar ítems que solicitan un procedimiento sin conexión, otras con conexión e incluso ítems para *hacer matemática*.

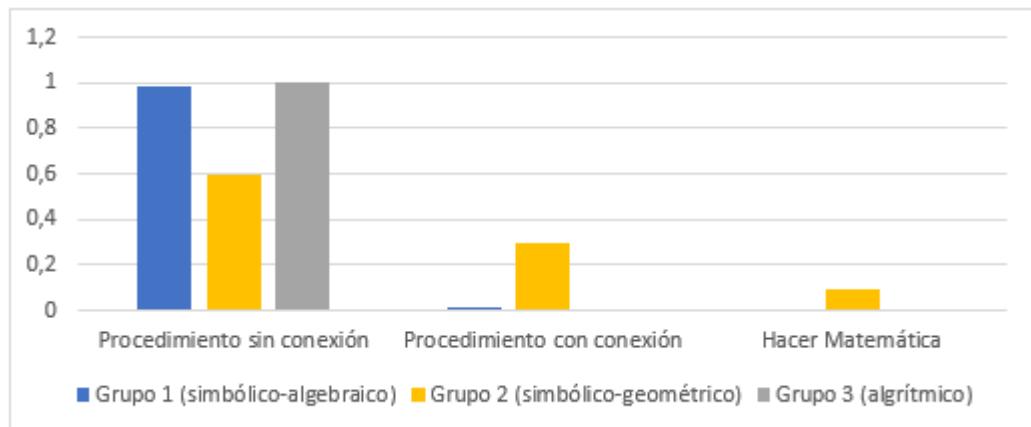


Figura 9 – Demanda cognitiva solicitada en los grupos

Fuente: elaboración propia

Tras agrupar los ítems, en la Figura 10 observamos que el primer grupo es, principalmente, simbólico, aunque se complementa con el verbal. El segundo podría llamarse verbal-simbólico, aunque es complementado de forma mínima con el sistema gráfico, mientras el tercero es meramente simbólico.

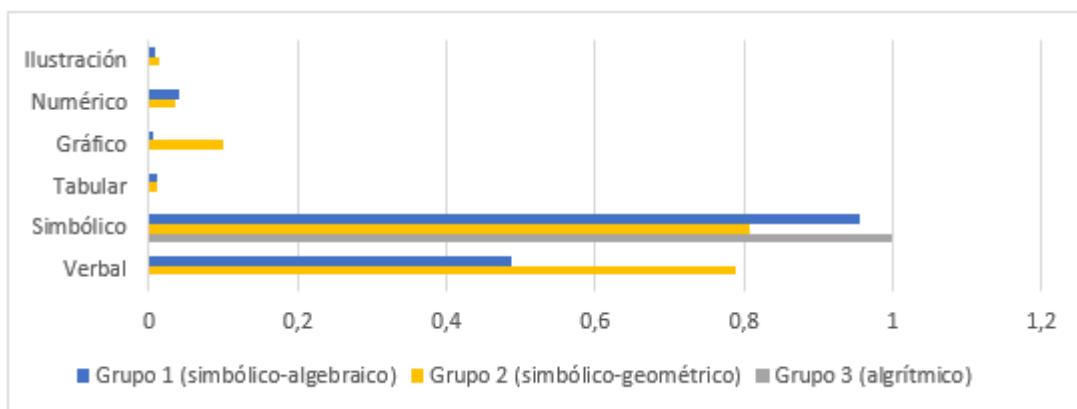


Figura 10 – Sistema de representación empleado en los grupos

Fuente: elaboración propia

En la Figura 11 se muestra que, con respecto al manejo de las representaciones, aunque el procesamiento es el que más se propone, el grupo 2 se diferencia por ser el que más conversión de los sistemas de representación solicita. Lo cual tiene sentido, pues son ítems redactados de forma simbólica en los que muchas veces se solicita el estudio de aspectos geométricos.

