



Ingeniería y competitividad

ISSN: 0123-3033

ISSN: 2027-8284

Facultad de Ingeniería, Universidad del Valle

Amaya-Vásquez, Luis; Inga-Ortega, Esteban  
Localización de Distorsiones Armónicas en Sistemas Eléctricos usando Sensado Comprimido  
Ingeniería y competitividad, vol. 24, núm. 1, e30511037, 2022, Enero-Junio  
Facultad de Ingeniería, Universidad del Valle

DOI: <https://doi.org/10.25100/iyce.24i1.11037>

Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291371829032>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

UNEM  
redalyc.org

Sistema de Información Científica Redalyc  
Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal  
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso  
abierto

# Location of Harmonic Distortions in Electrical Systems using Compressed Sensing

INGENIERÍA ELÉCTRICA

## Localización de Distorsiones Armónicas en Sistemas Eléctricos usando Sensado Comprimido

Luis Amaya-Vásquez<sup>1§</sup> , Esteban Inga-Ortega<sup>1</sup> <sup>1</sup>*Universidad Politécnica Salesiana-sede Quito, Quito, Ecuador*§*luisgamayavasquez@gmail.com, einga@ups.edu.ec***Recibido:** 21 de febrero de 2021 – **Aceptado:** 15 de noviembre de 2021

### Abstract

This article is a study of the state of the art, where the advantages and disadvantages of the different classical digital signal processing techniques used to identify harmonic frequencies that distort the voltage and current waveforms of an electrical network are analyzed. Taking as a reference the classical techniques that determine the harmonic distortion of an electrical signal, an alternative is proposed for the detection of harmonic frequencies in an electrical waveform, based on compressed sensing algorithms; this technique extracts an efficient and reduced sample of the signal under study, this sample is transformed to the frequency domain by means of a transformation base which, for the present case study is the discrete cosine transform (DCT). The reduced signal in the frequency domain is subjected to a non-linear optimization process, which classifies the coefficients, extracts the most representative ones and makes the least representative ones zero. It is here where the harmonic frequencies, immersed in the electrical waveform come to light in a clear and precise way, with which the harmonic distortion (THD) is calculated. This article shows an example of the compressed sensing technique for the detection of harmonic frequencies in a theoretical sinusoidal signal which is contaminated by third and fifth order harmonics, the optimized coefficient vector is extracted, and the harmonic frequencies are identified.

**Keywords:** *compressed sensing, discrete cosine transform, harmonic analysis, harmonic distortion, signal analysis.*

### Resumen

El presente artículo es un estudio del estado del arte, donde se analiza las ventajas y desventajas de las diferentes técnicas clásicas de procesamiento digital de señales usadas para identificar frecuencias armónicas que distorsiona

Como citar:

Amaya-Vásquez L, Inga-Ortega E. Localización de Distorsiones Armónicas en Sistemas Eléctricos usando Sensado Comprimido. INGENIERÍA Y COMPETITIVIDAD. 2022;24(1):e30511037. <https://doi.org/10.25100/iyct.24i1.11037>



Este trabajo está licenciado bajo una Licencia Internacional Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0

las formas de onda de voltaje y corriente de una red eléctrica. Tomando como referencia las técnicas clásicas que determinan la distorsión armónica de una señal eléctrica. Se propone una alternativa para la detección de frecuencias armónicas en una forma de onda eléctrica, basada en algoritmos de sensado comprimido; esta técnica extrae una muestra eficiente y reducida de la señal en estudio, dicha muestra es transformada al dominio de la frecuencia mediante una base de transformación que, para el presente caso de estudio es la transformada discreta del coseno (DCT). La señal reducida en el dominio de la frecuencia es sometida a un proceso de optimización no lineal, el cual clasifica los coeficientes, extrae los más representativos y convierte en cero a los menos representativos, es aquí donde salen a relucir de una forma clara y precisa las frecuencias armónicas, inmersas en la forma de onda eléctrica, con las cuales se calcula la distorsión armónica (THD). Este artículo muestra un ejemplo de la técnica de sensado comprimido, para la detección de frecuencias armónicas en una señal sinusoidal teórica la cual está contaminada por armónicos de tercero y quinto orden, se extrae el vector de coeficientes optimizado y se identifica las frecuencias armónicas.

**Palabras Clave:** *análisis armónico, análisis de señales, distorsión armónica, sensado comprimido, transformada discreta del coseno.*

## 1. Introducción

En la actualidad, la energía eléctrica se ve como un producto y no solo como un servicio; como todo producto, se cuantifica por sus características como la calidad, el precio y la accesibilidad. La calidad del producto eléctrico se mide a partir de variables cuantificables, siendo una de ellas la distorsión armónica (THD), esta variable mide porcentualmente cuánto se deforma la forma de onda sinusoidal de voltaje o corriente respecto de su onda fundamental <sup>(1)</sup>. Para calcular el THD es necesario encontrar las frecuencias armónicas inmersas en la onda eléctrica, que son frecuencias múltiplos de la frecuencia fundamental de trabajo del sistema; cuya amplitud va decreciendo conforme aumenta el múltiplo y la causa fundamental de la distorsión de las ondas de voltaje y corriente.

La interconexión de los sistemas eléctricos es cada vez más compleja. Una gran cantidad de cargas no lineales provocan la contaminación armónica grave y compleja en la red eléctrica; por ende, el control de los armónicos es de gran importancia. La señal en la aplicación práctica tiene la característica compleja de la interferencia del ruido, que incide directamente en el proceso de detección de armónicos <sup>(2)</sup>. Por lo tanto, eliminar el ruido y hacer que la

detección de armónicos sea estable lo más rápido posible es de gran importancia para evaluar la calidad de energía eléctrica que se está suministrando <sup>(3)</sup>.

Hoy en día, las técnicas computacionales en paralelo permiten obtener una mejora en el tiempo de cálculo informático y el procesamiento de amplios conjuntos de datos <sup>(4)</sup>. Como existe una gran cantidad de núcleos de computación, el tiempo de procesamiento se puede disminuir cuando una tarea compleja inicial se puede descomponer en subtarefas independientes más simples asignando un núcleo de procesador a cada una, ejecutándolas simultáneamente <sup>(5-7)</sup>.

La medición y el análisis de armónicos son partes clave de la evaluación de la calidad de la energía <sup>(8,9)</sup>. Las razones para que se produzcan armónicos son varias, entre las más frecuentes están las originadas por los equipos electrónicos que consumen energía eléctrica de una forma no lineal, es decir, de una forma no continua en el tiempo; también está la variación de los parámetros de un circuito e impedancias, y la conexión y desconexión de equipos <sup>(6-10)</sup>. Los armónicos en la demanda introducen fluctuaciones, caídas de tensión, desequilibrios en la red conduciendo a posibles daños y fallos de energía.

