



El trimestre económico

ISSN: 0041-3011

ISSN: 2448-718X

Fondo de Cultura Económica

Cajas Guijarro, John

Poder, intensidad del trabajo y crisis en un modelo marxista de ciclos endógenos\*

El trimestre económico, vol. 90, núm. 358, 2023, Mayo-Agosto, pp. 365-407

Fondo de Cultura Económica

DOI: <https://doi.org/10.20430/ete.v90i358.1574>

Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=31375247002>

- ▶ [Cómo citar el artículo](#)
- ▶ [Número completo](#)
- ▶ [Más información del artículo](#)
- ▶ [Página de la revista en redalyc.org](#)

LAEM 

Sistema de Información Científica Redalyc

Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

## Poder, intensidad del trabajo y crisis en un modelo marxista de ciclos endógenos\*

Power, labor intensity, and crisis  
in a Marxian model of endogenous cycles

*John Cajas Guijarro\*\**

### ABSTRACT

This paper reinterprets some intuitions from Marx by using a model of endogenous cycles in three dimensions: employment rate, wage share, and labor intensity (this last variable has not received enough attention in the Marxian literature of cyclical models). The paper presents an analytical demonstration (using the Hopf bifurcation theorem) and numerical simulations for the existence of stable cycles in the model if the mechanization rate is sufficiently high and the bargaining power of the working class to increase wages is lower than a given threshold. In contrast, the model is unstable when the bargaining power of the working class is too high; a result that motivates the discussion of the notion of structural economic crises (which differ from the periodic economic crises that emerge in the context of capitalist cycles). The paper concludes with a summary of results and suggestions for future research.

*Keywords:* Labor intensity; bargaining power; endogenous cycles; economic crisis; Hopf bifurcation. *JEL codes:* C63, E11, O41.

\* Artículo recibido el 24 de abril de 2022 y aceptado el 23 de noviembre de 2022. El autor agradece los comentarios y los aportes de Wilson Pérez, Leonardo Vera, William Sacher, Giovanni Manosalvas, Fernando Martín y de evaluadores anónimos a versiones preliminares de este trabajo. El contenido del artículo es responsabilidad exclusiva del autor.

\*\* John Cajas Guijarro, Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Central del Ecuador, doctor en economía del desarrollo en la Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales (Flacso), Quito, Ecuador (correo electrónico: jecajas@uce.edu.ec).

## RESUMEN

Este trabajo reinterpreta algunas intuiciones de Marx mediante un modelo de ciclos endógenos en tres dimensiones: tasa de empleo, participación salarial e intensidad del trabajo (variable que no ha recibido suficiente atención en la literatura marxista de modelos cíclicos). El artículo demuestra analíticamente (mediante el teorema de bifurcaciones de Hopf) y con simulaciones la existencia de ciclos estables dentro del modelo, si la mecanización es suficientemente alta y el poder obrero de negociación salarial es menor a un determinado umbral. En cambio, el modelo es inestable cuando el poder de negociación obrero es demasiado alto, resultado que permite plantear la noción de crisis económica estructural, distinta a las crisis económicas periódicas del ciclo capitalista. Al final, se resumen los resultados y se sugieren posibles extensiones al modelo.

*Palabras clave:* intensidad del trabajo; poder de negociación; ciclos endógenos; crisis económicas; bifurcación de Hopf. *Clasificación JEL:* C63, E11, O41.

## INTRODUCCIÓN

Uno de los últimos capítulos del tomo I de *El capital*, titulado “La ley general de la acumulación capitalista” (Marx, 2009a: cap. 23), ha motivado a algunos autores a desarrollar modelos analíticos donde las relaciones de poder entre asalariados y capitalistas generan dinámicas cíclicas. Sin embargo, esta literatura no parece aprovechar elementos que Marx dejó sobre el papel del ejército laboral de reserva como regulador no sólo de los salarios (Goodwin, 1967) y de la jornada laboral (Eagly, 1972), sino también de la intensidad del trabajo y, por ende, de la productividad. De hecho, en el capitalismo actual la explotación laboral no sólo implica el ajuste salarial y de la jornada, sino también la capacidad de reducir los tiempos muertos o no utilizados en cada hora de trabajo, al presionar para que los obreros apliquen una mayor intensidad laboral y produzcan más mercancías en un igual periodo (Mavroudeas e Ioannides, 2011). Pese a la relevancia que Marx otorgó a este fenómeno al plantear su noción de plusvalor relativo (Marx, 2009a: cap. 10) y al hablar de la maquinaria y la gran industria (Marx, 2009a: cap. 13), la literatura marxista de modelos cíclicos no cubre este tema en profundidad.

En respuesta a esta limitación, y partiendo de desarrollos preliminares (Cajas Guijarro, 2018a y 2018b), el presente texto reinterpreta algunas intuiciones de Marx sobre la acumulación de capital y el ejército laboral de reserva mediante un modelo de ciclos endógenos en tres dimensiones: tasa de empleo, participación salarial (de los trabajadores en el producto) e intensidad del trabajo. El texto demuestra que el modelo genera ciclos límite (con el teorema de bifurcaciones de Hopf para tres dimensiones), y presenta simulaciones que describen la existencia de ciclos estables e inestables. La estabilidad del modelo y su dinámica cíclica se garantizan con dos condiciones: *a*) la mecanización de la producción es lo suficientemente alta; *b*) el poder obrero de negociación salarial cae por debajo de un umbral delimitado por la pugna entre clases sociales al definir la intensidad laboral. En cambio, cuando el poder obrero para negociar el salario supera ese umbral, el modelo se vuelve inestable, resultado que puede interpretarse como la tendencia a una crisis económica estructural distinta a las crisis económicas periódicas propias del ciclo capitalista. Así, se concluye que en el presente modelo los capitalistas requieren limitar el poder obrero a fin de garantizar en el tiempo (de forma cíclica y estable) la reproducción capitalista y el crecimiento económico sostenido.

Cabe aclarar que este trabajo se limita<sup>1</sup> a ciclos económicos inducidos por la pugna distributiva entre clases sociales al estilo del modelo de Goodwin (1967).<sup>2</sup> Así, este nivel de análisis no abarca las crisis y los ciclos asociados de otros factores (económicos<sup>3</sup> y no económicos). En particular, la noción de crisis económica estructural aquí empleada se refiere a una interrupción de la reproducción capitalista (Marx, 2010: 134; Shaikh, 1978: 219) superable sólo con cambios exógenos en las estructuras de poder representadas por los parámetros del modelo teórico propuesto.<sup>4</sup> Este enfoque difiere de otras interpretaciones estructurales. Por ejemplo, Kondratiev planteó que la base material de los ciclos u ondas largas posee un carácter técnico asociado con el desgaste, el remplazo y la expansión del capital fijo, el cual requiere amplios periodos y enormes gastos para producirse, de modo que, en la dinámica capitalista, ese carácter técnico es endógeno.<sup>5</sup> En contraste, Trotsky

<sup>1</sup> Se agradece a un evaluador anónimo por sus aportes para aclarar esta delimitación.

<sup>2</sup> El enfoque distributivo hace que la noción de crisis empleada en este texto difiera de nociones asociadas con desproporción sectorial, sobreproducción, caída de la tasa de ganancia, entre otras.

<sup>3</sup> Para revisiones amplias de literatura sobre ciclos económicos, véase Orlando y Sportelli (2021).

<sup>4</sup> Para una interpretación similar, véase Cajas Guijarro y Vera (2022: 573).

<sup>5</sup> En su reinterpretación de Kondratiev, Mandel (1975) igualmente negó que las innovaciones tecnológicas automáticamente generan ciclos largos, pues serían endógenas respecto a la acumulación capitalista.

consideró que los ciclos largos no están determinados por fuerzas internas del capitalismo sino por factores externos, incluso “superestructurales” —por ejemplo, guerras— (Rosenberg y Frischtak, 1984; Day, 1976). De manera similar, Bujarin (1972: 27-28) planteó que las crisis capitalistas implican la “destrucción de las fuerzas productivas” y que su análisis debe hacerse “trascendiendo el marco de varios ciclos productivos”, pues estas crisis tienden a “ensanchar” el posterior desarrollo capitalista. Si bien el modelo de ciclos expuesto en este trabajo no analiza el cambio técnico (potencialmente endógeno) ni los efectos de factores no económicos sobre las fuerzas productivas y similares, puede brindar una base analítica para futuros trabajos que estudien estas cuestiones y los vínculos que se generan entre diferentes formas de crisis.<sup>6</sup>

Igualmente, conviene resaltar que el modelo aquí presentado posee una perspectiva marxista, pues estudia el papel del ejército laboral de reserva y del poder de negociación obrero sobre la estabilidad de los ciclos capitalistas desde un enfoque distributivo y donde la producción es endógena respecto a la intensidad laboral. Así, el modelo se distingue de interpretaciones ricardianas que estudian la distribución, pero no profundizan en las estructuras de poder capitalistas ni en sus efectos sobre la producción.<sup>7</sup> Este trabajo puede contribuir incluso en algunas discusiones marxistas sobre acumulación de capital y poder obrero. Por ejemplo, Tronti (2019: cap. 8) planteó que el poder obrero puede modificar las dinámicas de la acumulación, como sucedió cuando la lucha histórica de la clase trabajadora redujo la jornada laboral y limitó la generación de plusvalor absoluto, lo que empujó a la clase capitalista a priorizar la explotación desde el plusvalor relativo que precisamente depende de la intensidad y la productividad laborales, variables cruciales en este texto. Por su parte, Palermo (2007) propuso que en el capitalismo se distribuye asimétricamente el “poder de acción” de las clases sociales. Por ende, para mantener su estabilidad, la clase capitalista puede crear “estructuras condicionantes” que limitan las posibilidades del poder obrero.

<sup>6</sup> Goodwin dudaba de la posibilidad de identificar ciclos largos, pues la “turbulencia” del capitalismo volvería imposible la existencia de parámetros constantes a muy largo plazo. De todas formas, al combinar elementos de Marx y Schumpeter, planteó un esquema analítico para modelizar ciclos cortos asociados con el producto y ciclos largos vinculados con la innovación (Goodwin, 1987). Tal esquema podría emplearse en interpretaciones más profundas de las crisis capitalistas.

<sup>7</sup> Precisiones similares pueden encontrarse en Goodwin (1983).

Desde estas y otras visiones,<sup>8</sup> es posible plantear interpretaciones relevantes y nuevas extensiones para los resultados del modelo de ciclos expuesto en este documento.

Con base en esta delimitación y la posible contribución, el artículo se estructura de la siguiente forma. Después de esta introducción, la sección I revisa alguna literatura marxista sobre modelos cíclicos a fin de ilustrar la falta de discusión sobre la intensidad laboral. Luego, la sección II reinterpreta varias intuiciones de Marx (2009a) desde un modelo de ciclos donde se plantea una intensidad laboral endógena, a la vez que se analiza el vínculo entre poder de negociación obrero y la estabilidad de los ciclos. Finalmente, la sección III cierra con una conclusión y sugerencias para trabajos futuros.

## I. BREVE REVISIÓN DE LITERATURA

Como reseña de Cámara Izquierdo (2022), uno de los primeros ejemplos —imperfecto— de modelos cíclicos inspirados en Marx es el trabajo de Goodwin (1967). Desde un modelo agregado, este autor plantea la existencia de ciclos distributivos endógenos entre la tasa de empleo y la participación salarial, con la suposición de que siempre hay equilibrio en el mercado de bienes. Entre los principales elementos del modelo están: *a*) una curva de Phillips donde mientras mayor tasa de empleo hay, los trabajadores poseen más poder de negociación que les permite acelerar el crecimiento del salario real; *b*) la inversión depende de las ganancias que, a su vez, son empujadas hacia la baja cuando crece la participación salarial. Como resultado, surge un sistema dinámico análogo al modelo presa-depredador (Lotka, 1910; Volterra, 1927), donde la tasa de empleo y la participación salarial ocupan los lugares de presa y depredador, respectivamente. Este sistema genera soluciones cíclicas cerradas en sentido horario empujadas por la lucha entre clases sociales “parcialmente complementarias, parcialmente hostiles” y, a criterio de Goodwin, reflejaría las intuiciones de Marx (2009a) sobre los ciclos y el ejército laboral de reserva.<sup>9</sup>

<sup>8</sup>Para otra interpretación marxista sobre relaciones de poder en el capitalismo, véase Bowles y Gintis (1990).

<sup>9</sup>Para Solow (1990), en el modelo de Goodwin (1967) más bien los desempleados serían las presas y los empleados serían los depredadores. A su vez, los ciclos tendrían una duración mayor a la de aquellos estudiados por la macroeconomía convencional.

El modelo de Goodwin (1967) posee una estructura general y compacta —su versión original ocupa cinco páginas— que ha recibido varias ampliaciones. Por ejemplo, Sato (1985) presenta una ampliación para dos sectores con mercados siempre en equilibrio y concluye que: *a*) no existen movimientos cíclicos y la economía converge en un equilibrio balanceado si la razón capital/trabajo en el sector 2 que produce medios de consumo es suficientemente mayor que en el sector 1, el cual produce medios de producción; *b*) en los demás casos existen ciclos, pero para algunas condiciones iniciales éstos no son duraderos si la razón capital/trabajo en el sector 2 es mayor que en el sector 1. Es decir, para Sato, a nivel sectorial el modelo de Goodwin no siempre refleja la relación antagónica entre capital y trabajo. Azevedo Araujo, Dávila-Fernández y Nunes Moreira (2019) presentan una breve reseña con varias extensiones adicionales, donde se incluyen factores como: inflación, política fiscal, crecimiento neoclásico,<sup>10</sup> salarios de eficiencia, cuestiones sectoriales y estabilidad financiera. Otra reseña relevante puede encontrarse en Barrales-Ruiz, Mendieta-Muñoz, Rada, Tavani y Arnim (2022). Asimismo, Grasselli y Maheshwari (2018) plantean una evaluación empírica del modelo de Goodwin mediante series temporales en panel entre 1960 y 2010 para Australia, Canadá, Dinamarca, Finlandia, Francia, Italia, Noruega, Reino Unido, los Estados Unidos y Alemania.

