Educação & Realidade
ISSN: 0100-3143
ISSN: 2175-6236
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Faculdade de Educação

Montenegro, Juliana Azevedo; Borba, Rute Elizabete de Souza Rosa; Bittar, Marilena
Representações Intermediárias na Aprendizagem de Situações Combinatórias
Educação & Realidade, vol. 45, núm. 1, e87693, 2020
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Faculdade de Educação

DOI: https://doi.org/10.1590/2175-623687693

OUTROS TEMAS

Representações Intermediárias na Aprendizagem de Situações Combinatórias

Juliana Azevedo Montenegro[I]
Rute Elizabete de Souza Rosa Borba[I]
Marilena Bittar[II]

[I]Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife/PE – Brasil
[II]Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande/MS – Brasil

RESUMO – Representações Intermediárias na Aprendizagem de Situações Combinatórias. No artigo analisa-se identificação, conversão e tratamento de registros em situações combinatórias. Foram realizados dois estudos: 1) de identificação de conversões e 2) com representações intermediárias entre registros em língua natural e em expressão numérica. Confirmaram-se hipóteses de maiores dificuldades na situação de combinação e na conversão para expressão numérica. Indicou-se representações intermediárias (árvore de possibilidades ou listagem sistematizada) para o ensino da Combinatória, entretanto, trabalhar com árvores resultou em melhores desempenhos – por terem mais congruência com expressões numéricas. Recomenda-se, assim, a intermediação de representações na identificação, conversão e tratamento de situações combinatórias.
Palavras-chave: **Identificação. Conversão. Tratamento. Situações combinatórias. Representações intermediárias.**

ABSTRACT – Intermediate Representations in the Learning of Combinatorial Situations. The article analyses identification, conversion and treatment of registers in combinatorial situations. Two studies were carried out: 1) identification of conversions and 2) with intermediate representations between registers in natural language and in numerical expression. Hypotheses of greater difficulties in the combination situation and in the conversion to numerical expression were confirmed. Intermediate representations (tree of possibilities or systematized listing) for the teaching of Combinatorics were indicated, however, working with trees resulted in better performance – because they have more congruence with numerical expressions. It is recommended, therefore, the intermediation of representations in the identification, conversion and treatment of combinatorial situations.
Keywords: **Identification. Conversion. Treatment. Combinatorial Situations. Intermediate representations.**

http://dx.doi.org/10.1590/2175-623687693

Introdução

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1997), a Matemática possibilita despertar no aluno a curiosidade na aprendizagem, e instiga a capacidade de generalização. A Combinatória, conteúdo específico dessa área de conhecimento, que se caracteriza como um tipo de contagem baseada em raciocínio multiplicativo, pode promover essas habilidades elencadas por esse documento, pois, como afirmam Batanero, Navarro-Pelayo e Godino, os problemas combinatórios podem ser usados para estimular "[...] os alunos na contagem, fazendo conjecturas, generalização e pensamento sistemático [...]" (Batanero; Navarro-Pelayo; Godino, 1997, p. 181).

Vergnaud (1986), autor da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), considera a Combinatória parte do campo conceitual das estruturas multiplicativas e identifica problemas dessa natureza como produtos de medidas. Estes problemas, segundo Vergnaud, envolvem uma relação ternária, ou seja, entre três variáveis, das quais uma quantidade é o produto das outras duas. Pessoa e Borba (2010) articulam esses problemas – também denominados de produtos cartesianos – a outros (arranjos, combinações e permutações) em uma classificação única de situações combinatórias e destacam que na resolução dessas situações há uma grande variedade de representações utilizadas pelos alunos, como: desenhos, listagens, árvores de possibilidades, quadros, diagramas, uso de fórmulas e Princípio Fundamental da Contagem[1], entre outras.

Vergnaud (1996, p. 191) destaca que no processo de conceitualização as representações simbólicas são tão importantes quanto as situações e seus invariantes operatórios, uma vez que, para ele, a linguagem e os símbolos matemáticos desempenham um papel relevante na conceitualização, pois, sem eles, "[...] os esquemas e as situações, permanecem vazios de sentido".

Ainda sobre as representações, Duval, em sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), afirma que "Não é possível estudar fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação. [...]" (Duval, 2009, p. 29), pois todo conhecimento deve ser mobilizado por meio de uma representação. Este autor destaca, portanto, que as representações são indispensáveis para a compreensão de um conceito. Entretanto, as representações não podem ser confundidas com o próprio conceito. Nesse caso, ele chama a atenção para um paradoxo que faz surgir a necessidade de trabalhar com muitas representações de um mesmo conceito, e, assim, ter *acesso* ao próprio conceito e não apenas à sua representação (Duval, 2011).

Além disso, o autor enfatiza que as representações podem ser mais, ou menos, congruentes entre si, dependendo do grau de dificuldade na conversão entre essas representações, e, com isso, surge a necessidade de registros de representação auxiliares de transição. Tais registros são caracterizados dessa forma, pois, na medida em que os estudantes compreendem registros mais rápidos e formais, eles abandonam esses registros auxiliares (Duval, 2011).