Para el análisis de la calidad de energía eléctrica ha sido pertinente el uso de técnicas de procesamiento digital de señales, técnicas que permiten la obtención de indicadores para evaluar la calidad del servicio, la literatura registra aplicaciones para el estudio del nivel de armónicos, medidas de precisión en sistemas eléctricos, estudio de potencia reactiva y análisis de transitorios entre otros indicadores.

El método clásico para la detección de distorsión armónica (THD) de una onda de voltaje o corriente presente en la red eléctrica es la transformada de Fourier (FT), de este método se derivan numerosas técnicas alternativas de procesamiento digital de señales para la localización de armónicos, a continuación se detallan las más relevantes <sup>(11)</sup>:

- Transformada de Fourier de corto tiempo (STFT).
- Transformada de Wavelet (WT).
- Transformada de Gabor (GT).
- Transformada S (ST).
- Filtros Digitales.
- Filtros Kalman (KF).
- Clase de Cohen.
- Métodos Paramétricos.
- Sensado Comprimido.

El presente trabajo analiza las ventajas y desventajas de cada una de estas técnicas alternativas, las cuales son de gran utilidad para la detección de armónicos. Centra su temática en la detección de armónicos mediante la técnica de sensado comprimido <sup>(12)</sup>. En la Figura 1 se plasma la idea principal del presente artículo.

### 1.1. Trabajos relacionados.

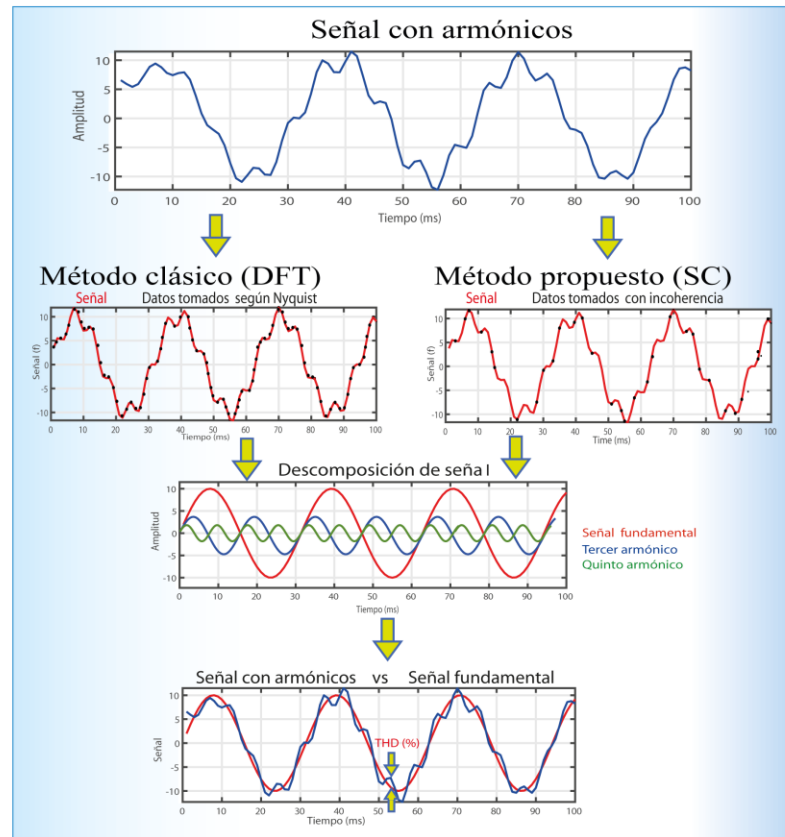
El crecimiento acelerado de la tecnología, por ende de los equipos electrónicos, hace que se aumente considerablemente las cargas no lineales, siendo estas fuentes de perturbaciones eléctricas que ocasionan anomalías en la tensión o corriente presentando variaciones de magnitud,

o valores cuadráticos medios, con respecto a su valor nominal durante un intervalo de tiempo; estos problemas afectan directamente a los consumidores en tiempos y costos de producción <sup>(13)</sup>. Existen varias técnicas y algoritmos para la detección de distorsión armónica en las señales eléctricas, mismas que tienen ventajas y desventajas. A continuación se citan las técnicas más usadas <sup>(12,13)</sup>.

1.1.1 Transformada de Fourier (FT). - Es la técnica más conocida para el análisis en el dominio de la frecuencia del cual derivan las demás técnicas. Sin embargo, funciona bien para el caso de tiempo infinito de una señal estacionaria y no puede resolver ninguna información temporal asociada con las fluctuaciones, para resolver esto se usa la transformada de Fourier en tiempo corto (STFT) <sup>(12,14)</sup>.

1.1.2 Transformada de Fourier de corto tiempo (STFT). - Divide la señal en pequeños segmentos, donde se puede suponer que estos segmentos de señal están estacionarios <sup>(1)</sup>. El STFT funciona bien siempre que la ventana sea lo suficientemente corta en comparación con la tasa de fluctuación; las altas tasas de fluctuación pueden dar lugar a errores importantes <sup>(15)</sup>.

1.1.3 Transformada de Wavelet (WT). - Es otra técnica para obtener características en el dominio tiempo-frecuencia. Se han propuesto muchos tipos de ondículas madre, incluida la ondícula compleja. Otros trabajos utilizan la combinación de WT y FFT para obtener ciertas características de la señal bajo análisis. La señal que se analiza se descompone primero en distintas representaciones: una rica en altas frecuencias y la otra en bajas frecuencias, procesando la señal a través de filtros de paso alto y paso bajo. Este proceso se repite a medida que la



**Figura 1.** Localización de distorsión armónica en una señal eléctrica mediante DFT y SC. Fuente: propia

señal se filtra en niveles sucesivos de detalle. Este proceso está fuertemente influenciado por el ruido superpuesto en la señal y la naturaleza iterativa de los algoritmos basados en el WT, también sufre de fugas espectrales y efectos de valla con impacto en la estimación <sup>(15-17)</sup>.

- 1.1.4 Transformada de Gabor (GT). - Posee una buena resolución tiempo-frecuencia y buena relación señal-ruido. La constancia en el ancho de todos sus elementos limita su uso a altas frecuencias GT se realiza en cada muestra utilizando todos los valores de muestra en sus ventanas de tiempo, por lo tanto, la complejidad computacional de estos algoritmos está directamente asociada con la frecuencia de muestreo.

- 1.1.5 Transformada S (ST). - Esta transformada tiene una corrección de fase asegurando que las amplitudes máximas sean regiones de fase estacionarias, se puede referir la fase del espectro al origen del eje del tiempo o a un punto. Debido a que los anchos de las ventanas de frecuencia, las transformadas S son proporcionales a su frecuencia central, esto puede ocasionar una medición incorrecta de los armónicos <sup>(18)</sup>. el ST es una extensión del GT y del WT, se basa en la forma de procesamiento de bloques y por lo tanto no satisface bien el requisito de tiempo real <sup>(12)</sup>.