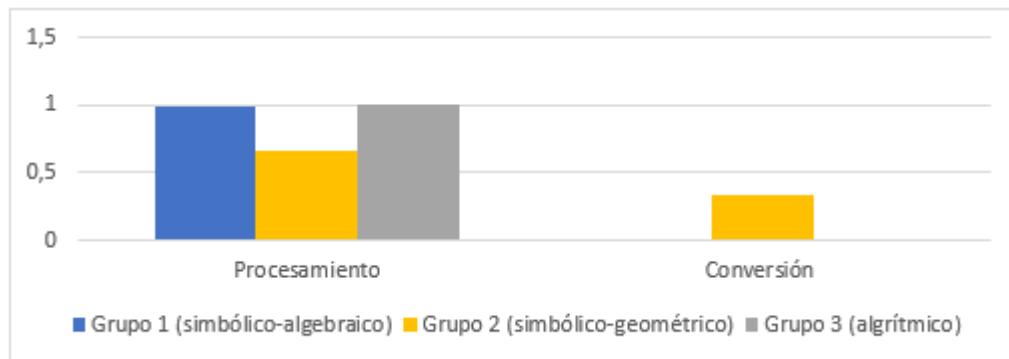


Figura 11 – Manejo que se requiere del sistema de representación

Fuente: elaboración propia

Por otra parte, en lo que respecta al contexto, los resultados son los que se observan en la Figura 12. Tanto en el grupo 1 como en el 3 predominó el contexto algebraico-numérico, sin embargo, en el grupo 1 se hallan algunos ítems en un contexto más aplicado. El segundo grupo se caracteriza por un contexto más geométrico, lo cual concuerda con la Figura 7 ya que es el grupo de ítems que aborda la representación de funciones, extremos, monotonía, entre otros.

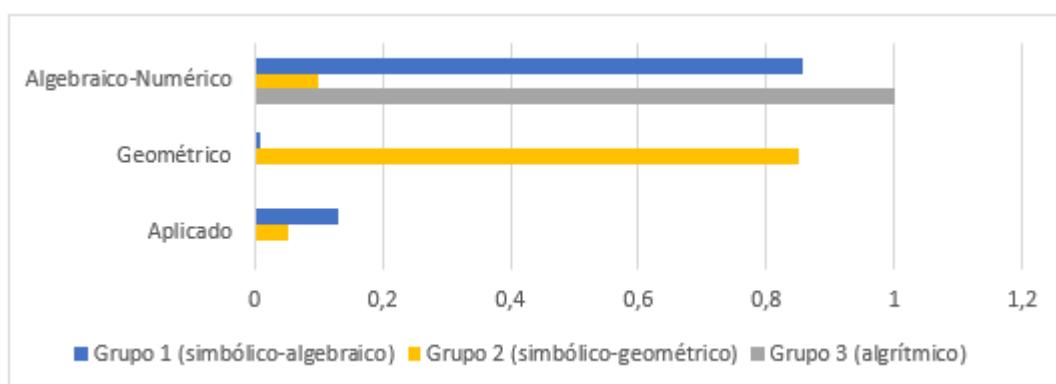


Figura 12 – Contexto por grupo de ítems

Fuente: elaboración propia

4.3 Grupo que caracteriza a cada libro

Hasta ahora hemos descrito los tres grupos de ítems identificados mediante el análisis clúster. Ahora, establecemos la presencia de cada uno de los grupos en los distintos libros. En la Figura 13 se puede observar como en los libros de SM, Anaya, Edelvives y Bruño sobresalen los ítems del segundo grupo, el simbólico-geométrico; mientras que al libro de Santillana lo caracterizan los ítems del primer grupo, el simbólico-algebraico.