As duas teorias aqui discutidas detalham processos de identificação, conversão e tratamento por meio de representações intermediárias (TRRS) e ressaltam como situações e invariantes das mesmas também devem ser levados em consideração, além das representações (TCC) nos processos de conceitualização. Desse modo, é preciso analisar os processos de identificação, conversão e tratamento para cada situação combinatória, de acordo com seus invariantes.

Neste sentido, o presente estudo visa discutir o uso de diferentes registros de representação – tais como, linguagem natural, listagens, árvores de possibilidades, e expressões numéricas, como as de aplicação do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) – na ampliação do conhecimento de distintas situações combinatórias: produtos cartesianos, arranjos, combinações e permutações. Na investigação realizada, a linguagem natural era o registro de partida; árvores e listagens foram trabalhadas enquanto registros intermediários; e as expressões numéricas eram o registro de chegada.

O Uso de Diferentes Representações no Ensino e no Aprendizado das Situações e Relações Matemáticas

O ensino e a aprendizagem da Matemática pressupõem, segundo Vergnaud (1986), o domínio das situações durante um longo período de tempo, que leve em consideração os invariantes relacionais e operatórios, bem como sua ligação com as representações simbólicas. Duval (2009) também indica que para o desenvolvimento do funcionamento cognitivo do pensamento, a diversidade das representações semióticas é primordial.

A Combinatória, como um ramo da Matemática, consiste no estudo da contagem de elementos de um conjunto, em que podem ser utilizados diferentes tipos de representações, desde as mais intuitivas, como listagens e desenhos, passando por tabelas, quadros, árvores de possibilidades, até chegar nas representações formais da Matemática – como a generalização[2] de possibilidades por meio de uma multiplicação, o Princípio Fundamental da Contagem e fórmulas, como destacado anteriormente.

Colombo, Flores e Moretti (2007, p. 183) destacam que a ideia de aquisição conceitual de Vergnaud (1986) assume que "[...] um conceito só pode ser definido ao se considerarem mutuamente três conjuntos que formariam um tripé: situações, invariantes e representações". Desse modo, Vergnaud defende que, para a formação de conceitos novos se faz necessário considerar as três dimensões simultaneamente, de modo que sejam consideradas as situações que dão significado ao conceito, seus invariantes relacionais e em-ação que suscitam o uso de diferentes representações simbólicas.

Gitirana, Campos, Magina e Spinillo (2014, p. 10) destacam que são as situações "[...] que tornam o conceito significativo", sendo os invariantes "[...] objetos, propriedades e relações que podem ser reconhecidos pelo sujeito para analisar e dominar as situações" e as representações simbólicas aquelas que podem ser usadas para representar os invariantes e as situações.

Na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, Duval afirma que a apreensão conceitual acontece quando o sujeito mobiliza os diferentes registros de um mesmo objeto matemático de maneira que possa diferenciar o representante e o representado (Colombo; Flores; Moretti, 2007). Desse modo, é por meio das representações semióticas que Duval acredita ser possível uma apreensão conceitual, pois, para ele "[...] não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguirmos um objeto de sua representação" (Duval, 2009, p. 14).

Duval (2012) identifica um registro de representação semiótica como um sistema dotado de regras. Um sistema semiótico caracteriza um registro de representação semiótica quando satisfaz três condições: 1) Identificação – quando o indivíduo é capaz de identificar o conceito representado; 2) Transformação de Tratamento – interna ao próprio registro; e 3) Transformação de Conversão – passagem de um registro para outro registro.

Além disso, Duval (2009) ressalta que as conversões realizadas podem gerar uma diferença na compreensão do conhecimento em questão, em função do nível de congruência entre os registros. Este autor afirma que "Toda tarefa na qual a conversão não é congruente dá lugar a uma taxa mais ou menos fraca de sucesso conforme o grau de não-congruência" (Duval, 2009, p.19). O nível de congruência se dá quando uma situação leva em consideração três critérios fundamentais: o primeiro relativo à correspondência semântica – a cada unidade significante simples de uma das representações pode-se associar uma unidade significante elementar, o segundo relacionado com a presença de univocidade semântica terminal – a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde uma só unidade significante elementar no registro de representação de chegada, e, por fim, o terceiro, que concerne à ordenação das unidades significantes que compõem cada uma das representações – unidades em correspondência semântica segundo a mesma ordem nas duas representações.

Duval (2011) também enfatiza a importância das representações intermediárias. Ele destaca que elas são usadas principalmente em situações cuja conversão do enunciado em língua materna para a resolução em expressão numérica não apresenta congruência, ou seja, quanto mais não-congruente é a conversão, maior a necessidade de uma representação intermediária. Isso porque, nesse tipo de situação, a expressão numérica não é clara o suficiente para que os estudantes façam seu uso, sem que haja uma intervenção específica. Assim, após instrução, os alunos, gradativamente, passam a usar uma representação matemática que lhes parece menos lenta e custosa, fazendo dessa representação auxiliar, uma representação de transição.