- 1.1.6 Filtros Digitales. - Brindan una menor complejidad computacional que wavelet y STFT. A pesar de que las frecuencias

centrales de los filtros de paso de banda se establecen en las frecuencias armónicas, la salida no siempre corresponde a los componentes armónicos puros. Las bandas de frecuencia de los filtros de paso de banda pueden superponerse parcialmente entre sí y las propiedades de frecuencia de magnitud de estos filtros no son planas en sus respectivas bandas de frecuencia <sup>(12)</sup>.

1.1.7 Filtros Kalman (KF). - Poseen buena estimación de la relación de cambio frecuencia - amplitud y contenido armónico, buena relación señal-ruido. No son muy resistentes al ruido aditivo, su complejidad de cálculo es alta la observación del estado no es lineal, podría hacer que el KF divergiera en algunas condiciones iniciales mal elegidas. La inestabilidad KF puede conducir a una estimación inexacta de los componentes armónicos y fundamentales de una senoide en ruido <sup>(19)</sup>.

1.1.8 Clase de Cohen. - Reduce los problemas de interferencia dependiendo del núcleo, utilizado alta resolución en el dominio del tiempo y frecuencia. Las características de la función de distribución dependen de la elección del núcleo <sup>(17)</sup>.

1.1.9 Métodos Paramétricos. Tiene una resolución excepcional de tiempo-frecuencia. Los parámetros de la señal de prueba y entrenamiento están permitidos en una amplia gama y de manera controlada. Gran consumo de recursos computacionales y tiempo de procesamiento requiere una buena suposición de la distribución estadística de los datos del patrón <sup>(12,14,19)</sup>.

1.1.10 Sensado Comprimido (SC).- Es una técnica que ayuda a la recuperación de señales de manera eficiente respecto del costo computacional y tiempo de cálculo, permite representar señales mediante un número reducido de medidas, y a su vez, ofrece herramientas capaces de reconstruir las señales originales con muy poca pérdida de información <sup>(8,9)</sup>. Debido a las características antes mencionadas esta técnica es la que admite la mayoría de las ventajas de las técnicas antes mencionadas, a más de su reconocimiento de armónicos, se puede reconstruir señales y crear filtros para la reducción de la distorsión armónica (THD) en señales eléctricas.

## 1.2. Formulación del problema.

Las técnicas para localizar distorsiones armónicas, descritas en trabajos relacionados, parten del principio fundamental de la Transformada de Fourier (FT), la cual lleva la señal del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Sin embargo funciona bien para el caso de tiempo infinito de una señal estacionaria y no puede resolver ninguna información temporal asociada con las fluctuaciones.

Todas las técnicas concuerdan en que: en el dominio de la frecuencia es donde realizan su análisis para la detección de armónicos, encontrándose con los mayores desafíos: el ruido inmerso en la señal, grandes recursos computacionales, elevado tiempo de procesamiento de la señal, definición de ancho de ventana y la gran cantidad de datos que deben ser analizados continuamente. Lo que limita su desempeño en línea e implementación en plataformas tecnológicas como: procesadores de señales digitales, arreglos de puertas programables de campo, microprocesadores o microcontroladores.



## 2. Metodología

La metodología del sensado comprimido capta las características más relevantes de las técnicas analizadas y aporta con todas sus ventajas haciendo de esta técnica una potente herramienta para la detección de distorsión armónica, a más de su reconocimiento de armónicos, el sensado comprimido tiene la capacidad de estimar estados, localizar fallas eléctricas, en si muchas aplicaciones de estimación y reconstrucción de señales.

La detección de distorsión armónica en redes eléctricas de distribución por medio del sensado comprimido inicia adquiriendo una señal en el dominio del tiempo de tipo discreta. Esta señal es almacenada en un vector  $[f]$ ; de este vector se extrae una muestra aleatoria y reducida de la señal en estudio, dicha muestra es transformada al dominio de la frecuencia mediante una matriz diccionario  $[\Psi]$  para el caso de estudio se está usando la transformada discreta del coseno (DCT) como matriz diccionario.

La señal reducida en el dominio de la frecuencia es denominada vector de coeficientes totales  $[b]$ , este vector es sometido a un proceso de optimización no lineal por medio de la norma  $\ell_1$ , dicho proceso clasifica a los coeficientes, extrae los más representativos y convierte en cero a los menos representativos, mediante el método de programación línea simplex revisado el cual la mayoría de los números que aparecen en el vector de coeficientes del método normal no se usan realmente en las iteraciones, por lo cual en el método revisado solo se calculan los valores necesarios para encontrar la solución óptima a través de matrices. El resultado del proceso de optimización no lineal es un vector de coeficientes reducidos o también llamado vector de mediciones  $[x]$ , una combinación lineal del vector de mediciones  $[x]$  con una matriz de mediciones da como resultado una señal comprimida de similares características a la original con sus coeficientes reducidos, en la

Figura 2 se ilustra el flujograma del proceso de detección de distorsión armónica mediante la técnica de sensado comprimido.

A continuación, se detalla la metodología matemática del sensado comprimido, con la ayuda del siguiente ejemplo, se cuenta con una señal teórica de voltaje de frecuencia fundamental de 60 (Hz) y una amplitud pico-pico de 200 (V) el tiempo de adquisición de datos de la señal es de 0.4 segundos, la señal es de tipo discreta con 4000 muestras esto implica que el  $\delta t$  es de 0.1 ms. La señal es una senoide pura desde  $t=0$  hasta  $t=0.1$  segundos.

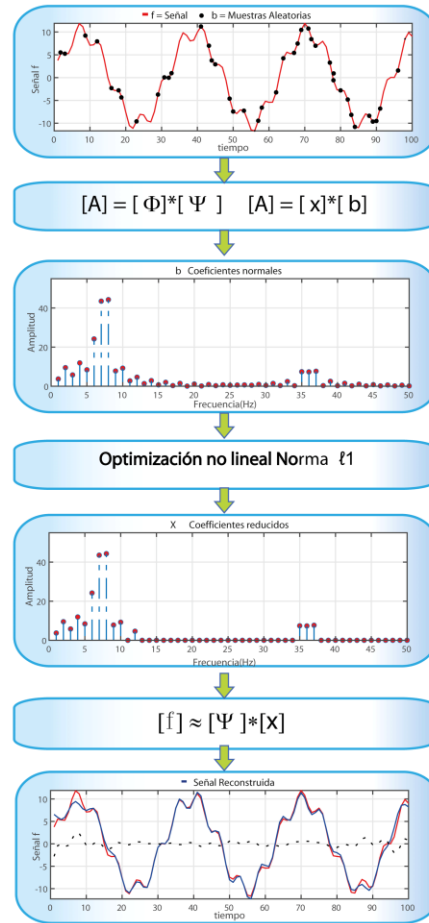
De  $t=0.1$  segundos a  $t=0.2$  segundos la señal fundamental se contamina con una señal de tercer armónico de amplitud 80 (V) pico-pico y frecuencia de 180 (Hz).