Por otro lado, Cámara Izquierdo (2022) considera que un trabajo más apegado a los textos de Marx corresponde a Eagly (1972), quien construye un modelo cuyos principales componentes son: *a*) un salario de subsistencia constante y que depende de la productividad del sector 2; *b*) mientras mayor tasa de empleo haya, los trabajadores tendrán más poder para presionar por una menor jornada laboral; *c*) mientras mayor tasa de empleo haya, los capitalistas tendrán más incentivos para aumentar la mecanización (reemplazar trabajo por capital); *d*) los capitalistas acumulan todas sus ganancias cuando la rentabilidad es alta, y dejan de acumular cuando la rentabilidad es menor a una tasa mínima. Al juntar estos elementos en un esquema dinámico, Eagly

<sup>10</sup> Sobre el crecimiento neoclásico, Ploeg (1983) combina los modelos de Goodwin (1967) y Solow (1956), al incorporar los supuestos neoclásicos de sustitución capital-trabajo y maximización de ganancias. Al final, concluye que tales supuestos reducen el efecto de la lucha de clases en la dinámica cíclica, aunque los trabajadores pueden acrecentar el conflicto si ahorran y alcanzan algún control de los medios de producción o si exigen compensaciones por los incrementos de la productividad laboral.

obtiene ciclos endógenos en sentido antihorario para las tasas de ganancia y desempleo, con la peculiaridad de que, al pasar de un ciclo a otro, el desempleo crece en promedio hasta que las tensiones sociales provocan un colapso.

A diferencia de Goodwin (1967), Eagly (1972) ha recibido menor atención en la literatura, aunque algunas reinterpretaciones pueden encontrarse en los modelos analíticos y de simulación de Laibman (1978, 1992 y 1997). De hecho, Laibman (1978) también critica el modelo de Goodwin (1967) por su supuesto de una relación capital-producto constante, lo que impediría describir adecuadamente el cambio técnico marxista (*Marx-biased technical change*) usualmente definido como una situación donde crecen al mismo tiempo la productividad laboral y la relación capital-producto, lo que implica un sesgo hacia tecnologías que ahorran trabajo (Campbell y Tavani, 2019). Asimismo, Laibman critica el supuesto de Goodwin de que los capitalistas acumulan una proporción fija de las ganancias porque es rígido e impide considerar el papel de las expectativas.

Sherman (1971) es otro autor que expone una interpretación marxista de ciclos mediante varios modelos que representan intuiciones asociadas con la sobreproducción. En su trabajo destacan un modelo de subconsumo (modelo 2), uno de sobreinversión (modelo 3) y otro que incluye a la capacidad instalada (modelo 5), todos desde un enfoque sectorial de corto plazo. En particular, algunos supuestos del modelo 2 son: *a*) los capitalistas poseen una función de consumo lineal con propensión media a consumir de manera decreciente; *b*) los salarios crecen a un ritmo más lento que la producción y que el ingreso total (se asume una función salarial lineal dependiente del producto); *c*) los capitalistas siguen una función de inversión guiada por la rentabilidad. Por su parte, en el modelo 3 se asume que: *a*) trabajadores y capitalistas consumen una fracción fija de sus ingresos; *b*) los capitalistas poseen una función de inversión que depende de las ganancias esperadas; *c*) los capitalistas construyen sus expectativas de ganancias futuras como una suma ponderada de las ganancias de cada sector, así otorgan mayor peso al sector que produce bienes de consumo; *d*) los precios de los medios de producción crecen más rápido que los de los medios de consumo por la presión ejercida desde la inversión. Finalmente, el modelo 5 combina tendencias de corto y largo plazos, donde se incluye la capacidad instalada en la función de inversión. Al juntar estos modelos en sistemas de ecuaciones con retardos, Sherman (1971) estableció los parámetros que generan ciclos estables de tipo discreto.

Posteriormente, Sherman (1979) discute diferentes perspectivas sobre las teorías marxistas de las crisis (composición orgánica del capital creciente, agotamiento del ejército laboral de reserva y crecimiento salarial, subconsumo) y presenta patrones empíricos para fundamentar un modelo cíclico agregado de corto plazo. Dicho modelo incluye: *a*) una función de consumo para los capitalistas con propensión media a consumir de manera decreciente; *b*) una participación salarial que posee una relación inversa con la capacidad instalada; *c*) la capacidad instalada depende positivamente del crecimiento de la economía; *d*) existe una función de inversión que depende positivamente de los valores históricos de la tasa de ganancia (que influyen en las expectativas); *e*) hay una relación capital-producto que depende positivamente de la capacidad instalada. Entre las limitaciones que el propio Sherman destaca en su modelo están la ausencia de tendencias de largo plazo; ciclos de inventarios; ciclos de depreciación y de remplazo de la inversión; el papel del dinero, el crédito y la inflación; el poder monopólico; el papel del gobierno, y las relaciones internacionales. Para aportes similares, véase Sherman (1991).

En un comentario crítico, Glombowski (1982) plantea cambios al trabajo de Sherman (1979) al dejar que la capacidad instalada sea definida endógenamente por el modelo en vez de depender del crecimiento económico. A la vez, discute la dificultad de generar ciclos estables (en particular, por la indefinición de la función de inversión), el excesivo enfoque subconsumista y la ausencia de otras perspectivas marxistas sobre la crisis, como el impacto del crecimiento de la composición orgánica del capital o del desempleo. En este último punto, Glombowski incluso cita como ejemplo a Goodwin (1967). En otro trabajo, Glombowski (1983) plantea un modelo marxista de largo plazo (agregado y sectorial) donde obtiene las tendencias de la tasa de explotación laboral, la relación entre trabajo muerto y vivo (*proxy* de la tecnificación), la distribución del capital entre sectores 1 y 2 y otras variables. Tales tendencias serían crecientes sin límite ante un cambio técnico marxista con aumento permanente de tecnificación y crecimiento autónomo de la explotación, y estables ante un cambio técnico neutral con tecnificación constante y sin crecimiento autónomo de la explotación.<sup>11</sup> En este modelo Glombowski asume una relación directa entre la tasa de explotación laboral y la de empleo,

<sup>11</sup> Otro ejemplo de un modelo sectorial de crecimiento marxista que identifica tendencias de largo plazo, incluyendo la cuestión de la transformación de valores a precios de producción y luego a precios de mercado, y capitalistas maximizadores de la tasa de ganancia puede verse en Laibman (1981).

cercana a la curva de Phillips empleada por Goodwin (1967) con variantes a fin de evitar el surgimiento de ciclos, pero cuya modificación para obtener dinámica cíclica es relativamente sencilla.

A esta literatura pueden incorporarse trabajos más recientes de mayor complejidad analítica como el de Dupont (2014), quien expone un modelo de tres dimensiones que estudia la interacción entre tasas de empleo, plusvalor y composición orgánica del capital. Asimismo, desde un enfoque ecléctico, Mariolis, Rodousakis y Soklis (2021: cap. 11) combinan elementos de Goodwin (1967), Bhaduri y Marglin (1990), y una noción de desequilibrios de corto plazo entre inversión y ahorro a fin de obtener un sistema de tres dimensiones que genera ciclos estables al emplear funciones de inversión no lineales. Por su parte, Nikolaos, Persefoni y Tsoulfidis (2022) plantean un modelo que combina intuiciones de la “ley general de la acumulación capitalista” y la “tendencia a la caída de la tasa de ganancia”, donde surgen ciclos largos en tres dimensiones entre la proporción de plusvalor invertida en capital constante y variable y la tasa de ganancia.

Como puede verse, pese al amplio número de variables y supuestos considerados por la literatura marxista de modelos cíclicos, la intensidad laboral no ha recibido mayor atención. Quizá los trabajos más cercanos a esta cuestión son aquellos que asumen una productividad endógena. Por ejemplo, Dávila-Fernández y Sordi (2019) plantean una extensión del modelo de Goodwin donde la productividad depende de la demanda desde un enfoque kaldoriano. Sin embargo, aunque la productividad y la intensidad laboral están vinculadas, no son idénticas. Mientras que la productividad puede crecer por mejoras técnicas que no necesariamente implican un incremento del esfuerzo promedio por hora trabajada de los trabajadores, en cambio, por definición, el incremento de la intensidad laboral siempre implica que los trabajadores deben realizar un mayor esfuerzo por hora. Así, cuando los trabajadores tienen un elevado poder de negociación, pueden aspirar a reducir la intensidad laboral, lo que modifica la productividad no por una cuestión técnica, sino por una pugna de poder entre clases sociales. Precisamente éste es el espíritu del presente trabajo, el cual busca contribuir a la literatura al ubicar a la intensidad laboral como una variable endógena de igual relevancia que la participación salarial y la tasa de empleo. Asimismo, el texto busca contribuir con una discusión sobre cómo la pugna por definir la intensidad impone límites al poder de negociación obrero, los cuales deben respetarse a fin de garantizar la estabilidad de la dinámica capitalista.

## II. MODELO

A continuación, con base en intuiciones de Marx (2009a) junto con desarrollos preliminares del autor (Cajas Guijarro, 2018a y 2018b), se expone un modelo marxista de ciclos endógenos cuya principal característica es la inclusión de la intensidad laboral como variable endógena que depende, entre otros factores, de la tasa de empleo. Así, cuando esta última crece, se asume que la clase trabajadora posee un mayor poder de negociación que le permite exigir una reducción de la intensidad del trabajo (menor esfuerzo por hora trabajada) y, por ende, una menor explotación laboral. Esta dinámica afecta la productividad, pues, al disminuir la intensidad, *ceteris paribus*, se asume un menor número de mercancías producidas por hora trabajada. Otros supuestos del modelo son: es una economía cerrada y sin gobierno; todo se mide en magnitudes netas (ya se ha descontado la depreciación); no hay inflación; existe pleno empleo de capacidad instalada; se halla un solo bien que se emplea como medio de producción (“máquinas”) o medio de consumo; no hay bienes intermedios; la jornada y la mecanización son constantes exógenas; los trabajadores buscan incrementar su salario cuando aumenta su poder de negociación; la población disponible para trabajar crece a una tasa constante pero pequeña.

A más de estos supuestos (y otros mencionados a lo largo del texto), el modelo se compone de tres partes. En la primera se definen los componentes del capital, las condiciones técnicas de producción y variables distributivas, y con estas definiciones se deducen los determinantes de las tasas de ganancia y de acumulación del capital. Después, en la segunda parte se detallan las funciones del ejército laboral de reserva en la acumulación capitalista, tanto como reserva de trabajadores (para ellos se definen la tasa de empleo y los determinantes de su crecimiento), como en la de su influencia sobre la explotación laboral a nivel de salarios y la intensidad del trabajo (incluyendo dos ecuaciones dinámicas que describen el crecimiento de estas variables, sobre todo respecto de la tasa de empleo). Finalmente, en la tercera parte se resumen los resultados en un sistema dinámico de tres dimensiones: tasa de empleo, participación salarial e intensidad laboral. El estudio analítico (realizado con el teorema de bifurcación de Hopf, véanse los apéndices 1 y 2) y las simulaciones numéricas del sistema sugieren la existencia de ciclos límite, estables e inestables; asimismo, se identifica analíticamente un umbral que

delimita el efecto del poder de negociación obrero sobre la estabilidad de los ciclos.

### 1. Tasas de ganancia y de acumulación

Como sugiere Marx (2009b: 57) al analizar la circulación del capital productivo, la producción capitalista requiere un monto de dinero ( $D$ ) para adquirir dos grupos de mercancías ( $M$ ): medios de producción ( $MP$ ) y fuerza de trabajo ( $FTR$ ). Cuando estas mercancías se juntan en la *producción* ( $P$ ), surgen nuevas mercancías ( $M'$ ) que se venden por un monto de dinero ( $D'$ ) superior al monto original ( $D$ ). Este proceso puede representarse en el siguiente esquema:

$$D - M \begin{cases} MP \\ FTR \end{cases} \dots P \dots M' - D' \text{ donde } D' > D$$

donde la suma de dinero que adquiere medios de producción representa un capital constante ( $C$ ), y la suma que adquiere fuerza de trabajo representa un capital variable ( $V$ ) (Marx, 2009a: 250-253). Esta distribución del capital se expone en las siguientes expresiones:

$$K = C + \rho V \quad (1)$$

$$C = pA \quad (2)$$

$$V = whE \quad (3)$$

donde  $A$  es la cantidad del bien empleado como medio de producción y  $p$  es su precio;  $E$  es el número de empleados que venden su fuerza de trabajo;  $h$  es la jornada laboral (horas de trabajo por persona) que se asume constante;<sup>12</sup>  $w$  es el salario promedio por hora trabajada, y  $\rho$  es un factor igual a 1 si los salarios se pagan al inicio de la producción, o igual a 0 si los salarios se pagan al final de la producción. De ahora en adelante, a fin de simplificar la exposición, se asume  $p=1$  (todo se mide en magnitudes reales) y  $\rho=0$ , de modo que  $V$  no requiere contabilizarse en el capital inicial, al que se nombra  $K$ .

<sup>12</sup> Si bien  $h$  podría omitirse, se incluye a fin de facilitar futuras reinterpretaciones. Por ejemplo, con base en Eagly (1972: 526), podría asumirse que  $h$  es endógena y depende del poder de negociación obrero.

Esta notación permite definir el volumen de mercancías producidas en términos netos  $Q$  como la multiplicación del número de personas empleadas, las horas que trabajan y la productividad laboral promedio por hora de trabajo:

$$Q = qbE \quad (4)$$

Aquí se asume que la productividad laboral  $q$  es endógena y crece al aumentar la intensidad del trabajo  $e$  y la mecanización  $m$ , donde la intensidad se define como el desgaste (esfuerzo) promedio de fuerza de trabajo realizado en cada unidad de tiempo trabajado (por ejemplo, esfuerzo promedio por hora) (Marx, 2009a: 498; Mavroudeas e Ioannides, 2011: 430-435).<sup>13</sup> En cambio, la mecanización se define como la ratio entre medios de producción y personas empleadas, y se toma como indicador *proxy* de tecnificación:<sup>14</sup>

$$m = A/E \quad (5)$$

Así, por simplicidad, se asume que la productividad queda definida por el siguiente producto:

$$q = em \quad (6)$$

donde implícitamente se asume pleno empleo de capacidades instaladas. Respecto del ingreso neto obtenido al vender las mercancías producidas, asumamos que se distribuye entre salarios  $V$  y ganancias  $\Pi$ :

$$Q = V + \Pi \quad (7)$$

<sup>13</sup> Como ejemplo para ilustrar la noción de intensidad laboral, puede pensarse en un obrero que trabaja ante una línea de ensamblaje movida por una banda sin fin. Cuando la banda se acelera, en promedio el obrero aplica un mayor esfuerzo en cada hora trabajada para ensamblar más productos, pese a que no han cambiado ni la jornada ni los medios de producción. Así, mientras mayor velocidad de la banda hay, existe una mayor intensidad laboral.

<sup>14</sup> La mecanización es análoga al “capital por persona” empleado por modelos de crecimiento que asumen un solo bien como en Solow (1956). Así, por ejemplo,  $m = 5$  significa que hay cinco unidades del bien utilizado como medio de producción por cada trabajador empleado. El autor es consciente de que esta ratio es problemática si existen bienes de capital heterogéneos por la dificultad de obtener una medida agregada del capital independiente de la distribución (Harcourt, 2022; Fratini, 2019). Por ende, queda como trabajo futuro extender el modelo a un contexto sectorial con varios tipos de medios de producción.