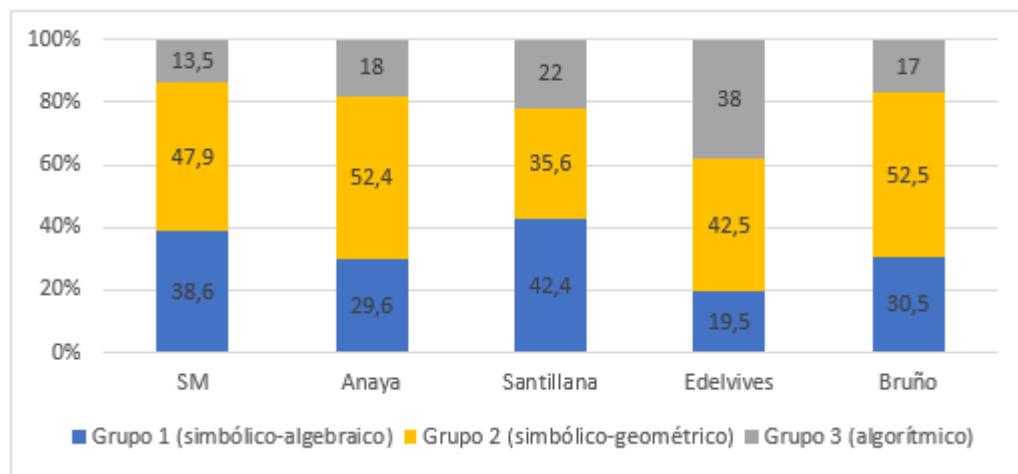


Figura 13 – Porcentaje de ítems por grupo en cada libro

Fuente: elaboración propia

Si reconocemos las similitudes entre el grupo 1 y 3, siendo ítems enfocados principalmente en el álgebra y reglas de derivación; vemos que, por ejemplo, en el libro de SM y Edelvives estos dos grupos conforman la mayoría de los ítems, de hecho, llama la atención que cerca de un 40% de los ítems de Edelvives se centran, exclusivamente, en las reglas de derivación (grupo 3, al que denominamos algorítmico).

De esta forma, si consideramos únicamente dos tipos de ítems, los simbólico-algorítmicas (grupo 1 y 3) y los simbólico-geométricos (grupo 2), tendríamos que Santillana contiene más ítems simbólico-algorítmicos; al igual que SM y Edelvives, aunque estos son bastante equilibrados en cuanto a estos dos tipos de ítem. Mientras que en Anaya y Bruño destacan ítems más simbólico-geométricos.

5 Discusión de los resultados

Para finalizar, nos centramos ahora en analizar los resultados obtenidos en términos de nuestro marco teórico. Considerando un resumen de los resultados obtenidos (Cuadro 5), podemos ver que el primer y tercer grupo en cuanto a estructura conceptual abordan elementos básicos de la derivada, lo cual dentro de nuestro marco los interpretamos como hechos. Dentro del campo procedimental vemos que la principal demanda cognitiva tiene más que ver con una destreza (aprender y manejar un algoritmo) y no tanto con razonamientos o estrategias. En cuanto a los sistemas de representación emplean el simbólico principalmente, destacando en todo momento el sentido algebraico de la derivada.

Variable	Grupos		
	1(408 ítems)	2(578 ítems)	3(263 ítems)
Estructura conceptual	Definición y reglas de derivación para funciones simples y con procedimiento sin conexión <i>Un poco de hacer matemática</i>	Aspectos geométricos para funciones simples y con procedimiento con y sin conexión	Reglas de derivación para funciones complejas y con procedimiento sin conexión
Sistema de representación	Simbólico verbal (Procesamiento)	Simbólico verbal (Procesamiento y conversión)	Simbólico (Procesamiento)
Contexto	Algebraico-numérico	Geométrico	Algebraico-numérico

Cuadro 5 – Resumen resultados

Fuente: elaboración propia

El segundo grupo, respecto a la estructura conceptual se adentra un poco más en los conceptos y relaciones de la derivada, aunque la mayoría de las veces con funciones simples, pero estudian la relación de la derivada con el componente geométrico. En cuanto al campo procedural, estos ítems también promueven la destreza, pero incluyen algo de razonamiento, demandando procedimientos con conexión y el manejo de distintos sistemas de representación. Todo esto resaltando el sentido geométrico de la derivada.