De  $t=0.2$  segundos a  $t=0.3$  segundos la señal fundamental se contamina con una señal de quinto armónico de amplitud 100 (V) pico-pico y frecuencia de 300 (Hz).

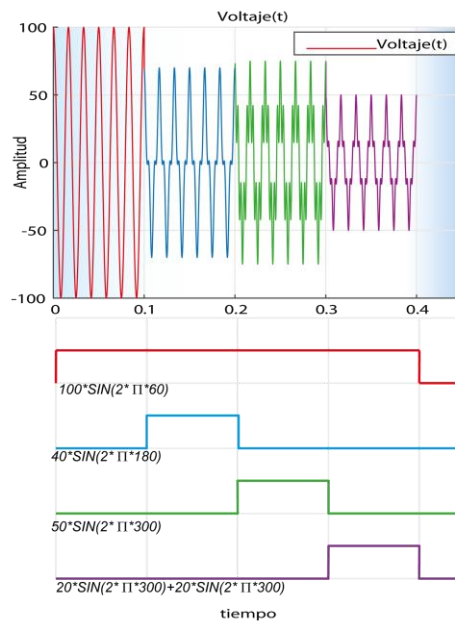
De  $t=0.3$  segundos a  $t=0.4$  segundos la señal fundamental se contamina con dos señales una de tercer armónico y una de quinto armónico, de amplitud 40 (V) pico-pico y frecuencia de 180 (Hz) y de amplitud 40 (V) pico-pico y frecuencia de 300 (Hz) respectivamente. La señal a ser estudiada con las técnicas de sensado comprimido se ilustran en la Figura 3.

Una señal rala o escasa no necesariamente debe cumplir con el teorema de Shannon/Nyquist que manifiesta que, para no perder la información en el proceso de reconstrucción de la señal a partir de la toma de muestras, la señal está limitada en banda y tasa de muestreo superior al doble de su ancho de banda. Según la técnica de sensado comprimido con unos pocos coeficientes se puede reconstruir la señal <sup>(6,20-22)</sup>.

Esta metodología se basa en el tratamiento digital de señales, se inicia con la adquisición de



**Figura 2.** Flujograma del proceso de detección de distorsión armónica mediante sensado comprimido. Fuente: propia



**Figura 3.** Detalle de la señal a estudiar. Fuente: propia



una señal discreta la cual es almacenada en un vector  $[f]$  para el presente ejemplo el vector  $[f]$  es un vector fila de longitud  $m = (1 \times 4000)$ , esta señal es transformada del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia para extraer los coeficientes de la misma, por medio de una matriz denominada diccionario  $[\Psi]$ . La matriz diccionario  $[\Psi]$  o matriz subyacente puede ser modelada a partir de la transformada rápida de Fourier (FFT), transformada Wavelet (DWT), transformada discreta del coseno (DCT), en sí cualquier transformación lineal que lleve la señal sensada al dominio de la frecuencia, donde la señal se transforma en un vector de coeficientes  $[C]$ , para el presente caso de estudio se usa como matriz diccionario  $[\Psi]$  la transformada del coseno (DCT), porque sus coeficientes son de tipo real <sup>(23-25)</sup>.

La transformada como base en sensado comprimido, permite obtener representaciones dispersas de las señales, permitiendo usarlas como base en un sistema de sensado comprimido. La transformada discreta del coseno (DCT) es una transformada basada en la transformada de Fourier discreta (DTF), pero solo utilizan números reales <sup>(26)</sup>. La DCT de una secuencia de datos  $X(m), m = 0, 1, \dots, (M - 1)$  se define como la Ec.1 y 2:

$$G_x(0) = \frac{\sqrt{2}}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X(m) \quad (1)$$

$$G_x(k) = \frac{\sqrt{2}}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X(m) * \cos(2m + 1 * k\pi/2m) \quad (2)$$

$$k = 1, 2, \dots, (M - 1)$$

Donde  $G_x(k)$  es el  $k$ -ésimo coeficiente. La transformada inversa discreta coseno (IDCT) se define como la Ec.3:

$$X_m = \frac{1}{\sqrt{2}} G_x(0) + \sum_{k=0}^{M-1} G_x(k) * \cos(2m + 1 * k\pi/2m) \quad m = 0, 1, \dots, (M - 1) \quad (3)$$

Si la Ec.3 se escribe en su forma matricial  $A$  de tamaño  $M \times M$  donde:  $M$  describe la transformación

coseno, entonces la propiedad de ortogonalidad puede ser expresada como la Ec.4:

$$A^T * A = \frac{M}{2} I \quad (4)$$

Donde  $A^T$  es la matriz transpuesta de  $A$  e  $I$  es la matriz identidad <sup>(26)</sup>.

La matriz diccionario es una colección finita de coeficientes elementales de norma unitaria, la matriz diccionario  $[\Psi]$  permite capturar información de una señal dispersa para que esta pueda ser utilizada por los algoritmos para la recuperación de dicha señal <sup>(1)</sup>. La Ec.5 muestra cómo obtener el vector de la señal discreta en dominio del tiempo en relación con  $[\Psi]$  y  $[C]$ .

$$[f] = [\Psi] * [C] \quad (5)$$

Donde:

$f$ : Vector de la señal discreta en dominio del tiempo.

$\Psi$ : Matriz diccionario (DCT)

$C$ : Vector de coeficientes de la señal  $f$  en el dominio de la frecuencia.

Una vez obtenido el vector de coeficientes  $[C]$  se analiza que efectivamente es un vector con la mayoría de los coeficientes tendiendo a cero por lo que se puede expresar que el vector  $[C]$  es realmente escaso. Ahora se debe obtener un vector aleatorio  $[t']$  que es un subconjunto del vector  $[t]$ , el vector aleatorio  $[t']$  para el presente caso de estudio es 1/10 del vector  $[t]$ , lo que significa  $n = 400$  datos no repetitivos tomados aleatoriamente del vector  $[t]$ , el vector  $[t']$  es un vector de índices utilizado para obtener la muestra del vector columna  $[b]$  de la Ec.6<sup>(23-25,27)</sup>.

$$[b] = [\Phi] * [f] \quad (6)$$

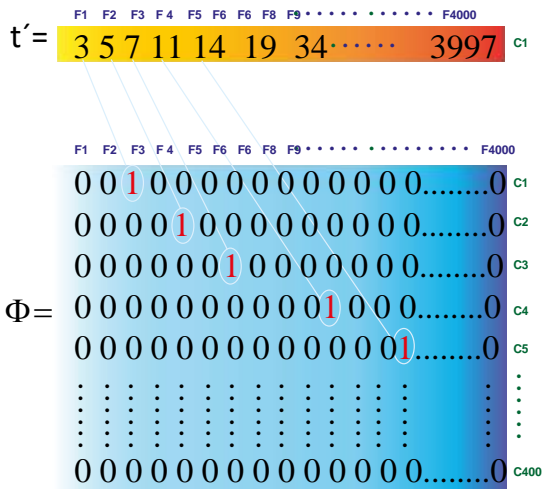
Donde:

$f$ : Vector de la señal discreta sensada en el dominio del tiempo.