A fin de representar esta distribución, se define a la participación salarial como:

$$\omega = V/Q = \omega/q \quad (8)$$

Mientras que  $(1-\omega)$  representa la participación del capital en el producto.<sup>15</sup> A su vez, definamos la tasa media de ganancia  $r$  como la ratio entre las ganancias y el dinero que representa al capital inicial:

$$r = \Pi/K \quad (9)$$

Al combinar (1) a (9), puede escribirse:<sup>16</sup>

$$r = he(1-\omega) \quad (10)$$

donde se nota que la tasa de ganancia  $r$  crece cuando aumentan la intensidad del trabajo  $e$ , la jornada laboral  $h$  y la participación del capital  $(1-\omega)$ . Ahora, asumamos que los capitalistas emplean una fracción constante de sus ganancias a fin de ampliar su capital inicial como respuesta a sus expectativas de ganancias futuras y a las presiones de la competencia (Marx, 2009a: 697, 731-732). Así, surge la acumulación de capital, es decir, la ampliación del capital que se financia con el ahorro de una fracción ( $0 < s \leq 1$ ) de las ganancias (en el caso más básico),<sup>17</sup> y se espera que tal ahorro se canalice —gracias al sistema financiero— hacia la compra de una mayor cantidad de medios de producción y de fuerza de trabajo (se asume equilibrio en el mercado de bienes y en el mercado financiero; asimismo, se supone que los trabajadores sólo consumen y no ahorran). Por lo tanto, la acumulación capitalista puede representarse como el cambio en el tiempo del dinero que representa al capital inicial neto  $K$  financiado por el ahorro de una fracción de las ganancias:

<sup>15</sup> En los modelos de negociación asimétrica de Nash y similares, la participación salarial y la del capital resultan proporcionales al poder de negociación ejercido por cada clase social (Muthoo, 1999). Esta perspectiva difiere con el presente artículo, donde se representa al poder de negociación en los parámetros de las ecuaciones que describen el crecimiento del salario y de la intensidad laboral. De todas formas, no se descarta la posibilidad de combinar ambos enfoques en trabajos futuros, quizá siguiendo la noción de poder de negociación sugerida por Ozanne (2016: cap. 9).

<sup>16</sup> Todas las deducciones se obtuvieron con Wolfram Mathematica y los respectivos comandos pueden consultarse al autor mediante correspondencia.

<sup>17</sup> Es decir, si se asume una sociedad capitalista cerrada sin vínculos económicos con otras sociedades, como lo hace Marx (2009a: 715).

$$K' = sII \quad (11)$$

donde  $K' = dK/dt$  es la derivada en el tiempo (derivada temporal) de  $K$ . Asimismo, puede nombrarse la tasa de crecimiento de  $K$  como una tasa de acumulación  $\gamma$  igual a:

$$\gamma = K'/K \quad (12)$$

Si se combinan (1) a (12), puede escribirse:

$$\gamma = sr = sbe(1-w) \quad (13)$$

donde se nota un vínculo directo entre las tasas de acumulación y de ganancia.

## *2. El papel del ejército laboral de reserva en la acumulación capitalista*

Marx consideraba que con la acumulación de capital puede crecer tanto su componente constante como el variable. Al crecer el capital variable, por un lado, puede suceder que “la demanda de obreros supere su oferta, a raíz de lo cual los salarios pueden aumentar” (Marx, 2009a: 760), lo que beneficia a la clase asalariada por la “merma cuantitativa del trabajo impago que debe ejecutar” (Marx, 2009a: 768). Por otro lado, si el salario crece demasiado, las ganancias podrían disminuir en perjuicio de la clase capitalista (Marx, 2009a: 768-769). Ambos efectos reflejan la pugna distributiva que surge al expandirse el capital. La regulación de esta pugna necesita una sobrepoblación obrera relativa, es decir, un grupo de no empleados (o subempleados) que brinde “el material humano explotable y siempre disponible” para la acumulación sin importar los límites del crecimiento poblacional (Marx, 2009a: 786-787). En el capitalismo, esa sobrepoblación obrera toma la forma de un ejército laboral de reserva compuesto por desempleados (y subempleados) que puedan integrarse a la producción a la vez que contribuyen a regular la explotación laboral (Marx, 2009a: 797).<sup>18</sup>

<sup>18</sup> Entre los trabajos que motivaron a Marx a plantear la noción del ejército laboral de reserva está la contradicción que Ricardo (1973: cap. 31) menciona entre empleo y maquinaria.

De hecho, durante el proceso de acumulación siempre es necesario que unos sectores de la producción ajusten su nivel de empleo sin afectar sectores. Para Marx, el ejército laboral de reserva brinda la masa obrera que permite hacer esos ajustes: “Es necesario que se pueda volcar súbitamente grandes masas humanas en los puntos decisivos, sin que con ello se rebaje la escala alcanzada por la producción en otras esferas. La sobrepoblación [ejército laboral de reserva en el capitalismo] proporciona esas masas” (Marx, 2009a: 787).

Asimismo, considera que en el capitalismo existe una importante tendencia a la mecanización, lo que provoca la expulsión continua de trabajadores que terminan integrándose al ejército de reserva:

A medida que progresa la acumulación, pues, no solamente se da un acrecentamiento cuantitativo y simultáneo de los diversos elementos reales del capital: [...] [también hay] cambios graduales en la composición técnica del capital [similar a la mecanización], cuyo factor objetivo aumenta progresivamente [medios de producción], en magnitud relativa, frente al factor subjetivo [fuerza de trabajo] [Marx, 2009a: 773].

[En consecuencia] La acumulación capitalista produce de manera constante, antes bien, y precisamente en proporción a su energía y a su volumen, una población obrera relativamente excedentaria, esto es, excesiva para las necesidades medias de valorización del capital y por tanto superflua [Marx, 2009a: 784].

A fin de representar este vínculo entre expansión capitalista y la condición de reserva del ejército laboral, puede asumirse un caso simplificado donde sólo hay empleo y desempleo. Así, se define la tasa de empleo  $l$  como la ratio entre personas empleadas  $E$  y la población disponible para trabajar  $N$ :

$$l = E/N \quad (14)$$

Por simplicidad y con base en Goodwin (1967), asumamos que el crecimiento de  $N$  es exógeno (puede depender, por ejemplo, de aspectos demográficos),<sup>19</sup> y puede representarse con una tasa constante  $n$ :

$$N'/N = n \quad (15)$$

<sup>19</sup>Para una interpretación alternativa, véase Harris (1983: 317).

Al derivar (14) respecto del tiempo y remplazar en (15), se obtiene:

$$l'/l = (E'/E) - n \quad (16)$$

A su vez, si se combinan (1) a (9), puede escribirse el siguiente vínculo entre la tasa de empleo y capital inicial:

$$K = Em \quad (17)$$

Si se deriva (17) respecto del tiempo (recuérdese que  $m$  es constante) y se combina con (12), (13) y (16), puede escribirse el crecimiento de la tasa de empleo como:<sup>20</sup>

$$l'/l = \gamma - n = sbe(1 - w) - n \quad (18)$$

donde el empleo crece por los mismos factores que hacen crecer a la acumulación de capital, es decir, la intensidad laboral, la jornada y la participación del capital. En cuanto al papel del ejército laboral de reserva como regulador de la explotación, por un lado, puede pensarse en la presión que la reserva ejerce sobre los salarios:

Los movimientos generales del salario están regulados exclusivamente por la expansión y la contracción del ejército industrial de reserva, las cuales se rigen, a su vez, por la alternación de periodos que se opera en el ciclo industrial. Esos movimientos no se determinan, pues, por el movimiento del número absoluto de la población obrera, sino por la proporción variable en que la clase obrera se divide en ejército activo y ejército de reserva, por el aumento y la mengua del volumen relativo de la sobrepoblación, por el grado en que ésta es ora absorbida, ora puesta en libertad [Marx, 2009a: 793].

Esta intuición puede representarse con una curva de Phillips que vincule el salario real (recuérdese que  $p = 1$ ) con la tasa de empleo, como lo plantea Goodwin (1967: 55):

<sup>20</sup> Una mecanización constante implica que el empleo crece al mismo ritmo que el capital total inicial (que sólo incluye capital constante), es decir,  $E'/E = K'/K$ . Este resultado es consecuencia del supuesto (implícito) de pleno empleo de capacidad instalada, pues, si se retira tal supuesto, el empleo puede crecer para un mismo capital total si se incrementa el uso de capacidad instalada. Conviene notar este detalle para futuras extensiones.

$$\omega'/\omega = -\alpha_{w0} + \alpha_{w1}l \quad (19)$$

donde el parámetro  $\alpha_{w0}$  representa de forma simplificada el poder de negociación de los capitalistas para empujar el salario a la baja, mientras que  $\alpha_{w1}$  corresponde al poder de negociación obrero de empujar el salario al alza dada una tasa de empleo.<sup>21</sup> Aquí se asume que mientras mayor es la tasa de empleo y, por ende, menor la proporción de desempleados y de miembros de la reserva laboral, se reduce la presión que sufren los empleados para aceptar salarios bajos ante amenazas de despido o similares.<sup>22</sup> Asimismo, una mayor proporción de empleados podría otorgar a la clase trabajadora más posibilidades de generar sindicatos y otras formas de organización que le otorguen un mayor poder de negociación salarial.

Por otro lado, la explotación laboral también puede regularse en un contexto de salarios crecientes, debido a la capacidad capitalista de extraer mayor fuerza de trabajo de un mismo número de obreros por la presión que ejerce el ejército de reserva:

A todo capitalista le interesa, de manera absoluta, arrancar una cantidad determinada de trabajo de un número menor de obreros, en vez de extraerla, con la misma baratura e incluso a un precio más conveniente, de un número mayor. En el último caso la inversión de capital constante aumenta proporcionalmente a la masa del trabajo puesto en movimiento; en el primer caso, aumenta con lentitud mucho mayor [...] El desarrollo del modo capitalista de producción y de la fuerza productiva del trabajo —causa y efecto, a la vez, de la acumulación— permite que el capitalista, con la misma inversión de capital variable, ponga en movimiento más trabajo gracias a una explotación mayor —en extensión o en intensidad— de las fuerzas de trabajo individuales [...] El trabajo excesivo de la parte ocupada de la clase obrera engruesa las filas de su reserva, y, a la inversa, la presión redoblada que esta última, con su competencia, ejerce sobre el sector ocupado de la clase obrera obliga a éste a trabajar excesivamente y a someterse a los dictados del capital. La condena de una parte de la clase obrera al ocio forzoso mediante el exceso

<sup>21</sup> Una interpretación similar es propuesta por Mehrling (1986) en su “ecuación de negociación salarial”. Por cierto, a fin de incluir elementos de negociación asimétrica, la ecuación (19) podría extenderse al agregar a la derecha el término  $\alpha_{w2}\varpi - \alpha_{w3}(1 - \varpi)$ , donde  $\varpi$  tiene un efecto positivo y  $(1 - \varpi)$  tiene uno negativo en el crecimiento salarial, lo que agrega mayores dinámicas complejas al modelo.

<sup>22</sup> Así, podría vincularse al presente modelo con trabajos donde el desempleo sirve como mecanismo de disciplina laboral, por ejemplo, Shapiro y Stiglitz (1984).

de trabajo impuesto a la otra parte, y viceversa, se convierte en medio de enriquecimiento del capitalista singular y, a la vez, acelera la producción del ejército industrial de reserva en una escala acorde con el progreso de la acumulación social [Marx, 2009a: 791-792].

Si se tiene una jornada constante, la mayor explotación de la fuerza de trabajo con un salario fijo (o hasta creciente) se logra al incrementar la intensidad laboral, con base en la siguiente intuición de Marx resaltada también por Mavroudeas e Ioannides (2011): “cuanto más se acrecienta la fuerza productiva del trabajo, tanto más puede reducirse la jornada laboral, y cuanto más se la reduce, tanto más puede aumentar la intensidad del trabajo” (Marx, 2009a: 643). Esto se debe a que la misma acumulación puede acrecentar “la oferta de obreros mediante su ‘puesta en libertad’, mientras que a la vez la presión de los desocupados obliga a los ocupados a poner en movimiento más trabajo” (Marx, 2009a: 796-797).<sup>23</sup> A su vez, conviene recordar que Marx intuía un vínculo entre intensidad laboral y mecanización: “con el progreso de la maquinaria y al acumularse la experiencia de una clase especial de obreros mecánicos, aumenta de manera natural la velocidad y con ella la intensidad del trabajo” (Marx, 2009a: 498-499).

Estas intuiciones pueden representarse en la siguiente expresión:

$$e'/e = -\alpha_{e1}l - \alpha_{e2}e + \alpha_{e3}m + \alpha_{e4}(\bar{w}'/\bar{w}) \quad (20)$$

donde  $\alpha_{e1}$  representa de forma simplificada el poder obrero de presionar por una menor intensidad laboral dada una determinada tasa de empleo (similar a  $\alpha_{w1}$  en el caso del salario);  $\alpha_{e2}$  recoge la tendencia a que, mientras más alta sea la intensidad laboral, haya cada vez una mayor presión para que ésta deje de crecer incluso por límites fisiológicos;<sup>24</sup> en cambio,  $\alpha_{e3}$  refleja el poder capitalista de aumentar la intensidad laboral futura por la mecanización

<sup>23</sup> Volviendo al ejemplo del obrero y la banda sin fin, incluso con una jornada constante y salarios crecientes, los capitalistas pueden aumentar la explotación laboral y sus ganancias si incrementan la velocidad de la banda lo suficiente y, por ende, aumentan la intensidad laboral (aprovechando también la amenaza de despido).