De esta forma, en los cinco libros de texto analizados, se identifican tres grandes grupos de ítems, los cuales ponen de manifiesto tres significados de la derivada. Los dos primeros, que fortalecen el aprendizaje procedural, y el tercero, que favorece el conceptual:

- a) Un significado meramente procedural-algebraico, sin conexiones; basado en la ejecución de reglas básicas aplicadas a funciones sencillas y al conocimiento y aplicación de la definición del concepto. Está basado en un único sistema de representación, el algebraico, y las aplicaciones están contextualizadas en situaciones algebraico-numéricas. Se identifica con el grupo 1.
- b) Un significado algorítmico, similar al anterior en casi todos los aspectos salvo en uno: está centrado exclusivamente en la aplicación de reglas de derivación para funciones compuestas, lo que le otorga una característica de complejidad basada en la dificultad de la manipulación algebraica. Se identifica con el grupo 3.
- c) Un significado más conceptual-geométrico, donde se intenta establecer conexión entre los sentidos geométrico y algebraico, apareciendo, así, los sistemas de representación verbal y simbólico y los convenientes procesamientos entre ellos. Se identifica con el grupo 2.

Los elementos que destacan los libros de texto a través de las tareas propuestas permiten aproximarnos al significado que se pone de manifiesto; lo cual, como se mencionó al inicio,

constituyen la base de lo que el estudiante aprende y la idea de derivada que construye.

6 Conclusiones

El objetivo de este artículo fue identificar los significados de derivada que se manifiestan en los libros de texto mediante las tareas que proponen. Por medio del análisis clúster pudimos identificar tres grandes grupos de ítems: uno simbólico-algebraico, un segundo geométrico y un tercero algorítmico, que nos dan un indicio de la idea de derivada que se expresa.

A pesar de que el análisis realizado previamente nos proporcionó una idea cualitativa de las características de las tareas propuestas por cada libro (VARGAS, FERNÁNDEZ-PLAZA Y RUIZ-HIDALGO, en prensa), nos ha sorprendido que el análisis clúster haya agrupado toda esa cantidad de ítems en sólo tres grupos, en los que sobre todo se favorecen los aspectos procedimentales. Esto llama bastante la atención, pues tal como mencionábamos al inicio, para los docentes lo más importante es la calidad y la diferenciación de los ejercicios que plantean los libros (PEPIN, 1997) y en este caso, lo que detectamos es que no hay mucha diversidad.

Sin duda alguna, las reglas de derivación o el cálculo de valores extremos son contenidos que deben abordarse al estudiar la derivada, pero la comprensión del concepto, contemplando los distintos aspectos del significado debe incluir, además:

- Variedad de demandas cognitivas, ya que altos logros de aprendizaje se asocian con tareas que involucran altos niveles de pensamiento y razonamiento (SMITH; STEIN, 1998). Por ejemplo, tareas de *hacer matemática*, tienen poca presencia en los libros. Dentro de los grupos identificados se pueden observar algunos ítems cuya demanda es mayor (procedimientos con conexión o hacer matemática); sin embargo, consideramos que no constituyen un grupo predominante.
- Variedad de tipos de funciones para lograr los objetivos correspondientes a los procedimientos algebraicos. Consideramos que esto se recoge de manera adecuada en los libros de texto analizados.
- Variedad de sistemas de representación y conversiones entre ellos (DUVAL, 1999). Los resultados manifiestan que predomina la representación algebraica de una forma abrumadora.
- Variedad de contextos y situaciones que permitan dotar de sentido al concepto. No se completa el significado si carece de sentido, de un saber para qué se puede utilizar

(RUIZ-HIDALGO, 2016). Un aprendizaje sin sentido es un aprendizaje a corto plazo, que no está relacionado con el desarrollo de la competencia matemática, cuya característica principal es la utilidad de las matemáticas solucionar problemas reales (MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE, 2015). Los resultados son evidentemente negativos en este aspecto. Con las tareas propuestas estamos lejos del acercamiento al desarrollo de la competencia matemática.