$\Phi$ : Matriz de mediciones (subconjunto de filas del operador identidad).

$b$ : Muestras aleatorias de la señal  $f$ .

La matriz  $[\Phi]$  conocida como matriz de mediciones para el caso en estudio es una matriz de 400 filas por 4000 columnas, esto implica que tiene 400 vectores fila de longitud igual a 4000, cada vector fila de la matriz  $[\Phi]$  tiene 3999 ceros y un 1 que corresponde donde se tomó la muestra de medición esto se expresa en la Figura 4.

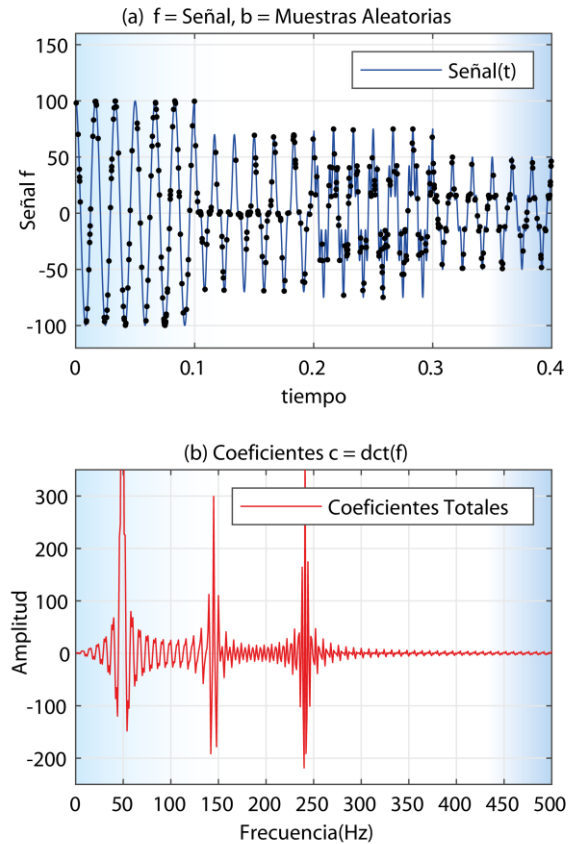


**Figura 4.** Como formar la matriz de mediciones  $[\Phi]$ .  
Fuente: propia

En la construcción de la matriz de mediciones  $[\Phi]$  es donde se puede analizar la potencialidad del sensado comprimido, si hablamos de un sistema eléctrico por ejemplo, la matriz  $[\Phi]$  puede ser armada en función de la matriz de admitancias y se podría estimar estados en cada una de las barras, encontrar distorsiones armónicas en las barras, estimar las cargas de menor factor de potencia del sistema eléctrico, estimar pérdidas no técnicas del sistema, estimar despachos de carga, estimar curvas de demanda eso solo tomando como referencia a un sistema eléctrico, el sensado comprimido puede escalar a otras ramas de la ciencia y poder estimar parámetros en los que se tenga pocos datos con una buena aproximación y bajos recursos computacionales<sup>(13,28-35)</sup>.

El vector  $[b]$  es un vector con (1/10) de muestras aleatorias de la señal  $f$ , por lo que la

matriz de mediciones  $[\Phi]$  es un subconjunto de las filas del operador identidad. En la Figura 5a se aprecia la señal de  $[f]$  en el dominio del tiempo en forma de puntos, en la Figura 5b se observa los coeficientes de la señal en el dominio de la frecuencia.



**Figura 5.** a) Señal  $f(t)$  y puntos del vector  $[b]$  b) Coeficientes  $[C]$  de  $f(t)$ . Fuente: propia

Para obtener la matriz  $A$  se extrae la transformada discreta del coseno a la matriz de mediciones  $[\Phi]$  de acuerdo a la Ec.7:

$$[A] = [\Phi] * [\Psi] \quad (7)$$

Para reconstruir la señal se minimiza el número de coeficientes del vector  $[C]$ , obteniendo como respuesta un vector de coeficiente reducidos  $[x]$  que contiene los coeficientes optimizados de la señal  $[f]$  para lograr este cometido se debe resolver la Ec.8<sup>(28,36)</sup>:

$$[A] * [x] = [b] \quad (8)$$

Donde:

**A:** Matriz de coeficientes (m x n).

**x:** Vector de coeficientes reducidos.

**b:** Muestras aleatorias de la señal  $f$

Como se trata de una compresión la matriz A es de tipo rectangular, con más columnas que filas (4000 columnas y 400 filas), para el cálculo del vector de coeficientes reducidos  $[x]$  implica resolver un sistema indeterminado de ecuaciones lineales con 10 veces más incógnitas que ecuaciones que es lo que se muestra en la Ec.8, para solucionar dichas indeterminaciones se usa las normas matriciales de aproximación, que se encuentran dadas en forma de vectores matriciales que ayudan a recuperar señales las cuales pueden llegar a tener seudonormas que al aproximar a los vectores se puede minimizar el error de aproximación o reconstrucción los tipos de normas pueden ser  $l_1, l_2, l_\infty$ .

Reconstrucción mínima de norma  $l_2$  Define la norma  $l_p$  del vector de  $[x]$  con longitud N como la Ec.9:

$$(\|x\|_p)^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p \quad (9)$$

Donde para obtener una recuperación aproximada de la señal analizada, es necesario emplear la Ec.1, donde la solución está contenida dentro del vector  $y$  empleando el concepto de aproximación para  $l_2$  se tiene la Ec.10:

$$\hat{x} = \arg \min \|x\|_{\ell_2} \quad \text{tal que} \\ \Psi^* x = y \quad (10)$$

Donde:

$\Psi$ : es la matriz de reconstrucción de la señal.

$y$ : margen de error relativo.