<sup>24</sup> “La máquina no se agota exactamente en la misma proporción en que se usa. En cambio, el hombre se agota en una proporción mucho mayor de la que podría suponerse a base del simple aumento numérico de trabajo” (Marx, 1976). Esta intuición también podría representarse si se agrega a la derecha de la expresión (20) el término  $-\alpha_{e5}b$ , asumiendo que, mientras haya una mayor jornada, la intensidad laboral sería menor por agotamiento.

actual,<sup>25</sup> y  $\alpha_{e4}$  también refleja el poder capitalista para incrementar la intensidad, pero asociado con la expansión de la demanda: mientras mayores salarios haya ( $w'/w > 0$ ), la demanda de consumo obrero crecerá, lo que puede llevar a que los capitalistas aceleren la producción (y se incremente la intensidad) a fin de satisfacer esa demanda acrecentada (también podría verse como una reacción de los capitalistas al incremento de costos laborales).<sup>26</sup>

### 3. Dinámica cíclica, poder y crisis

Si se combinan (6), (8), (19) y (20), se obtiene un sistema dinámico en tres dimensiones para la tasa de empleo, la participación salarial y la intensidad laboral:<sup>27</sup>

$$l'/l = sh e(1 - w) - n \quad (21)$$

$$w'/w = -[m\alpha_{e3} - \alpha_e 2e - \alpha_{w0}(\alpha_{e4} - 1)] + (\alpha_{e1} + \alpha_{w1} - \alpha_{e4}\alpha_{w1})l \quad (22)$$

$$e'/e = (m\alpha_{e3} - \alpha_{e4}\alpha_{w0} - \alpha_e 2e) - (\alpha_{e1} - \alpha_{e4}\alpha_{w1})l \quad (23)$$

Este sistema posee un equilibrio relevante ( $l^*$ ,  $w^*$ ,  $e^*$ ), donde las variables endógenas se estabilizan. Tal equilibrio se obtiene al igualar a 0 las derivadas temporales ( $l' = w' = e' = 0$ ) en (21), (22) y (23), y despejar las variables endógenas; así se obtiene:

$$l^* = \alpha_{w0}/\alpha_{w1} \quad (24)$$

$$w^* = 1 - (n\alpha_{e2}\alpha_{w1})/[hs(m\alpha_{e3}\alpha_{w1} - \alpha_{e1}\alpha_{w0})] \quad (25)$$

<sup>25</sup> Con el supuesto de un solo bien, la mecanización se asume como un indicador aproximado de la tecnificación o, en términos de Marx (2009a), como un indicador de la composición técnica del capital (Morishima, 1973: 34-35). Por ende, al incluir el término  $\alpha_{e3}m$  en (20) se asume que, para cada nivel de mecanización y composición técnica del capital, siempre hay una presión a incrementar la intensidad laboral.

<sup>26</sup> Como se mencionó para el crecimiento salarial, si se desea agregar elementos de negociación asimétrica, a la derecha de (20) puede incluirse el término  $-\alpha_{e6}w + \alpha_{e7}(1 - w)$ , donde se asume que  $w$  tiene un efecto negativo y  $(1 - w)$  tiene uno positivo en el crecimiento de la intensidad.

<sup>27</sup> La expresión (21) es igual a la (18). La expresión (23) se obtiene al resolver  $w'$  de la (19) y reemplazar en la (20). La expresión (22) nace de resolver  $q$  de la (6) y reemplazar en la (8); derivar el resultado anterior respecto del tiempo y reemplazar  $e'$  desde la (23); resolver  $w'$  del paso anterior y reemplazar en la (19).

$$e^* = (m\alpha_{e3}\alpha_{w1} - \alpha_{e1}\alpha_{w0}) / \alpha_{e2}\alpha_{w1} \quad (26)$$

Si la población disponible para trabajar crece a un ritmo bajo,<sup>28</sup> entonces el equilibrio  $(l^*, w^*, e^*)$  genera valores positivos, si la mecanización  $m$  supera al umbral  $m^E$  dado por:

$$m > m^E = \alpha_{e1}\alpha_{w0} / \alpha_{e3}\alpha_{w1} \quad (27)$$

donde  $m^E$  depende de los parámetros que representan el poder de negociación salarial ( $\alpha_{w0}$ ,  $\alpha_{w1}$ ) y algunos parámetros asociados con la disputa por la intensidad laboral ( $\alpha_{e1}$ ,  $\alpha_{e3}$ ). Desde (27) puede plantearse una interpretación económica y política asociada con las relaciones de poder y la pugna entre clases sociales: dada una distribución de poder al negociar el salario (es decir, con determinada ratio  $\alpha_{w0}/\alpha_{w1}$  que luego se analiza), si el poder obrero para reducir la intensidad laboral crece respecto del poder capitalista a fin de incrementarla (crece la ratio  $\alpha_{e1}/\alpha_{e3}$ ), la mecanización debe aumentar para mantener un equilibrio  $e^*$  positivo y, por ende, una productividad positiva, pues  $q = em$  por (6). Este resultado se justifica porque, ante un mayor poder obrero para reducir la intensidad y la productividad laborales, los capitalistas están obligados a incrementar la mecanización para compensar la pérdida de productividad.<sup>29</sup>

Por su parte, a fin de interpretar el papel de  $\alpha_{w0}$  y  $\alpha_{w1}$ , puede aprovecharse el siguiente resultado (demostrado analíticamente en el apéndice 1): el equilibrio  $(l^*, w^*, e^*)$  es localmente estable<sup>30</sup> cuando  $\alpha_{w1}$  es menor al umbral  $\alpha_{w1}^{HB}$  dado por:

$$\alpha_{w1} < \alpha_{w1}^{HB} = \alpha_{e1} / \alpha_{e4} \quad (28)$$

donde  $\alpha_{w1}^{HB}$  depende sólo de parámetros asociados con la pugna por la intensidad laboral ( $\alpha_{e1}$ ,  $\alpha_{e4}$ ). Desde (28) también puede plantearse una interpretación económica y política: la distribución de poder en la definición de la intensidad laboral (representada en  $\alpha_{e1}/\alpha_{e4}$ ) limita al poder obrero para

<sup>28</sup> Desde la expresión (25) se observa que  $0 < w^* < 1$  si  $n < [bs(m\alpha_{e3}\alpha_{w1} - \alpha_{e1}\alpha_{w0})] / \alpha_{e2}\alpha_{w1}$  y  $m > m^E$ .

<sup>29</sup> Esta interpretación podría vincularse con la ecuación (14) de Eagly (1972: 531), donde la mecanización crece por una determinada tasa de empleo para limitar el poder de negociación obrero.

<sup>30</sup> Aquí la estabilidad se entiende desde un enfoque de sistemas dinámicos: convergencia hacia un punto o trayectoria de equilibrio con el paso del tiempo por la propia naturaleza del sistema. Este enfoque difiere con la visión estática del equilibrio general walrasiano o afines.

exigir incrementos salariales (límite representado en  $\alpha^{HB}_{w1}$ ), si se desea mantener la estabilidad de la dinámica capitalista. De hecho, si los capitalistas ganan mayor poder para incrementar la intensidad laboral respecto de los trabajadores (cae  $\alpha_{e1}/\alpha_{e4}$ ), hay una presión para que también ganen poder en relación con los trabajadores en su capacidad de reducir el salario (crece  $\alpha_{w0}/\alpha_{w1}$  por reducción directa de  $\alpha_{w1}$ ) para que la acumulación de capital no se desestabilice. Por ende, se nota que la pugna por la intensidad laboral no es trivial, pues puede imponer límites a la disputa salarial.

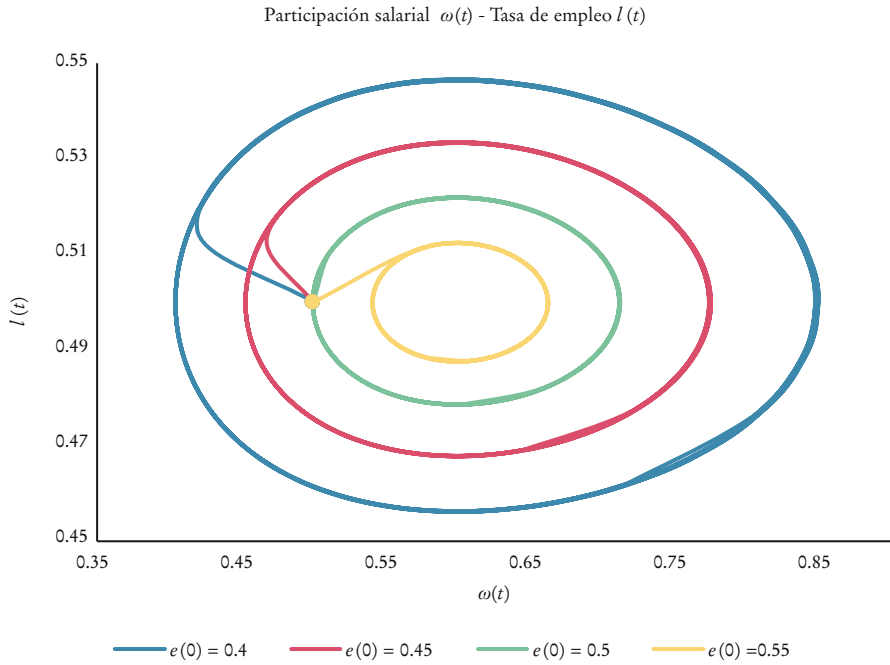
Ahora, a fin de comprender el tipo de estabilidad del modelo (21), (22) y (23), puede emplearse el teorema de bifurcación de Hopf para tres dimensiones. Desde el estudio de un “parámetro de bifurcación”, este teorema permite probar la existencia de ciclos límite, es decir, trayectorias cerradas en el espacio de las variables endógenas del sistema dinámico capaces de “atrapar” en espiral a otras trayectorias con el paso del tiempo. Así, al aplicar el teorema (apéndice 2), puede probarse que, sobre todo cuando la mecanización es lo suficientemente alta y  $\alpha_{w1}$  se aproxima a  $\alpha^{HB}_{w1}$ , el modelo genera ciclos límite estables: para valores iniciales no muy alejados del equilibrio ( $l^*$ ,  $w^*$ ,  $e^*$ ), surgen trayectorias en espiral que al final quedan atrapadas en ciclos cerrados.

Este comportamiento —demostrado teóricamente— puede visualizarse con simulaciones numéricas.<sup>31</sup> Por ejemplo, la gráfica 1 presenta simulaciones para un caso extremo de ciclos límite ( $\alpha_{w1} = \alpha^{HB}_{w1}$ ); emplea condiciones iniciales constantes para la participación salarial  $w$  y la tasa de empleo  $l$ , y cambia los valores iniciales de la intensidad laboral  $e$ . Esta gráfica sugiere que en el espacio  $w-l$  surgen ciclos límite que fluctúan alrededor del equilibrio ( $w^*$ ,  $l^*$ ) en sentido horario (similar al modelo de Goodwin), mientras que la intensidad converge monótonamente hacia su equilibrio ( $e^*$ ). Asimismo, en el espacio  $w-l$  se nota que, pese a tener siempre un mismo valor inicial en estas variables, los ciclos límite tienden a ampliarse cuando el valor inicial de la intensidad es menor, y en la mayoría de los casos el punto inicial no forma parte de los ciclos —a diferencia de Goodwin (1967), donde los valores ini-

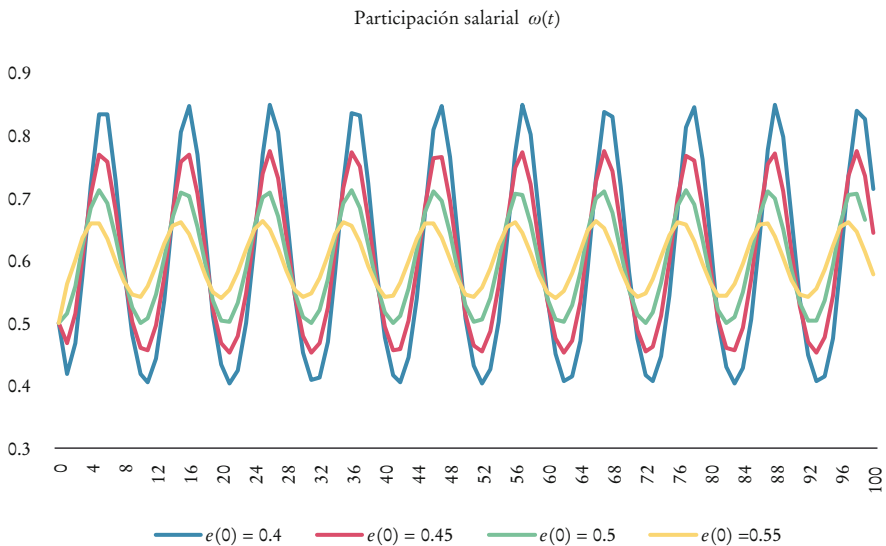
<sup>31</sup> Las simulaciones se obtuvieron en Wolfram Mathematica y usan valores referenciales que ilustran el comportamiento teórico demostrado en los apéndices 1 y 2. Estas simulaciones asumen que los capitalistas ahorran todas sus ganancias ( $s=1$ ), como en Goodwin (1967), cada trabajador aporta 0.5 horas efectivas de fuerza de trabajo ( $b=0.5$ ), hay cinco unidades de bien empleadas como máquinas por cada empleado ( $m=5$ ), la población disponible para trabajar crece 10% ( $n=0.1$ ), y los demás parámetros se calibran para que  $w$  y  $l$  fluctúen entre 0 y 1. Se deja para trabajos futuros la calibración con parámetros más realistas, como en Grasselli y Maheshwari (2018).