En términos generales, la enseñanza de la derivada se limita a aspectos que, en realidad, requieren de poca comprensión de lo que el concepto de derivada significa, pues se tratan más de procesos mecánicos. Esto es un resultado que contradice la insistencia en que las tareas deben conducir a formas más rigurosas de pensamiento y razonamiento (KESSLER; STEIN; SCHUNN, 2015). Además, si tal como mencionábamos al inicio del artículo los libros de texto y las tareas que allí se proponen son la principal guía docente al diseñar e impartir lecciones (PEPIN, HAGGARTY, 2001), estos significados de derivada aquí identificados son muy posiblemente los que serán aprendidos.

Distintos autores han analizado la dificultad que presentan los alumnos para comprender la derivada (p. e. GARCÍA-GARCÍA; DOLORES-FLORES, 2019; FUENTEALBA; BADILLO; SANCHEZ-MATAMOROS, 2019; FUENTEALBA et al., 2019). Claramente la solución al problema no se reduce a mejorar o ampliar el tipo de tareas en los libros de texto, pero se debe tener presente que la naturaleza de las tareas a la que se enfrentan los alumnos determina, en gran medida, lo que estos aprenden (SMITH; STEIN, 1998), por lo que resulta un factor al que se debe prestar atención.

Esperamos que los resultados aquí presentados sirvan de reflexión a los docentes y les sean oportunos en la toma de decisiones al planificar sus lecciones. Sugerimos emplear los libros de texto complementando sus lecciones con tareas de tipos variados, con distintos niveles de demanda cognitiva, que enriquezcan la conversión entre diferentes sistemas de representación y que pongan de manifiesto la utilidad de la derivada más allá de las aplicaciones puramente matemáticas. En los libros de texto se presentan ejemplos de excelentes tareas que pueden servir de base, pero si deseamos enriquecer el significado de derivada y, consecuentemente favorecer el aprendizaje significativo, el profesorado debe procurar que estas tengan un mayor peso en el proceso de enseñanza, tomándolas en cuenta en el diseño de nuestras secuencias de tareas.

Referencias

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A semiotic interpretation of the derivative concept in a textbook.

ZDM Mathematics Education, Berlin, v. 50, n. 57, 2018.

ANTONIO, M.; GONZÁLEZ, L.; LORENZO, J.; MALANA, A.; DEL RIO, J.; SANTOS, D.; DE VICENTE, M. **Matemáticas I**: 1 Bachillerato. Granada: Santillana, 2015.

ARIAS, J. M.; MAZA, I. **Matemáticas**: 1 Bachillerato. Madrid: Bruño, 2015.

BALCAZA, T.; CONTRERAS, A.; FONT, V. Análisis de Libros de Texto sobre la Optimización en el Bachillerato. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 59, p. 1061-1081, dic. 2017

BELL, A. W.; COSTELLO, J.; KÜCHEMANN, D. **A review of research in mathematical education**: Reserch on learning and teaching. Oxford: NFER-NELSON, 1983.

BHAIRD, C. M.; NOLAN, B.; O'SHEA, A.; PFEIFFER, K. A study of creative reasoning opportunities in assessments in undergraduate calculus courses. **Research in Mathematics Education**, New York, v. 19, n. 2, p. 147-162, 2016.

BIEHLER, R. Reconstruction of meaning as a didactical task: The concept of function as an example. In: KILPATRICK, J.; HOYLES, C.; SKOVMOSE, O. (ed.). **Meaning in Mathematics Education**. New York: Springer, 2005. p. 61-81.