La desventaja es que una minimización  $l_2$ , generalmente no encuentra una solución adecuada, retornando un vector  $x$  disperso con

varios elementos diferentes de cero. Reconstrucción mínima de norma  $l_0$ . Debido a que la norma  $l_2$  hace una medición de la energía de la señal mas no su dispersión, es necesario considerar la norma que cuantifica el número de entradas diferentes de cero en el vector  $x$ . En consecuencia, un vector  $k$ -disperso contiene una norma  $l_0$  igual a  $k$ , dando como resultado un proceso de optimización modificado, como se observa en la Ec.11:

$$\hat{x} = \arg \min \|x\|_0 \quad \text{tal que} \\ \Psi^* x' = y \quad (11)$$

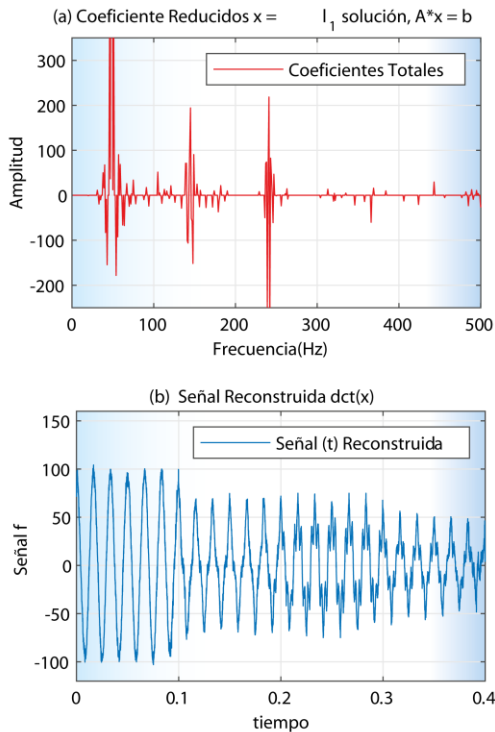
La reconstrucción en base a la norma  $l_0$  es capaz de recuperar la señal analizada con una alta probabilidad empleando únicamente  $M=k+1$  mediciones gaussianas. La desventaja de este método radica que la solución de la Ec.11 es numéricamente inestable y del tipo NP-complete. Los problemas NP-complete son problemas muy complejos y no pueden ser resueltos por una máquina de Turing determinista. En consecuencia, son resueltos mediante máquinas no deterministas y un tiempo polinómico acotado. Los algoritmos basados en optimización convexa son otro enfoque de aproximación dispersa, los cuales rempazan las funciones combinatorias de la norma  $l_0$  con la función convexa  $l_1$  lo cual, convierte el problema combinatorio en un problema de optimización convexa. La norma  $l_1$  con la Ec.11 puede recuperar con una gran probabilidad  $k$  señales dispersas y comprimibles usando únicamente  $M \geq cK \log(N/K)$  iid mediciones gaussianas, como se indica en la Ec.12:

$$\hat{x} = \arg \min \|x\|_1 \quad \text{tal que} \\ \Psi^* x' = y \quad (12)$$

En la Figura 6 se puede observar la reconstrucción de las señales y los coeficientes del vector  $[x]$ . Este es un problema de optimización convexa que de forma práctica se

reduce a un programa lineal conocido como seguimiento de bases, una vez encontrado el vector de mediciones  $[x]$  se puede reconstruir la señal mediante la Ec.13:

$$[f] \approx [\Psi] * [x] \quad (13)$$

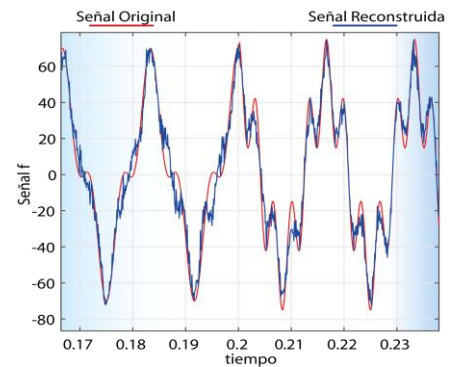


**Figura 6.** a) Coeficientes $[x]$  de  $f(t)$  reconstruida. b) Reconstrucción de la señal  $f(t)$ . Fuente: propia

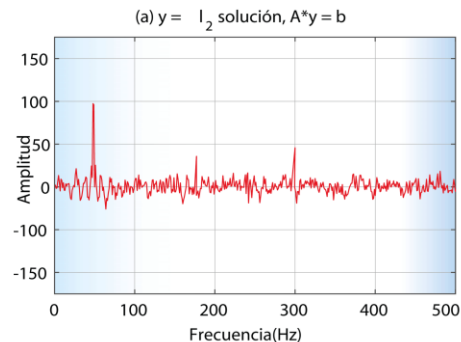
### 3. Resultados

De los problemas analizados en las diferentes técnicas de localización de distorsión armónicas en redes eléctricas, los más recurrentes son: los recursos computacionales, tiempo de procesamiento, ruido superpuesto en la señal y resolución de tiempo frecuencia de la señal. Todos estos problemas son superables con la técnica de sensado comprimido, es por esto que se propone esta técnica para la localización de distorsiones armónicas <sup>(1,37)</sup>. En la Figura 7 se puede apreciar la comparación entre la señal original y la señal comprimida que se reconstruyó.

Como resultado de la señal teórica analizada se obtuvo la Figura 8, donde se puede analizar las frecuencias inmersas en la señal se observa 3 coeficientes más prominentes, en 60 Hz señal fundamental, en 180 Hz tercer armónico y en 300 Hz quinto armónico. Queda abierta la investigación para determinar el tiempo en el cual se producen los armónicos o alguna perturbación de tipo transitoria.