GRÁFICA 1. Ciclos límite estables para diferentes valores iniciales de la intensidad laboral

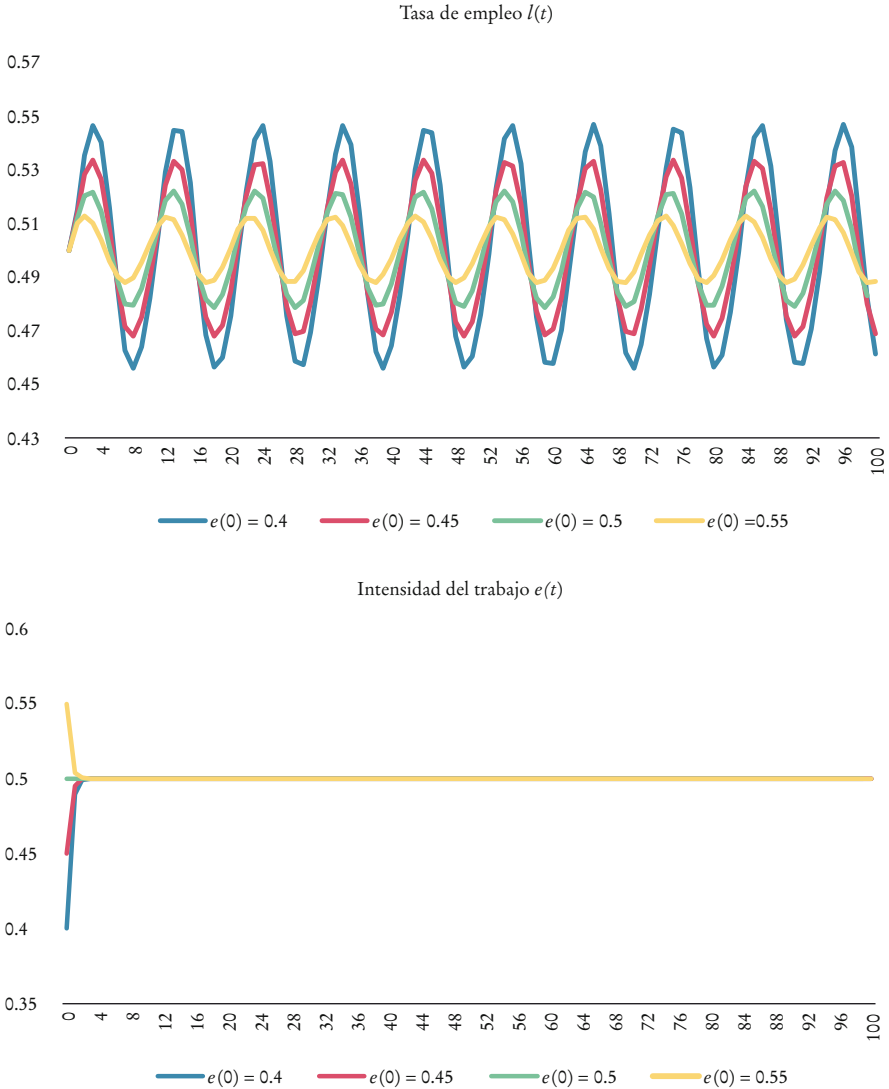
a) Espacio  $\omega - l$



b) Series temporales



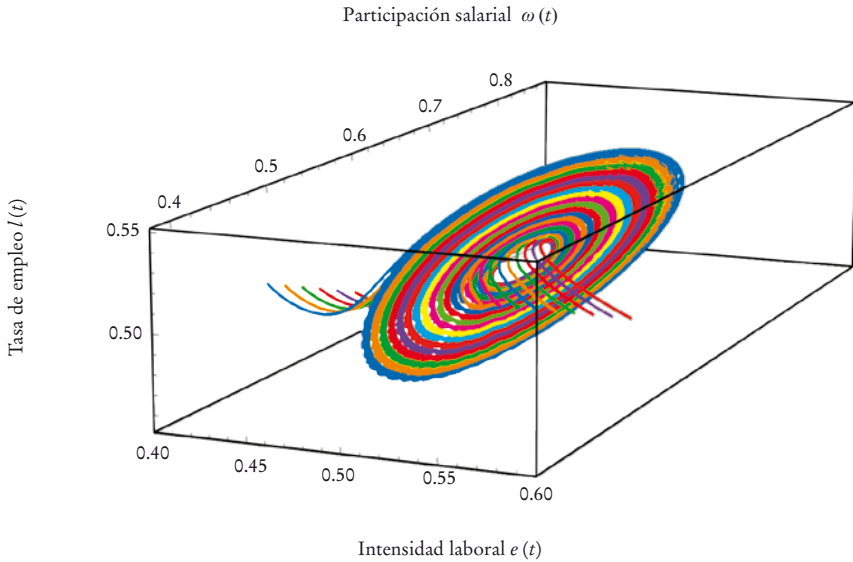
GRÁFICA 1. Ciclos límite estables para diferentes valores iniciales de la intensidad laboral (continúa)



ciales siempre caen dentro de los ciclos—. Respecto de la representación tridimensional de las trayectorias (espacio  $w-l-e$ ), desde los diferentes valores iniciales de la intensidad se converge en un “disco” que ilustra la estabilidad del modelo.

GRÁFICA 1. Ciclos límite estables para diferentes valores iniciales de la intensidad laboral  
(continúa)

c) Espacio tridimensional  $\varpi-l-e$

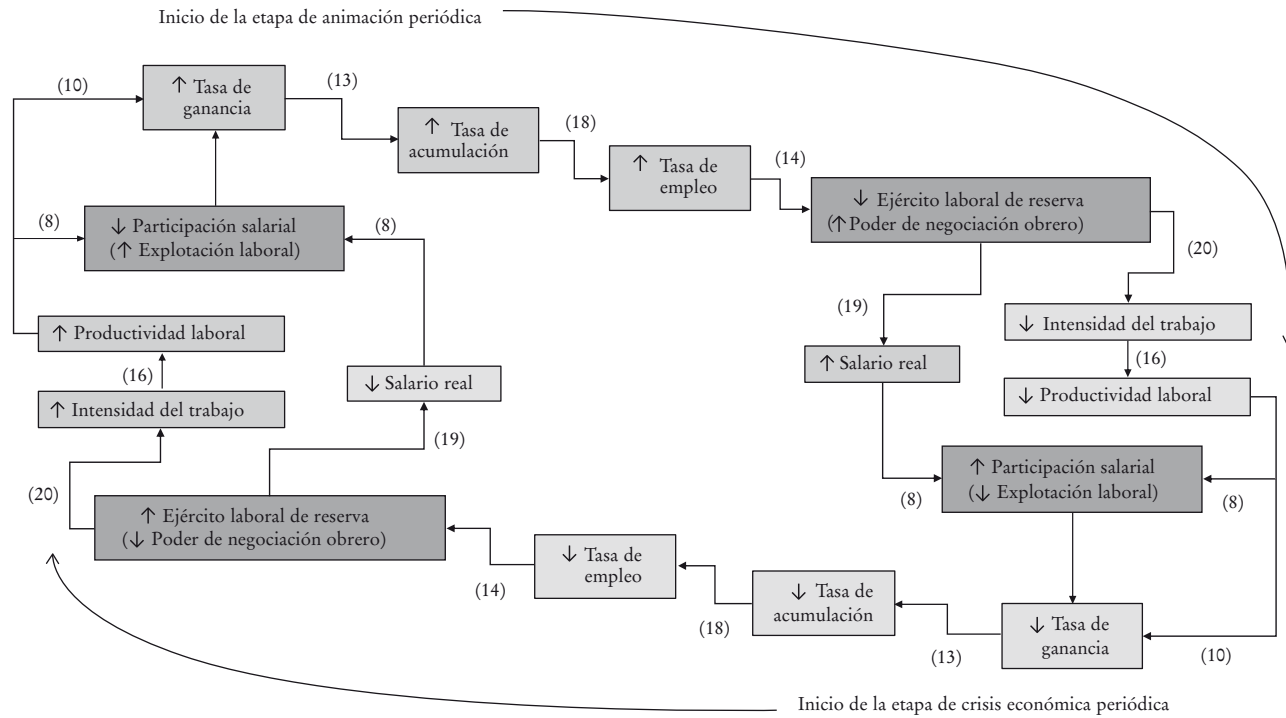


FUENTE: elaboración propia con parámetros  $s=1$ ,  $h=0.5$ ,  $n=0.1$ ,  $m=5$ ,  $\alpha_{w0}=2.5$ ,  $\alpha_{w1}=5$ ,  $\alpha_{e1}=5$ ,  $\alpha_{e2}=5$ ,  $\alpha_{e3}=1$ ,  $\alpha_{e4}=1$  ( $\alpha_{w1}^{HB}=5$ ) valores iniciales  $l_0=w_0=0.5$ .

Al tomar como referencia interpretaciones preliminares (Cajas Guijarro, 2018a), la gráfica 1 sugiere que la acumulación capitalista genera ciclos endógenos que fluctúan entre etapas de animación y de crisis económicas periódicas (Marx, 2009a: 787). Así, en la animación periódica existe una elevada tasa de ganancia ( $\uparrow r$ ) y, por ende, una tasa de acumulación alta ( $\uparrow \gamma$ ) que amplía con fuerza el empleo ( $\uparrow l$ ) y reduce el peso del ejército laboral de reserva, lo que incrementa el poder obrero para exigir un mayor salario real ( $\uparrow w$ ) y menor intensidad laboral ( $\downarrow e$ ) —y menor productividad ( $\downarrow q$ )—, movimientos que incrementan la futura participación salarial ( $\uparrow w$ ) —y reducen la explotación laboral—. <sup>32</sup> Como resultado, en periodos posteriores la tasa de ganancia decae ( $\downarrow r$ ) e inicia una crisis económica periódica, pues se debilita la tasa de acumulación ( $\downarrow \gamma$ ), lo que atenúa al empleo ( $\downarrow l$ ), e incrementa así el

<sup>32</sup> Sobre el vínculo entre participación salarial y tasa de explotación, véase Falkinger y Laski (1983).

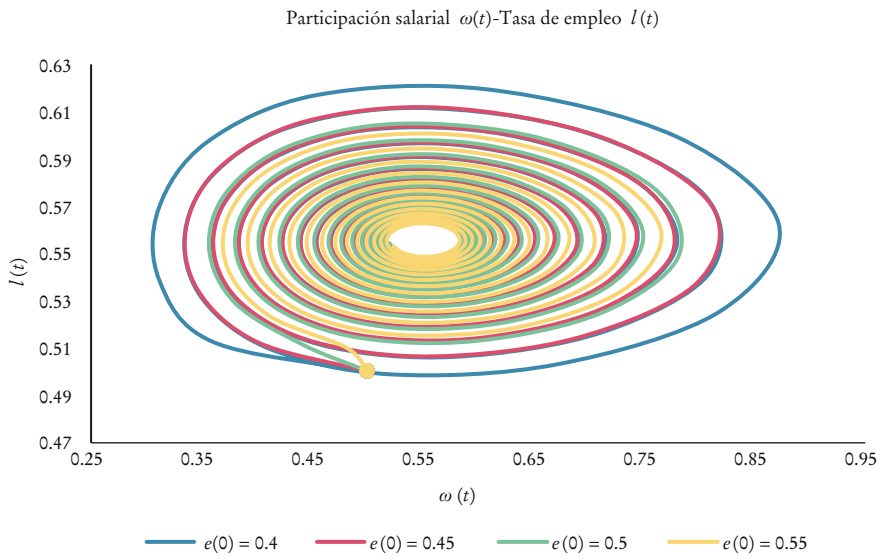
DIAGRAMA 1. Animación y crisis económicas periódicas de la acumulación capitalista



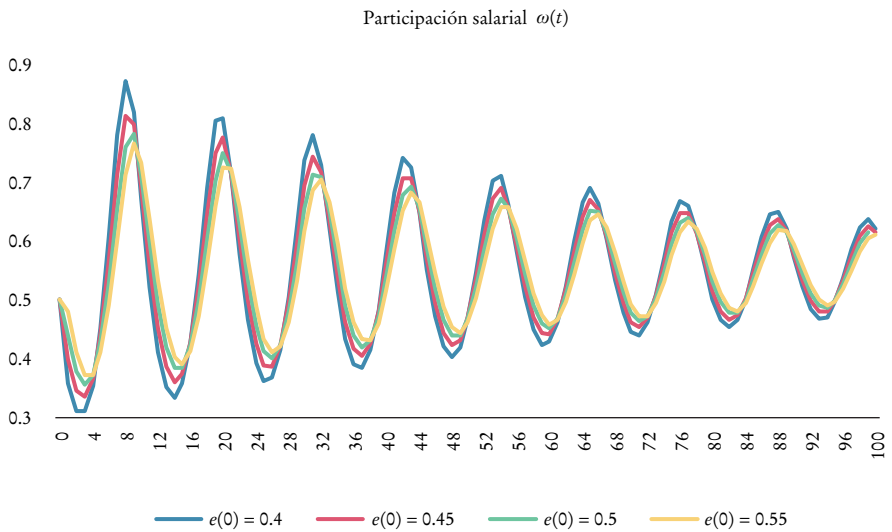
FUENTE: elaboración propia a partir de Cajas Guijarro (2018a: 59).

GRÁFICA 2. Ciclos decrecientes ante bajo poder obrero de negociación salarial

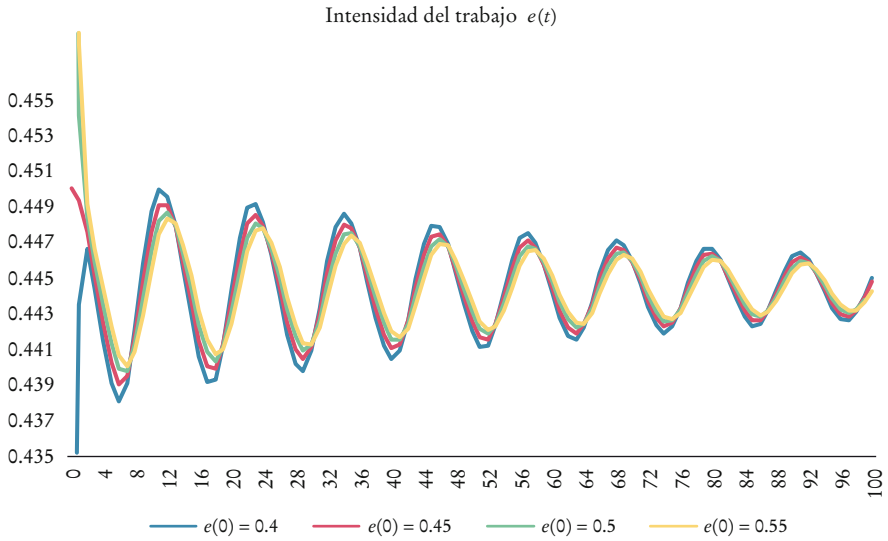
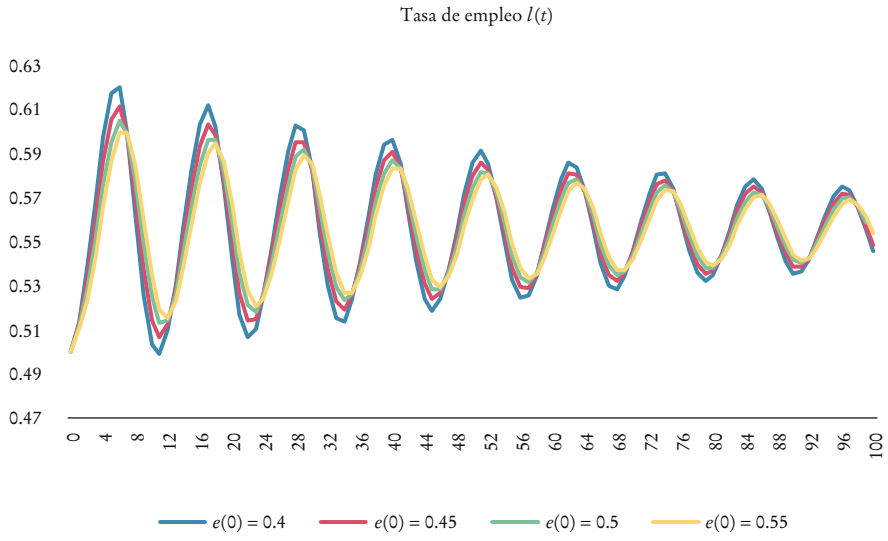
a) Espacio  $\omega - l$