BREEN, S.; O'SHEA, A. Mathematical Thinking and Task Design. **Irish Mathematical Society Bulletin**, Dublin, v. 66, p. 39-49, 2010.

CARDONA, S.; REY, J. **Bachillerato 1**: Matemáticas. Práctica. Zaragoza: Editorial Edelvives, 2015a.

CARDONA, S.; REY, J. **Bachillerato 1**: Matemáticas. Teoría. Zaragoza: Editorial Edelvives, 2015b.

CASTRO, E.; CASTRO, E. Representaciones y modelización. In: RICO, L. (ed.). **La educación matemática en la Enseñanza Secundaria**. Barcelona: Horsori, 1997. p. 95-124.

CASTRO-RODRÍGUEZ, E.; PITTA-PANTAZI, D.; RICO, L.; GÓMEZ, P. Prospective teachers' understanding of the multiplicative part-whole relationship of fraction. **Educational Studies in Mathematics**, Utrecht, v. 92, p. 129-146, 2016.

COLERA, J.; OLIVEIRA, M. J.; GARCÍA, R.; SANTAELLA, E. **Bachillerato 1**: Matemáticas I. Madrid: Grupo Anaya, 2008.

CONTRERAS, A.; GARCÍA, M.; FONT, V. Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 42B, p. 667-690, abr. 2012.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, 1999.

FAN, L. Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. **ZDM Mathematics Education**, Berlin, v. 45, p. 765-777, 2013.

FERNÁNDEZ-PLAZA, J. A.; RICO, L.; RUIZ-HIDALGO, J. F. Concept of Finite Limit of a Function at a Point: Meanings and Specific Terms. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, New York, v. 44, n. 5, p. 699-710, 2013.

FREGE, G. Sobre sentido y referencia. En: FREGE, G. (ed.). **Escritos filosóficos**. Madrid: Tecnos, 1996.

FUENTEALBA, C.; BADILLO, E.; SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. Identificación y caracterización

de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada. **Enseñanza de Las Ciencias**, Barcelona, v. 37, n. 2, p. 63–84, jun. 2019.

FUENTEALBA, C.; BADILLO, E.; SÁNCHEZ-MATAMOROS, G.; CÁRCAMO, A. (2019). The Understanding of the Derivative Concept in Higher Education. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, London, v. 15, n. 2, p. 1-15, 2019. Disponible en: <https://www.ejmste.com/article/the-understanding-of-the-derivative-concept-in-higher-education-5623>. Acceso: abr. 2019

GARCÍA-GARCÍA, J.; DOLORES-FLORES, C. Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. **Mathematics Education Research Journal**, Utrecht, 2019. Disponible en: <https://link.springer.com/article/10.1007/s13394-019-00286-x>. Acceso: may. 2019

GÓMEZ, P.; ROMERO, L. Enseñar matemáticas escolares. En: FLORES, P.; RICO, L. (ed.). **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria**. Madrid: Pirámide, 2015. p. 61–88.

HADAR, L.; RUBY, L. Cognitive opportunities in textbooks: the cases of grade four and eight textbooks in Israel. **Mathematical Thinking and Learning**, London, 2019.

HÄRDLE, W.; SIMAR, L. **Applied multivariate statistical analysis**. London: Springer, 2015.

HIEBERT, J.; LEFEVRE, P. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: In introductory analysis. In: HIEBERT, J. (ed.). **Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics**. Abingdon: Routledge, 1986.

JIMÉNEZ, A. **Significados de la derivada en las pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la universidad**. 2017. Trabajo Fin de Máster (Máster en Didáctica de la Matemática) - Universidad de Granada, Granada, 2017.

KESSLER, A. M.; STEIN, M. K.; SCHUNN, C. D. Cognitive Demand of Model Tracing Tutor Tasks: Conceptualizing and Predicting How Deeply Students Engage. **Technology, Knowledge and Learning**, New York, v. 20, n. 3, p. 317-337, feb. 2015.