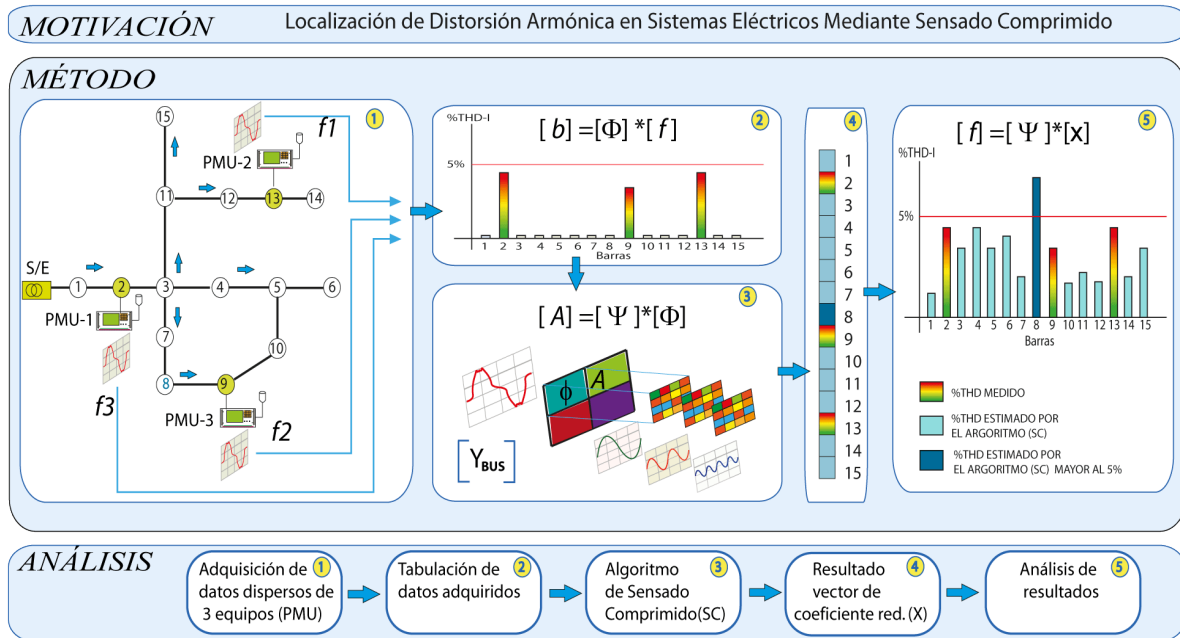


**Figura 7.** Señal original vs señal reconstruida. Fuente: propia



**Figura 8.** Coeficientes $[y]$ . Fuente: propia

Una posible investigación o aplicación del algoritmo de sensado comprimido, es la detección de distorsiones armónicas en sistemas eléctricos, poder localizar las fuentes de THD sería de gran utilidad para las empresas distribuidoras de energía, para poder mitigar y mejorar su calidad de producto eléctrico, la detección se lograría con el uso de medidores sincrofasoriales (PMU) óptimamente ubicados en el sistema eléctrico, esta tecnología es costosa



**Figura 9.** Detección de THD en sistemas eléctricos. Fuente: propia

en la actualidad, pero a futuro sería una buena alternativa para la estimación de parámetros de calidad de energía, lo expuesto se ilustra en la Figura 9

#### 4. Conclusiones

Todas las técnicas para localizar distorsiones armónicas parten de la transformada de Fourier la cual lleva la señal del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, de esta transformada se derivan las demás transformadas, que son casos especiales de la transformada de Fourier. Los mayores desafíos a la hora de la detección de distorsión armónica en la red eléctrica son: el ruido inmerso en la señal en estudio, recursos computacionales, tiempo de procesamiento y ancho de ventana.

La metodología del sensado comprimido acoge las características más relevantes de las técnicas convencionales para la detección de distorsión armónica, con la diferencia que no cumple con el teorema de Nyquist, a más de su reconocimiento de distorsión armónica, se puede reconstruir

señales y crear filtros para la reducción de la distorsión armónica (THD) en señales eléctricas.

Para el sensado comprimido siempre se requiere usar una matriz diccionario que no es más que usar alguna transformación lineal que lleve la señal del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, en el ejemplo del presente artículo se usó como matriz diccionario a la transformada del coseno (DCT), queda abierta la investigación probando con otras matrices diccionario que podrían encontrar una representación mejor de la señal utilizando un menor número de coeficientes.

La eficiencia del Sensado Comprimido (SC) depende del diccionario a utilizar mas no depende del ancho de banda de la señal bajo análisis, sino de la cantidad de información de la misma, y de la norma  $l_1$  de minimización no lineal que es de gran utilidad ya que recupera y aproxima las señales dispersas con errores muy bajos.

La técnica de SC es ideal para localizar frecuencias armónicas en estado estable en una



señal eléctrica sea esta de voltaje o corriente, entendiendo por estado estable a una señal que posee un número finito de muestras. Para detección de perturbaciones transitorias se requiere de un tiempo considerable de procesamiento computacional, debido a la cantidad de muestras que debe tomar para no perder detalles a la hora de reconstruir la señal.

En la construcción de la matriz de mediciones  $[\Phi]$  es donde se puede analizar la potencialidad del sensado comprimido, esta matriz es armada en función de lo que se requiera analizar o estimar por ejemplo un sistema eléctrico de potencia, la matriz  $[\Phi]$  puede ser armada en función de la matriz de admitancias y se podría estimar varios parámetros en un sistema eléctrico de potencia.

## 5. Declaración de financiación

Los autores declaran que no recibieron financiación de ninguna entidad público/privada para la realización de este artículo.

## 6. Referencias

- (1) Mishra M. Power quality disturbance detection and classification using signal processing and soft computing techniques: A comprehensive review. *Int Trans Electr Energy Syst.* 2019;29(8):1–42. <https://doi.org/10.1002/2050-7038.12008>.
- (2) Donoho DL. Compressed sensing. *IEEE Trans Inf Theory.* 2006;52(4):1289–306. <https://doi.org/10.1109/TIT.2006.871582>.
- (3) Duarte MF, Baraniuk RG. Spectral compressive sensing. *Appl Comput Harmon Anal.* 2013;35(1):111–29. <http://dx.doi.org/10.1016/j.acha.2012.08.003>.
- (4) Kahane JP. Compressed sensing from a harmonic analysis point of view. *Anal Math.* 2016;42(1):19–29. <https://doi.org/10.1007/s10476-016-0102-4>.
- (5) Baraniuk RG, Goldstein T, Sankaranarayanan AC, Studer C, Veeraraghavan A, Wakin MB. Compressive video sensing: Algorithms, architectures, and applications. *IEEE Signal Process Mag.* 2017;34(1):52–66. <https://doi.org/10.1109/MSP.2016.2602099>.
- (6) Baraniuk RG. Compressive sensing. *Handb Math Methods Imaging Vol 1, Second Ed.* 2015;24(4):118–21. <https://doi.org/10.1109/MSP.2007.4286571>.
- (7) Palczynska B, Masnicki R, Mindykowski J. Compressive sensing approach to harmonics detection in the ship electrical network. *Sensors (Switzerland).* 2020;20(9):1–18. <https://doi.org/10.3390/s20092744>.
- (8) Maechler P, Studer C, Bellasi DE, Maleki A, Burg A, Felber N, et al. VLSI design of approximate message passing for signal restoration and compressive sensing. *IEEE J Emerg Sel Top Circuits Syst.* 2012;2(3):579–90. <https://doi.org/10.1109/JETCAS.2012.2214636>.
- (9) Tobias S, Everson HT. Trends in Signal Processing Education. *SPOTLIGHT.* 2012;29(1):180–2. <https://doi.org/10.1109/MSP.2011.943132>.
- (10) Baraniuk RG, Candes E, Nowak R, Vetterli M. Compressive sampling. *IEEE Signal Process Mag.* 2008;25(2):12–3. <https://doi.org/10.1109/MSP.2008.915557>.
- (11) Baraniuk RG, Candes E, Elad M, Ma Y. Applications of sparse representation and compressive sensing. *Proc IEEE.* 2010;98(6):906–9. <https://doi.org/10.1109/JPROC.2010.2047424>.