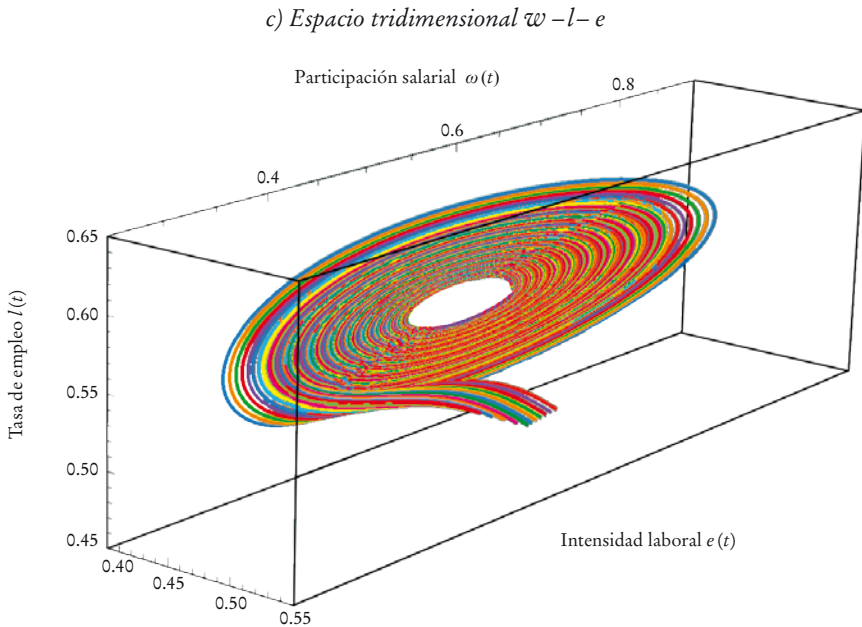
b) Series temporales



GRÁFICA 2. Ciclos decrecientes ante bajo poder obrero de negociación salarial  
(continúa)



GRÁFICA 2. Ciclos decrecientes ante bajo poder obrero de negociación salarial  
(continúa)



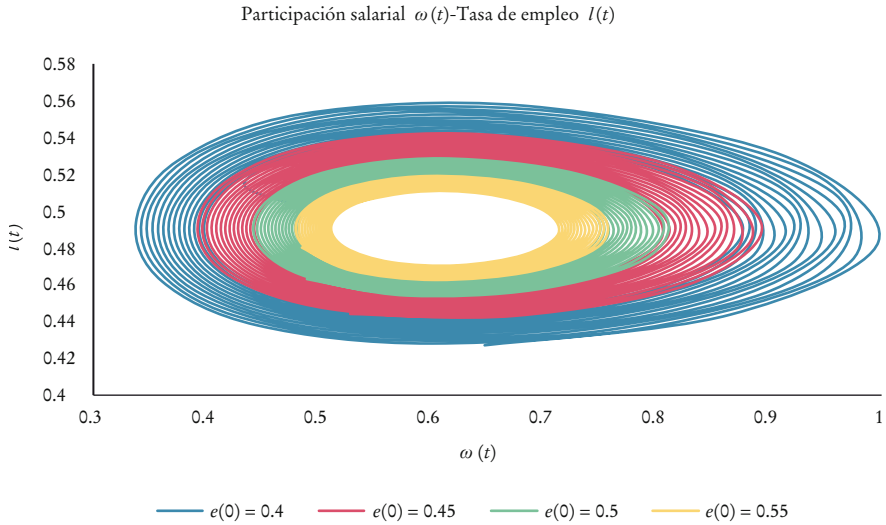
FUENTE: elaboración propia con parámetros  $s=1$ ,  $h=0.5$ ,  $n=0.1$ ,  $m=5$ ,  $\alpha_{w0}=2.5$ ,  $\alpha_{w1}=4.5$ ,  $\alpha_{e1}=5$ ,  $\alpha_{e2}=5$ ,  $\alpha_{e3}=1$ ,  $\alpha_{e4}=1$  ( $\alpha_{w1}^{HB}=5$ ) y valores iniciales  $l_0=\omega_0=0.5$ .

peso del ejército de reserva y reduce el poder de negociación obrero; ello facilita la reducción del salario real ( $\downarrow w$ ) y el incremento de la intensidad laboral ( $\uparrow e$ ) —y de la productividad ( $\uparrow q$ )—, lo cual reduce la participación salarial ( $\downarrow \omega$ ) —e incrementa la explotación— hasta que la futura tasa de ganancia se recupera ( $\uparrow r$ ) y arranca una nueva etapa de animación. Este proceso cíclico se resume en el diagrama 1, donde los números entre paréntesis indican las ecuaciones que sustentan el vínculo entre cada variable.

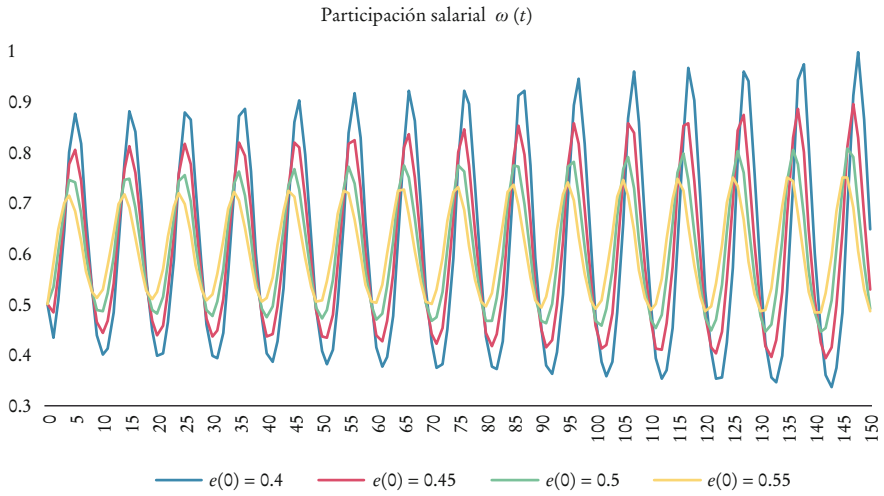
Además de ciclos límite estables, es posible identificar otras dinámicas. Por ejemplo, la gráfica 2 muestra simulaciones del modelo casi con los mismos criterios que la gráfica 1, excepto que los trabajadores poseen “bajo” poder de negociación salarial ( $\alpha_{w1} < \alpha_{w1}^{HB}$ ), lo que genera soluciones estables con ciclos de cada vez menor amplitud, a la vez que la intensidad laboral presenta ciclos (a una escala relativamente pequeña), y la dinámica

GRÁFICA 3. Ciclos explosivos ante elevado poder obrero de negociación salarial

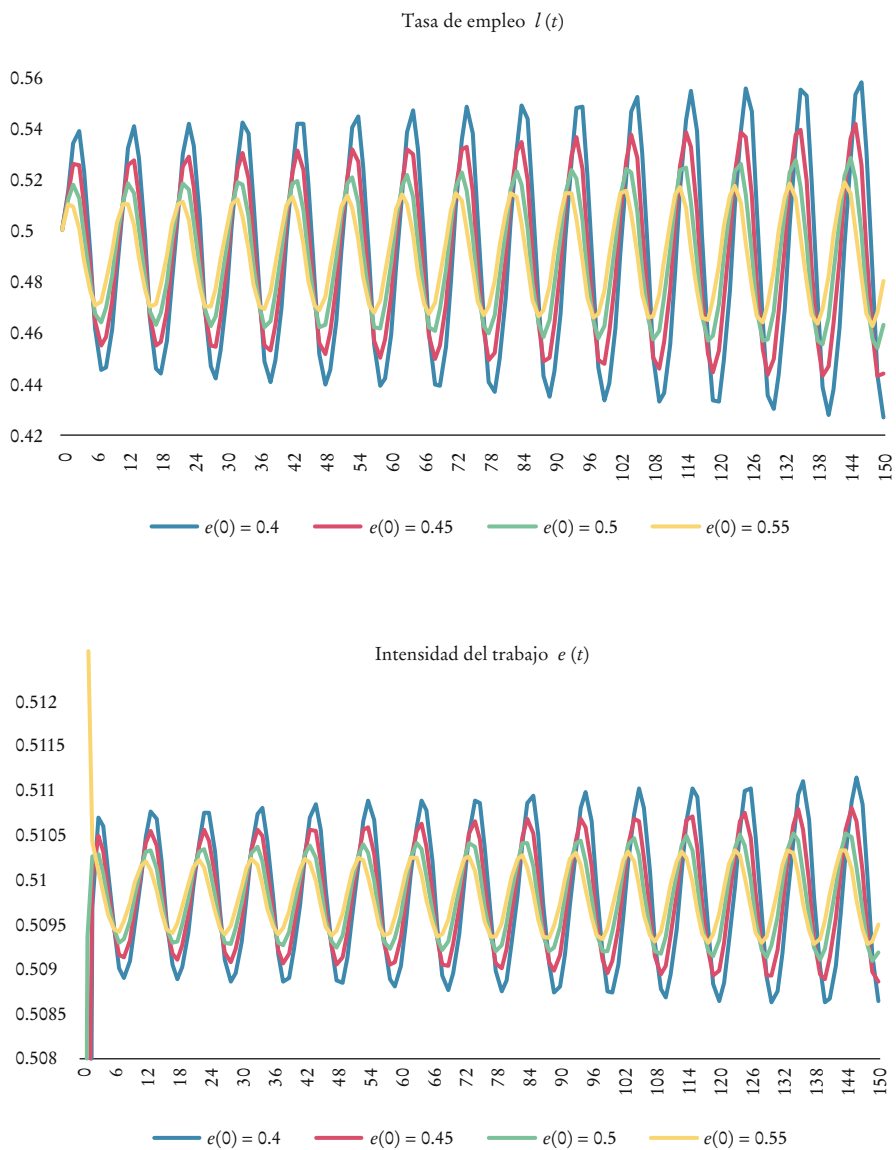
a) Espacio  $\omega-l$



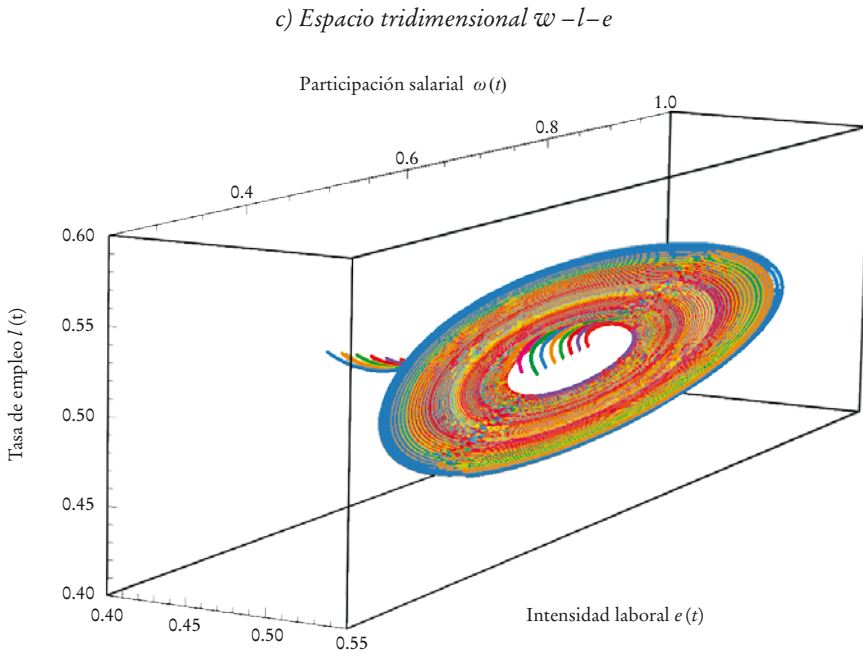
b) Series temporales



GRÁFICA 3. Ciclos explosivos ante elevado poder obrero de negociación salarial (continúa)



GRÁFICA 3. Ciclos explosivos ante elevado poder obrero de negociación salarial  
(continúa)

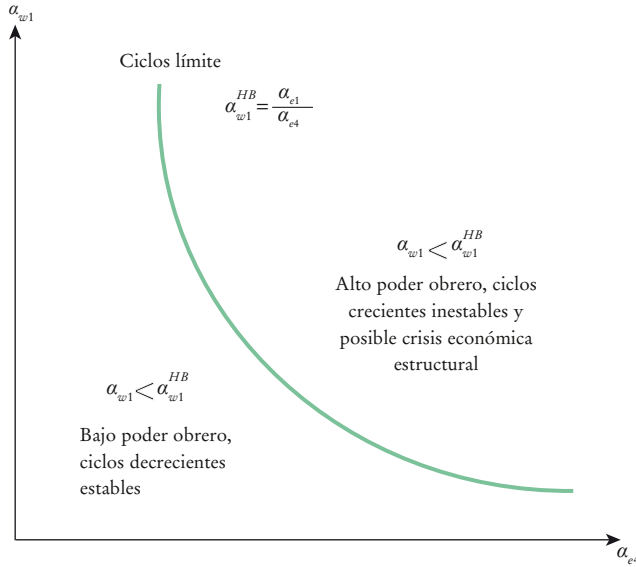


FUENTE: elaboración propia con parámetros  $s=1$ ,  $h=0.5$ ,  $n=0.1$ ,  $m=5$ ,  $\alpha_{w0}=2.5$ ,  $\alpha_{w1}=5.1$ ,  $\alpha_{e1}=5$ ,  $\alpha_{e2}=5$ ,  $\alpha_{e3}=1$ ,  $\alpha_{e4}=1$  ( $\alpha^{HB}_{w1}=5$ ) y valores iniciales  $l_0=\omega_0=0.5$ .

conjunta adquiere mayor complejidad con “discos” que se van “cerrando” en el espacio tridimensional. En contraste, la gráfica 3 presenta simulaciones del modelo cuando los trabajadores poseen un “alto” poder de negociación salarial ( $\alpha_{w1} > \alpha^{HB}_{w1}$ ), lo que genera dinámicas inestables con ciclos de amplitud cada vez mayor y hasta explosivos. Pese a estas diferencias, el comportamiento cualitativo sugerido en el diagrama 1 sigue vigente, así como el sentido horario de las espirales en el espacio  $\omega - l$ .