LITHNER, J. Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. **ZDM Mathematics Education**, Berlin, v. 49, p. 937–949, 2017.

MARTÍN-FERNÁNDEZ, E.; RUIZ-HIDALGO, J. F.; RICO, L. Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. **Enseñanza de Las Ciencias**, Barcelona, v. 34, n. 3, p. 51–71, 2016.

MARTÍN-FERNÁNDEZ, E.; RUIZ-HIDALGO, J. F.; RICO, L. Meaning and understanding of school mathematical concepts by secondary students: The study of sine and cosine. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, London, v. 15, n. 12, p. 1-18, 2019.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE. Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. **Boletín Oficial Del Estado**, Madrid, v. 37, n. 3, p. 169–546, 2015.

MORENO, A.; RAMÍREZ, R. Variables y funciones de las tareas matemáticas. En: RICO, L.; MORENO, A. (ed.). **Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria**. Madrid: Ediciones Pirámide, 2016. p. 243-257.

PARK, J. Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. **Educational Studies in Mathematics**, Utrecht, v. 91, p. 395–421, 2016.

PEPIN, B. **Developing an understanding of mathematics teachers in England, France and Germany: an ethnographic study.** Tesis Doctoral - Universidad de Reading, Reading, 1997.

PEPIN, B.; HAGGARTY, L. Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. **ZDM Mathematics Education**, Berlin, v. 33, n. 5, p. 158-175, 2001.

PÉREZ, C. **Técnicas de análisis multivariable de datos.** Madrid: Pearson Educación, 2004.

RAMOS, L.; CASAS, L. Demanda Cognitiva de Estándares Educativos y Libros de Texto para la Enseñanza del Álgebra en Honduras. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 1134-1151, dic. 2018.

RICO, L. Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, Madrid, v. 1, p. 39-63, 2012.

RICO, L. Matemática y análisis didáctico. En: RICO, L.; A. MORENO (ed.). **Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria.** Madrid: Ediciones Pirámide, 2016. p. 85–100.

RUIZ-HIDALGO, J. F. Sentidos y modos de uso de un concepto. En: Rico, L. y Moreno, A. (Eds.). **Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria.** Madrid: Ediciones Pirámide, 2016. p. 139-152.

SMITH, M.; STEIN, M. Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, New York, v. 3, p. 344-350, 1998.

STEIN, M. K.; GROVER, B. W.; HENNINGSEN, M. Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. **American Educational Research Journal**, New York, v. 33, n. 2, p. 255-288, 1996.

SULLIVAN, P.; CLARKE, D.; CLARKE, B. (ed.). **Teaching with Tasks for Effective Mathematics Learning.** Springer, 2013.

TRAN, D.; TARR, J. E. Examination of Bivariate Data Tasks in US High School Textbooks Through the Statistical Investigation and Cognitive Demands Frameworks. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Utrecht, v. 16, p. 1581–1603, 2018.

VARGAS, M. F.; FERNÁNDEZ-PLAZA, J. A.; RUIZ-HIDALGO, J. F. Análisis de tareas sobre derivadas propuestas en los libros de texto. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, Madrid, en prensa.

VIZMANOS, J.; HERNÁNDEZ, J.; ALCAIDE, F., MORENO, M.; SERRANO, E. **Matemáticas: 1 Bachillerato. Ciencias y tecnología.** Madrid: Ediciones SM, 2008.

WANG, Y.; BARMBY, P.; BOLDEN, D. Understanding Linear Function: A Comparison of Selected Textbooks from England and Shanghai. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Utrecht, v. 15, p. 131–153, 2017.

WENDLER, T.; GRÖTTRUP, S. **Data mining with SPSS modeler.** London: Springer, 2016.

Submetido em 01 de Outubro de 2019.
Aprovado em 21 de Junho de 2020.