- (12) Granados-Lieberman D, Romero-Troncoso RJ, Osornio-Rios RA, Garcia-Perez A, Cabal-Yepez E. Techniques and methodologies for power quality analysis and disturbances classification in power systems: A review. *IET Gener Transm Distrib.* 2011;5(4):519–29. <https://doi.org/10.1049/iet-gtd.2010.0466>.
- (13) Aharon M, Elad M, Bruckstein A. K-SVD: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation. *IEEE Trans Signal Process.* 2006;54(11):4311–22. <https://doi.org/10.1109/TSP.2006.881199>.
- (14) Mukherjee N, Chattopadhyaya A, Chattopadhyay S, Sengupta S. Discrete-Wavelet-Transform and Stockwell-Transform-Based Statistical Parameters Estimation for Fault Analysis in Grid-Connected Wind Power System. *IEEE Syst J.* 2020;14(3):4320–8. <https://doi.org/10.1109/JSYST.2020.2984132>.
- (15) Zhao S, Wang C, Bian X. Research on harmonic detection based on wavelet threshold and FFT algorithm. *Syst Sci Control Eng.* 2018;6(3):339–45. <https://doi.org/10.1080/21642583.2018.1558420>.
- (16) Jia K, Feng T, Zhao Q, Wang C, Bi T. High frequency transient sparse measurement-based fault location for complex DC distribution networks. *IEEE Trans Smart Grid.* 2020;11(1):312–22. <https://ieeexplore.ieee.org/document/8731742>
- (17) Wang F, Li R, Wang Z, Zhang J. Compressed Blind Signal Reconstruction Model and Algorithm. *Circuits, Syst Signal Process.* 2016;35:3192–219. <https://doi.org/10.1007/s00034-015-0189-z>.
- (18) Mercorelli P. Denoising and harmonic detection using nonorthogonal wavelet packets in industrial applications. *J Syst Sci Complex.* 2007;20:325–43. <https://doi.org/10.1007/s11424-007-9028-z>.
- (19) Shao C, Li H. Identifying Single-Event Transient Location Based on Compressed Sensing. *IEEE Trans Very Large Scale Integr Syst.* 2018;26(4):768–77. <https://doi.org/10.1109/TVLSI.2017.2778750>.
- (20) Duarte MF, Baraniuk RG. Kronecker compressive sensing. *IEEE Trans Image Process.* 2012;21(2):494–504. <https://doi.org/10.1109/TIP.2011.2165289>.
- (21) Metzler CA, Maleki A, Baraniuk RG. From Denoising to Compressed Sensing. *IEEE Trans Inf Theory.* 2016;62(9):5117–44. <https://doi.org/10.1109/TIT.2016.2556683>.
- (22) Gołowicz D, Kasprzak P, Kazimierczuk K. Enhancing compression level for more efficient compressed sensing and other lessons from NMR spectroscopy. *Sensors (Switzerland).* 2020;20(5):1–19. <https://doi.org/10.3390/s20051325>.
- (23) Xiao J, Hu F, Shao Q, Li S. A low-complexity compressed sensing reconstruction method for heart signal biometric recognition. *Sensors (Switzerland).* 2019;19(23):5330. <https://doi.org/10.3390/s19235330>.
- (24) Joshi P, Jain SK. An improved active power direction method for harmonic source identification. *Trans Inst Meas Control.* 2020;42(13):2569–77. <https://doi.org/10.1177/0020717920932638>.
- (25) Candes EJ, Wakin MB. An Introduction To Compressive Sampling. *IEEE Signal Process Mag.* 2008;25(2):21–30.



1. <https://doi.org/10.1109/MSP.2007.91473>
- (26) Ahmed N, Natarajan T, Rao KR. Discrete cosine transform. *IEEE Transactions on Computers*. 1974;C-23(1):90–93. <https://doi.org/10.1109/T-C.1974.223784>.
- (27) Hegde C, Baraniuk RG. Signal recovery on incoherent manifolds. *IEEE Trans Inf Theory*. 2012;58(12):7204–14. <https://doi.org/10.1109/ISIT.2012.6283066>.
- (28) Su T, Yang M, Jin T, Flesch RCC. Power harmonic and interharmonic detection method in renewable power based on Nuttall double-window all-phase FFT algorithm. *IET Renew Power Gener*. 2018;12(8):953–61. <https://doi.org/10.1049/IET-RPG.2017.0115>.
- (29) Kerdjidi O, Ramzan N, Ghanem K, Amira A, Chouireb F. Fall detection and human activity classification using wearable sensors and compressed sensing. *J Ambient Intell Humaniz Comput*. 2020;11:349–61. <http://dx.doi.org/10.1007/s12652-019-01214-4>.
- (30) Huang K, Xiang Z, Deng W, Tan X, Yang C. Reweighted Compressed Sensing-Based Smart Grids Topology Reconstruction with Application to Identification of Power Line Outage. *IEEE Syst J*. 2020;14(3):4329–39. <https://doi.org/10.1109/JSYST.2019.2958869>.
- (31) Carta D, Muscas C, Pegoraro PA, Sulis S. Identification and Estimation of Harmonic Sources Based on Compressive Sensing. *IEEE Trans Instrum Meas*. 2019;68(1):95–104. <https://doi.org/10.1109/TIM.2018.2838738>.
- (32) Jandan F, Khokhar S, Shaha SAA, Abbasi F. Recognition and classification of power quality disturbances by DWT-MRA and SVM classifier. *Int J Adv Comput Sci Appl*. 2019;10(3):368–77. <https://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100348>.
- (33) Solis-Munoz FJ, Osornio-Rios RA, Romero-Troncoso RJ, Jaen-Cuellar AY. Differential evolution implementation for Power Quality Disturbances monitoring using OpenCL. *Adv Electr Comput Eng*. 2019;19(2):13–22. <http://dx.doi.org/10.4316/AECE.2019.02002>.
- (34) Karafotis PA, Evangelopoulos VA, Georgilakis PS. Evaluation of harmonic contribution to unbalance in power systems under non-stationary conditions using wavelet packet transform. *Electr Power Syst Res*. 2020;178:1–9. <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2019.106026>.
- (35) Inga-Ortega J, Inga-Ortega E, Gómez C, Hincapié R. Electrical load curve reconstruction required for demand response using compressed sensing techniques; 2017 IEEE PES Innov Smart Grid Technol Conf - Lat Am ISGT Lat Am. Ecuador: IEEE; 2017. pp. 1-6. <https://doi.org/10.1109/ISGT-LA.2017.8126731>.
- (36) He S, Li K, Zhang M. A real-time power quality disturbances classification using hybrid method based on s-transform and dynamics. *IEEE Trans Instrum Meas*. 2013;62(9):2465–75. <https://doi.org/10.1109/TIM.2013.2258761>.
- (37) Baraniuk RG, Cevher V, Duarte MF, Hegde C. Model-based compressive sensing. *IEEE Trans Inf Theory*. 2010;56(4):1982–2001. <https://doi.org/10.1109/TIT.2010.2040894>.