Desde estos resultados puede brindarse una interpretación global del vínculo entre el poder de negociación de las clases sociales y la estabilidad de los ciclos. En concreto, la expresión muestra que el valor crítico  $\alpha^{HB}_{w1}$ , en el cual se genera la bifurcación de Hopf, depende de la ratio entre el parámetro que representa el poder de los trabajadores para reducir la intensidad

GRÁFICA 4. Relación entre poder de negociación y estabilidad de los ciclos



FUENTE: elaboración propia.

laboral ( $\alpha_{e1}$ ) y uno de los parámetros que representa el poder capitalista para incrementar esa intensidad ( $\alpha_{e4}$ ). Como se mencionó previamente, si aumenta el poder relativo de los capitalistas para incrementar la intensidad laboral en comparación con la clase obrera (cae la ratio  $\alpha_{e1}/\alpha_{e4}$ ), necesariamente cae  $\alpha_{w1}^{HB}$ , lo que implica que el poder obrero de negociación salarial estará limitado por un umbral más restrictivo a fin de que existan ciclos estables. Es decir, en este caso se requiere una clase trabajadora más débil para garantizar la estabilidad cíclica del capitalismo, como sugiere la gráfica 4. En el caso contrario, si el poder obrero de negociación salarial es “demasiado alto” ( $\alpha_{w1} > \alpha_{w1}^{HB}$ ), surgen ciclos de amplitud creciente hasta que el modelo colapsa por una dinámica explosiva. En otras palabras, un excesivo poder obrero puede generar una crisis económica estructural: una interrupción de la reproducción capitalista que sólo puede superarse con un cambio exógeno en las estructuras de poder (representadas en los parámetros  $\alpha$  del modelo). Cabe notar que esta tendencia es distinta a las crisis económicas periódicas generadas por los ciclos endógenos previamente analizados.

La tendencia a una crisis económica estructural, cuando el poder obrero de negociación salarial supera el umbral impuesto por las pugnas de clase que definen la intensidad del trabajo ( $\alpha_{w1} > \alpha^{HB}_{w1}$ ), muestra cuán relevante puede ser la intensidad laboral en el análisis de la complejidad capitalista. La inclusión de esta variable resalta las consecuencias de que en el capitalismo la productividad no responde sólo a una dimensión técnica, sino también a una dimensión social vinculada con las relaciones de poder entre clases sociales. Esta dimensión es relevante, pues, como acaba de mencionarse, impone límites a las posibilidades de ampliar el poder obrero si se desea mantener la estabilidad de la reproducción del capital, lo que evidencia cuán asimétricas pueden ser las estructuras de poder para la clase obrera.

### III. CONCLUSIÓN

Con base en desarrollos preliminares (Cajas Guijarro, 2018a y 2018b), este texto ha reinterpretado algunas intuiciones de Marx sobre la acumulación capitalista y el ejército laboral de reserva mediante un modelo de ciclos endógenos en tres dimensiones: tasa de empleo, participación salarial e intensidad laboral (variable que no ha recibido suficiente atención en la literatura marxista de modelos cíclicos). El texto ha demostrado analíticamente (mediante el teorema de bifurcaciones de Hopf para tres dimensiones) y con simulaciones numéricas la existencia de ciclos límite y ciclos de amplitud decreciente y creciente, así como la existencia de estabilidad, sobre todo cuando la mecanización es alta y el poder obrero de negociación salarial es menor a un umbral delimitado por la pugna entre clases sociales al definir la intensidad del trabajo. Desde esta condición, el texto ha planteado la noción de crisis económica estructural, entendida como una interrupción de la reproducción del capital que sólo puede superarse con un cambio exógeno en las estructuras de poder capitalistas, y que se distingue de las crisis económicas periódicas que nacen de los ciclos endógenos. Así, la inclusión de la intensidad resalta las consecuencias de que la productividad laboral no responde sólo a una dimensión técnica, sino también a una dimensión social que limita las posibilidades de ampliar el poder obrero si se desea mantener la estabilidad del capitalismo. Este resultado parece cercano a las intuiciones de autores como Palermo (2007), para quien existen estructuras sociales en

el capitalismo que generan relaciones de poder asimétricas en perjuicio de la clase trabajadora.

Además de estas interpretaciones, el estudio del presente modelo puede ampliarse en diferentes direcciones. Por ejemplo, pueden incluirse las pugnas de clase que surgen al definir la jornada laboral mediante una función que vincule la jornada  $b$  con la tasa de empleo  $l$ , así como una función que muestre los incentivos de los capitalistas para acelerar la mecanización  $m$  cuando crece el empleo (o se encarece la fuerza de trabajo), con base en Eagly (1972) e incluso tomando como inspiración las intuiciones de Tronti (2019) sobre la adaptación capitalista al poder obrero. Igualmente, puede agregarse una ecuación que describa la definición de los precios en condiciones de poder de mercado en proximidad a Kalecki (1971) o similares, incluso añadiendo microfundamentos al estilo de Goldstein (1985). Asimismo, podría incluirse la variable de intensidad en el modelo de lucha de clases con juegos dinámicos de Mehrling (1986) y que sintetiza a Goodwin (1967) y a Lancaster (1973).

Otra extensión puede considerar las restricciones de balanza de pagos propias de una economía abierta (Dávila-Fernández y Sordi, 2019), así como capacidad instalada ociosa, a la vez que los capitalistas definen la tasa de acumulación con una función de inversión que recoja sus expectativas sobre rentabilidad y demanda (Mariolis et al., 2021: cap. 11), o aprovechar los intentos de vincular el modelo de Goodwin con intuiciones sobre la inestabilidad financiera de Minsky (Stockhammer y Michell, 2017). También puede pensarse en incluir la intensidad laboral en un modelo sectorial y de redes (Cajas Guijarro, 2022), así como en estudiar las posibles diferencias en las intensidades laborales vigentes entre naciones centrales y periféricas mediante modelos Norte-Sur (Dutt, 1990), con base en varias particularidades, sobre todo en el Sur (por ejemplo, elevada dependencia en la explotación de recursos naturales capaz de distorsionar la estructura económica interna y la dinámica del empleo). De hecho, varias de las extensiones del modelo de Goodwin (1967) podrían aplicarse al modelo presentado en este texto.

Finalmente, en términos más analíticos, cabría pensar con mayor detalle los casos donde el modelo no llega al equilibrio, sino que toma trayectorias explosivas; se pueden incluir, por ejemplo, dinámicas de inflación y hasta de hiperinflación (Cajas Guijarro, 2018b), o incluso el modelo podría ampliarse a fin de representar crisis más complejas desde un enfoque de teoría del caos, similar a como lo plantea el propio Goodwin (1990). Así, aún quedan varias facetas de la complejidad capitalista por estudiarse, en especial aquellas donde

las asimetrías de poder entre clases sociales generan diferentes formas de crisis económicas y no económicas.

APÉNDICE 1. PRUEBA DE ESTABILIDAD  
DEL SISTEMA DINÁMICO

Con base en Dávila-Fernández y Sordi (2019), a fin de analizar la estabilidad local de los sistemas (21), (22) y (23) alrededor del punto  $(l^*, \varpi^*, e^*)$ , obtenemos su aproximación lineal alrededor de este punto:

$$\begin{pmatrix} l' \\ \omega' \\ e' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}}_{J^*} \begin{pmatrix} (l-l^*) \\ (\omega-\omega^*) \\ (e-e^*) \end{pmatrix} \quad (1A)$$

Donde los elementos  $J_{ij}$  de la matriz jacobiana  $J^*$  evaluados en  $(l^*, \varpi^*, e^*)$  son:

$$J_{11} = \frac{\partial l'}{\partial l} \Big|_{(l^*, \omega^*, e^*)} = 0 \quad (2A)$$

$$J_{12} = \frac{\partial l'}{\partial \omega} \Big|_{(l^*, \omega^*, e^*)} = \frac{hs\alpha_{\omega 0} (m\alpha_{e3}\alpha_{\omega 1} - \alpha_{e1}\alpha_{\omega 0})}{\alpha_{e2}\alpha_{\omega 1}^2} \quad (3A)$$

$$J_{13} = \frac{\partial l'}{\partial e} \Big|_{(l^*, \omega, e^*)} = \frac{n\alpha_{e2}\alpha_{\omega 0}}{m\alpha_{e3}\alpha_{\omega 1} - \alpha_{e1}\alpha_{\omega 0}} \quad (4A)$$

$$J_{21} = \frac{\partial \omega'}{\partial l} \Big|_{(l^*, \omega, e^*)} = [\alpha_{e1} + (1 - \alpha_{e4})\alpha_{\omega 1}] \left[ 1 - \frac{n\alpha_{e2}\alpha_{\omega 1}}{hs(m\alpha_{e3}\alpha_{\omega 1} - \alpha_{e1}\alpha_{\omega 0})} \right] \quad (5A)$$

$$J_{22} = \frac{\partial \omega'}{\partial \omega} \Big|_{(l^*, \omega, e^*)} = 0 \quad (6A)$$

$$J_{23} = \frac{\partial \omega'}{\partial e} \Big|_{(l^*, w, e^*)} = \alpha_{e2} \left[ 1 - \frac{n\alpha_{e2}\alpha_{w1}}{hs(m\alpha_{e3}\alpha_{w1} - \alpha_{e1}\alpha_{w0})} \right] \tag{7A}$$

$$J_{31} = \frac{\partial e'}{\partial l} \Big|_{(l^*, w, e^*)} = \frac{(\alpha_{e4}\alpha_{w1} - \alpha_{e1})(m\alpha_{e3}\alpha_{w1} - \alpha_{e1}\alpha_{w0})}{\alpha_{e2}\alpha_{w1}} \tag{8A}$$

$$J_{32} = \frac{\partial e'}{\partial w} \Big|_{(l^*, w, e^*)} = 0 \tag{9A}$$

$$J_{33} = \frac{\partial e'}{\partial e} \Big|_{(l^*, w^*, e^*)} = - \frac{m\alpha_{e3}\alpha_{w1} - \alpha_{e1}\alpha_{w0}}{\alpha_{w1}} \tag{10A}$$

La ecuación característica de  $J^*$  es:

$$\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0 \tag{11A}$$

Donde  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$  dependen de la traza  $T$ , el determinante  $\Delta$  y de los menores de  $J^*$ :

$$b_1 = -T = \frac{m\alpha_{e3}\alpha_{w1} - \alpha_{e1}\alpha_{w0}}{\alpha_{w1}} \tag{12A}$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} J_{22} & J_{23} \\ J_{32} & J_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{13} \\ J_{31} & J_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} \tag{13A}$$

$$b_2 = \frac{sh\alpha_{w0}[\alpha_{e1} - \alpha_{w1}(\alpha_{e4} - 1)](m\alpha_{e3}\alpha_{w1} - \alpha_{e1}\alpha_{w0}) - n\alpha_{w0}}{\alpha_{e2}\alpha_{w1}^2} \tag{14A}$$

$$b_3 = -\Delta = \frac{\alpha_{w0}(m\alpha_{e3}\alpha_{w1} - \alpha_{e1}\alpha_{w0})[sh(m\alpha_{e3}\alpha_{w1} - \alpha_{e1}\alpha_{w0}) - n\alpha_{e2}\alpha_{w1}]}{\alpha_{e2}\alpha_{w1}^2} \tag{15A}$$

Con estos resultados se tiene que:

$$b_1 b_2 - b_3 = \frac{sha_{w_0} (\alpha_{e_1} - \alpha_{w_1} \alpha_{e_4}) (m \alpha_{e_3} \alpha_{w_1} - \alpha_{e_1} \alpha_{w_0})^2}{\alpha_{e_2} \alpha_{w_1}^3} \quad (16A)$$

La condición necesaria y suficiente para que el sistema muestre estabilidad local alrededor de  $(l^*, w^*, e^*)$  consiste en que todas las raíces  $\lambda$  de la ecuación característica tengan componentes reales negativos. Por las condiciones de Routh-Hurwitz, se sabe que este caso sucede si  $b_1 > 0$ ,  $b_2 > 0$ ,  $b_3 > 0$  y  $b_1 b_2 - b_3 > 0$ . Estas desigualdades pueden garantizarse cuando se cumplen los siguientes puntos: *a*)  $n$  es pequeño, *b*) la mecanización cumple con:

$$m > m^E = \alpha_{e_1} \alpha_{w_0} / \alpha_{e_3} \alpha_{w_1} \quad (17A)$$

*c*) el poder de los trabajadores para presionar el aumento salarial se ubica por debajo del siguiente umbral:

$$\alpha_{w_1} < \alpha_{w_1}^{HB} = \alpha_{e_1} / \alpha_{e_4} \quad (18A)$$

## APÉNDICE 2. PRUEBA DE LA EXISTENCIA DE UNA BIFURCACIÓN DE HOPF

Con base en Dávila-Fernández y Sordi (2019) y Gandolfo (2009), puede emplearse el teorema de bifurcación de Hopf para sistemas en tres dimensiones con el término  $\alpha_{w_1}$  como parámetro de bifurcación y probarse que el sistema (21), (22) y (23) posee una familia de soluciones periódicas con la forma de ciclos límite alrededor de  $(l^*, w^*, e^*)$ . La prueba requiere dos condiciones: (HB1) la ecuación característica de  $J^*$  tiene un par de valores propios puramente imaginarios y un valor propio con componente real no nulo en el punto crítico  $\alpha_{w_1}^{HB}$ ; (HB2) la derivada del componente real de los valores propios complejos de la ecuación característica respecto de  $\alpha_{w_1}$  no es nula al evaluarse en  $\alpha_{w_1}^{HB}$ .

La condición (HB1) requiere que simultáneamente se cumpla con  $b_1 > 0$ ,  $b_2 > 0$ ,  $b_3 > 0$  y  $b_1 b_2 - b_3 = 0$ . Según los resultados del apéndice 1, estas condiciones se garantizan cuando: *a*)  $n$  es pequeño; *b*) la mecanización cumple con  $m > m^E$ ; *c*) se cumple con  $\alpha_{w_1} = \alpha_{w_1}^{HB}$ .

En cambio, para evaluar (HB2) pueden obtenerse las derivadas parciales de  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$  respecto a  $\alpha_{w1}$ :

$$\partial b_1 / \partial \alpha_{w1} = \alpha_{e1} \alpha_{w0} / \alpha_{w1}^2 \quad (19A)$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial \alpha_{w1}} = \frac{sh \alpha_{e1} \alpha_{w0} \{2 \alpha_{e1} \alpha_{w0} - \alpha_{w1} [m \alpha_{e3} + \alpha_{w0} (\alpha_{e4} - 1)]\}}{\alpha_{e2} \alpha_{w1}^3} \quad (20A)$$

$$\frac{\partial b_3}{\partial \alpha_{w1}} = \frac{\alpha_{e1} \alpha_{w0} [2sh(m \alpha_{e3} \alpha_{w1} - \alpha_{e1} \alpha_{w0}) - n \alpha_{e2} \alpha_{w1}]}{\alpha_{e2} \alpha_{w1}^3} \quad (21A)$$

Cuando  $\alpha_{w1} = \alpha^{HB}_{w1}$ , por (HB1) sabemos que la ecuación característica tiene una raíz negativa  $\lambda_1 < 0$  y dos raíces  $\lambda_{2,3} = A \pm Bi$  con  $A = 0$ . Para este caso puede probarse —véase Dávila-Fernández et al. (2019: A.3) para una deducción matemática— que:

$$\frac{\partial b_1}{\partial \alpha_{w1}} = -\frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha_{w1}} - 2 \frac{\partial A}{\partial \alpha_{w1}} \quad (22A)$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial \alpha_{w1}} = 2 \lambda_1 \frac{\partial A}{\partial \alpha_{w1}} + 2B \frac{\partial B}{\partial \alpha_{w1}} \quad (23A)$$

$$\frac{\partial b_3}{\partial \alpha_{w1}} = -B^2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha_{w1}} - 2 \lambda_1 B \frac{\partial B}{\partial \alpha_{w1}} \quad (24A)$$

Al hacer los respectivos remplazos, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-X - 2Y = \alpha_{e1} \alpha_{w0} / \alpha_{w1}^2 \quad (25A)$$

$$2 \lambda_1 Y + 2BZ = \frac{sh \alpha_{e1} \alpha_{w0} \{2 \alpha_{e1} \alpha_{w0} - \alpha_{w1} [m \alpha_{e3} + \alpha_{w0} (\alpha_{e4} - 1)]\}}{\alpha_{e2} \alpha_{w1}^3} \quad (26A)$$

$$-B^2 X - 2 \lambda_1 BZ = \frac{\alpha_{e1} \alpha_{w0}^2 [2sh(m \alpha_{e3} \alpha_{w1} - \alpha_{e1} \alpha_{w0}) - n \alpha_{e2} \alpha_{w1}]}{\alpha_{e2} \alpha_{w1}^3} \quad (27A)$$

donde  $X = \partial \lambda_1 / \partial \alpha_{w1}$ ,  $Y = \partial A / \partial \alpha_{w1}$  y  $Z = \partial B / \partial \alpha_{w1}$ . Cuando se evalúa la solución de este sistema en  $\alpha^{HB}_{w1}$ , se obtiene la siguiente derivada:

$$\left. \frac{\partial A}{\partial \alpha_{w1}} \right|_{\alpha_{w1} = \alpha_{w1}^{HB}} = \frac{\alpha_{e4}^2 \alpha_{w0} \{ B^2 \alpha_{e2} + n \alpha_{e2} \alpha_{w0} - sb [ m \alpha_{e3} (2 \alpha_{w0} - \lambda_1) + \alpha_{w0} (-2 \alpha_{e4} \alpha_{w0} + \lambda_1 + \alpha_{e4} \lambda_1) ] \}}{2 \alpha_{e1} \alpha_{e2} (B^2 + \lambda_1^2)} \quad (28A)$$

Ésta es nula si, por ejemplo, la mecanización toma el siguiente valor:

$$m^{null} = \frac{B^2 \alpha_{e2} + n \alpha_{e2} \alpha_{w0} + sb \alpha_{w0} [ 2 \alpha_{e4} \alpha_{w0} - \lambda_1 (1 + \alpha_{e4}) ]}{sb \alpha_{e3} (2 \alpha_{w0} - \lambda_1)} \quad (29A)$$

Como en el apéndice 1 se mostró que la única condición que debe cumplir la mecanización para garantizar estabilidad es  $m > m^E$ , entonces puede garantizarse que  $\left. \frac{\partial A}{\partial \alpha_{w1}} \right|_{\alpha_{w1} = \alpha_{w1}^{HB}} \neq 0$  cuando  $m > m^{null}$ . Es decir, si la mecanización es lo suficientemente alta, entonces se confirma la existencia de ciclos límite para el sistema (21), (22) y (23) en el vecindario de  $\alpha_{w1}^{HB}$ .

#### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Azevedo Araujo, R., Dávila-Fernández, M., y Nunes Moreira, H. (2019). Some new insights on the empirics of Goodwin's growth-cycle model. *Structural Change and Economic Dynamics*, 51, 42-54. Recuperado de: <https://doi.org/10.1016/j.strueco.2019.07.007>
- Barrales-Ruiz, J., Mendieta-Muñoz, I., Rada, C., Tavani, D., y Arnim, R. von (2022). The distributive cycle: Evidence and current debates. *Journal of Economic Surveys*, 36(2), 468-503. Recuperado de: <https://doi.org/10.1111/joes.12432>
- Bhaduri, A., y Marglin, S. (1990). Unemployment and the real wage: The economic basis for contesting political ideologies. *Cambridge Journal of Economics*, 14(4), 375-393.
- Bowles, S., y Gintis, H. (1990). Contested exchange: New microfoundations for the political economy of capitalism. *Politics & Society*, 18(2), 165-222.
- Bujarin, N. (1972). *Teoría económica del período de transición*. Córdoba: Cuadernos de Pasado y Presente.
- Cajas Guijarro, J. (2018a). La ley general de la acumulación capitalista: una reinterpretación. *Revista Economía*, 70(111), 47-67. Recuperado de: <https://doi.org/10.29166/economia.v70i111.1389>
- Cajas Guijarro, J. (2018b). Reinterpretando a Marx: la ley general de la

- acumulación capitalista. SSRN. Recuperado de: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3139294>
- Cajas Guijarro, J. (2022). Revisitando la reproducción capitalista: equilibrio, redes y competencia intersectorial. *Problemas del Desarrollo*, 53(208), 151-183. Recuperado de: <https://doi.org/10.22201/iiec.20078951e.2022.208.69729>
- Cajas Guijarro, J., y Vera, L. (2022). The macrodynamics of an endogenous business cycle model of Marxist inspiration. *Structural Change and Economic Dynamics*, 62, 566-585. Recuperado de: <https://doi.org/10.1016/j.strueco.2022.08.002>
- Cámara Izquierdo, S. (2022). The general law of capitalist accumulation and a theory of labour-shortage business cycles. En L. Fusaro y L. Alcalá (eds.), *The General Law of Capitalist Accumulation in Latin America and Beyond: Actuality and Pertinence* (pp. 55-75). Londres: Lexington Books.
- Campbell, T., y Tavani, D. (2019). Marx-biased technical change and income distribution: A panel data analysis. *Metroeconomica*, 70(4), 655-687.
- Dávila-Fernández, M., y Sordi, S. (2019). Distributive cycles and endogenous technical change in a BoPC growth model. *Economic Modelling*, 77, 216-233. Recuperado de: <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2018.09.002>
- Day, R. (1976). The theory of the long cycle: Kondratiev, Trotsky, Mandel. *New Left Review*, 99, 67-82.
- Dupont, B. (2014). Les cycles d'accumulation du capital dans la théorie marxiste. *Cahiers d'économie Politique*, 1(66), 173-198. Recuperado de: <https://doi.org/10.3917/cep.066.0173>
- Dutt, A. K. (1990). *Growth, Distribution and Uneven Development*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Eagly, R. (1972). A macro model of the endogenous business cycle in Marxist analysis. *Journal of Political Economy*, 80(3-1), 523-539.
- Falkinger, J., y Laski, K. (1983). Marx's theory of exploitation and technical progress. *Metroeconomica*, 35(1-2), 159-176. Recuperado de: <https://doi.org/10.1111/j.1467-999X.1983.tb00892.x>
- Fratini, S. (2019). On the second stage of the Cambridge capital controversy. *Journal of Economic Surveys*, 33(4), 1073-1093. Recuperado de: <https://doi.org/10.1111/joes.12312>
- Gandolfo, G. (2009). *Economic Dynamics*. Berlín: Springer.
- Glombowski, J. (1982). A comment on Sherman's Marxist cycle model.

- Review of Radical Political Economics*, 14(1), 42-49. Recuperado de: <https://doi.org/10.1177/0486661348201400106>
- Glombowski, J. (1983). A Marxian model of long run capitalist development. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 43(4), 363-382. Recuperado de: <https://doi.org/10.1007/BF01283186>
- Goldstein, J. (1985). The cyclical profit squeeze: A Marxian microfoundation. *Review of Radical Political Economics*, 17(1-2), 103-128. Recuperado de: <https://doi.org/10.1177/0486661348501700106>
- Goodwin, R. (1967). A growth cycle. En C. H. Feinstein (ed.), *Socialism, Capitalism and Economic Growth* (pp. 54-58). Cambridge: Cambridge University Press.
- Goodwin, R. (1983). A note on wage, profits and fluctuating growth rates. *Cambridge Journal of Economics*, 7(3-4), 305-309.
- Goodwin, R. (1987). The economy as an evolutionary pulsator. En T. Vasko (ed.), *The Long-Wave Debate* (pp. 27-34). Berlín: Springer.
- Goodwin, R. (1990). *Chaotic Economic Dynamics*. Oxford: Clarendon Press.
- Grasselli, M., y Maheshwari, A. (2018). Testing a Goodwin model with general capital accumulation rate. *Metroeconomica*, 69(3), 619-643. Recuperado de: <https://doi.org/10.1111/meca.12204>
- Harcourt, G. (2022). *Some Cambridge Controversies in the Theory of Capital*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Harris, D. (1983). Accumulation of capital and the rate of profit in Marxian theory. *Cambridge Journal of Economics*, 7(3/4), 311-330. Recuperado de: <https://doi.org/10.1093/cje/7.3-4.311>
- Kalecki, M. (1971). *Selected Essays on the Dynamics of the Capitalist Economy 1933-1970*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Laibman, D. (1978). The Marxian profit cycle: A macromodel. *Eastern Economic Journal*, 4(2), 119-128.
- Laibman, D. (1981). Two-sector growth with endogenous technical change: A Marxian simulation model. *The Quarterly Journal of Economics*, 96(1), 47-75. Recuperado de: <https://doi.org/10.2307/2936140>
- Laibman, D. (1992). *Value, Technical Change, and Crisis: Explorations in Marxist Economic Theory*. Armonk, Nueva York: M. E. Sharpe, Inc.
- Laibman, D. (1997). *Capitalist Macrodynamics: A Systematic Introduction*. Londres: Palgrave.

- Lancaster, K. (1973). The dynamic inefficiency of capitalism. *Journal of Political Economy*, 81(5), 1092-1109.
- Lotka, A. J. (1910). Contribution to the theory of periodic reactions. *The Journal of Physical Chemistry*, 14(3), 271-274. Recuperado de: <https://doi.org/10.1021/j150111a004>
- Mandel, E. (1975). *Late Capitalism*. Londres: New Left Books.
- Mariolis, T., Rodousakis, N., y Soklis, G. (2021). *Spectral Theory of Value and Actual Economies*. Singapur: Springer.
- Marx, K. (1976). *Salario, precio y ganancia*. Archivo Marx-Engels. Recuperado de: <https://www.marxists.org/espanol/m-e/1860s/65-salar.htm>
- Marx, K. (2009a). *El capital. Crítica de la economía política. Libro primero. El proceso de producción del capital*. México: Siglo XXI Editores.
- Marx, K. (2009b). *El capital. Crítica de la economía política. Libro segundo. El proceso de circulación del capital*. México: Siglo XXI Editores.
- Marx, K. (2010). *Economic Manuscripts of 1861-63*. En *Marx-Engels collected works* (vol. 32). Nueva York: International Publishers.
- Mavroudeas, S., e Ioannides, A. (2011). Duration, intensity and productivity of labour and the distinction between absolute and relative surplus-value. *Review of Political Economy*, 23(3), 421-437. Recuperado de: <https://doi.org/10.1080/09538259.2011.583833>
- Mehrling, P. (1986). A classical model of the class struggle: A game-theoretic approach. *Journal of Political Economy*, 94(6), 1280-1303. Recuperado de: <https://doi.org/10.1086/261433>
- Morishima, M. (1973). *Marx's Economics. A Dual Theory of Value and Growth*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Muthoo, A. (1999). *Bargaining Theory with Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Nikolaos, C., Persefoni, T., y Tsoulfidis, L. (2022). A model of economic growth and long cycles. *Review of Radical Political Economics*, 54(3), 351-382. Recuperado de: <http://dx.doi.org/10.1177/04866134221096763>
- Orlando, G., y Sportelli, M. (2021). On business cycles and growth. En G. Orlando, A. Pisarchik y A. Stoop (eds.), *Nonlinearities in Economics* (pp. 153-168). Cham: Springer.
- Ozanne, A. (2016). *Power and Neoclassical Economics*. Londres: Palgrave.
- Palermo, G. (2007). The ontology of economic power in capitalism: Mainstream economics and Marx. *Cambridge Journal of Economics*, 31(4), 539-561. Recuperado de: <https://doi.org/10.1093/cje/bel036>

- Ploeg, F. van der (1983). Predator-prey and Neo-classical models of cyclical growth. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 43(3), 235-256.
- Ricardo, D. (1973). *Principios de economía política y tributaria*. Madrid: Ayuso.
- Rosenberg, N., y Frischtak, C. (1984). Technical innovation and long waves. *Cambridge Journal of Economics*, 8(1), 7-24. Recuperado de: <https://www.doi.org/10.1017/S0020818300035256>
- Sato, Y. (1985). Marx-Goodwin growth cycles in a two-sector economy. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 45(1), 21-34. Recuperado de: <https://doi.org/10.1007/BF01283152>
- Shaikh, A. (1978). An introduction to the history of crisis theories. En *U. S. Capitalism in Crisis* (pp. 219-241). Nueva York: Union for Radical Political Economics.
- Shapiro, C., y Stiglitz, J. (1984). Equilibrium unemployment as a worker discipline device. *The American Economic Review*, 74(3), 433-444.
- Sherman, H. (1971). Marxist models of cyclical growth. *History of Political Economy*, 3(1), 28-55. Recuperado de: <https://doi.org/10.1215/00182702-3-1-28>
- Sherman, H. (1979). A Marxist theory of the business cycle. *Review of Radical Political Economics*, 11(1), 1-23. Recuperado de: <https://doi.org/10.1177/048661347901100101>
- Sherman, H. (1991). *The Business Cycle: Growth and Crisis under Capitalism*. Princeton: Princeton University Press.
- Solow, R. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 70(1), 65-94. Recuperado de: <https://doi.org/10.2307/1884513>
- Solow, R. (1990). Goodwin's growth cycle: Reminiscence and rumination. En K. Velupillai (ed.), *Nonlinear and Multisectoral Macrodynamics: Essays in Honour of Richard Goodwin* (pp. 31-41). Londres: Palgrave.
- Stockhammer, E., y Michell, J. (2017). Pseudo-Goodwin cycles in a Minsky model. *Cambridge Journal of Economics*, 41(1), 105-125. Recuperado de: <https://doi.org/10.1093/cje/bew008>
- Tronti, M. (2019). *Workers and Capital*. Londres: Verso.
- Volterra, V. (1927). *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*. Roma: Accademia Nazionale dei Lincei. Recuperado de: <https://bit.ly/3gihuZo>