As situações combinatórias, se caracterizam pela não-congruência na conversão entre os registros em língua natural do enunciado e o registro matemático formal da sua resolução, uma vez que não apresentam correspondência nem univocidade semântica terminal. Isso porque os números que aparecem nos enunciados de problemas combinatórios nem sempre são usados diretamente nas expressões numéricas que podem ser usadas para resolvê-los. Nesse sentido, um registro intermediário que tenha aproximação com o registro de partida e o de chegada, pode auxiliar na articulação entre enunciados e expressões numéricas de problemas combinatórios.

A presente pesquisa ressalta as contribuições da TCC, chamando atenção sobre as três dimensões necessárias para a formação de um conceito (situações, invariantes e representações), bem como da TRRS, referente ao papel fundamental da identificação, conversão e tratamento de representações na conceitualização.

A Combinatória na Educação Básica

A Análise Combinatória[3] é uma área da Matemática relacionada com a contagem de quantidades discretas. Morgado, Pitombeira de Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991) destacam que uma das primeiras atividades das crianças nas escolas está relacionada com quantidades de objetos em um determinado conjunto, enumerando-as. Durante os anos seguintes da escolarização básica são trabalhados problemas com outro tipo de contagem, baseada no princípio multiplicativo.

Diferentes autores (Guirado; Cardoso, 2007; Pessoa; Borba, 2009; Azevedo; Borba, 2013) defendem que já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, se faz necessário que os professores trabalhem com seus alunos situações que exijam o raciocínio combinatório, de modo que se possa desenvolver formas de pensar sistemáticas e generalizadas na enumeração de elementos combinados entre si.

Segundo Borba (2010, p. 3) o raciocínio combinatório é entendido como um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se selecionar elementos dos mesmos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis. Dessa forma, o pensamento combinatório se caracteriza por um tipo de raciocínio que possibilita a enumeração, sistematização, generalização e abstração de uma situação que indica certas condições que precisam ser respeitadas para a sua resolução.

Pessoa e Borba (2009) ressaltam que o aprendizado da Combinatória deve ter início já nos primeiros anos de escolarização, por meio de diferentes situações combinatórias. As autoras argumentam que dessa forma novas aprendizagens poderão ser incentivadas nos diversos níveis de escolarização, bem como poderão ser superados os erros e as dificuldades apresentadas inicialmente, favorecendo, assim, o momento do aprendizado sistemático oferecido por ocasião do Ensino Médio.

Desse modo, apesar de a Combinatória ser mais fortemente trabalhada durante o Ensino Médio, por meio do uso de fórmulas, é imprescindível que suas relações e propriedades sejam discutidas desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. Nessa direção, Guirado e Cardoso (2007) destacam que, trabalhando os problemas combinatórios desde os anos iniciais, os alunos poderão ser conduzidos para a "[...] abstração e generalização, e o hábito de adivinhar a fórmula adequada para resolver um problema de combinatória será substituído por um trabalho de análise e síntese" (Guirado; Cardoso, 2007, p. 1). Assim, entende-se que, para que isso seja possível, é necessário que, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, seja dada oportunidade aos alunos de entrarem em contato com diferentes problemas combinatórios, de modo que utilizem diferentes formas de representar suas soluções combinatórias e que possam discuti-las com seus pares e professores, estabelecendo maior articulação com as relações presentes no raciocínio combinatório.

Pessoa e Borba (2009) organizam os problemas combinatórios numa classificação única que indica quatro situações diferentes nas relações e propriedades de cada problema: produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação. As autoras, com embasamento na Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1991), destacam que esses problemas são diferentes do ponto de vista do cálculo relacional, ou seja, do ponto de vista da compreensão da lógica do problema. Borba (2010) ressalta ainda que essas situações combinatórias se diferenciam conforme os critérios de escolha e ordenação, que se caracterizam como as relações e propriedades dessas situações. Assim, os problemas que envolvem a situação de produto cartesiano são aqueles que a escolha é realizada a partir de dois (ou mais) conjuntos dados em que, um elemento de cada conjunto é agrupado de modo que a ordem em que esses elementos são agrupados, não gera novas possibilidades. Nos problemas de combinação, a partir de um conjunto único, alguns elementos são escolhidos de modo que a sua ordenação não gera novas possibilidades. Nos problemas que envolvem a situação de arranjo a escolha também acontece a partir de um conjunto único dado no enunciado em que alguns elementos desse conjunto serão agrupados, porém, nesse tipo de problema deve-se levar em consideração a ordem desses elementos. Nos problemas de permutação deve-se levar em consideração na escolha dos elementos que todos eles serão utilizados apenas modificando a ordem em que eles serão agrupados.

Pessoa e Borba (2009) analisaram a compreensão de alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio sobre situações que envolvem o raciocínio combinatório com base na Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1991). Neste estudo, participaram 412 alunos de escolas públicas e particulares, distribuídos nos 11 anos de escolaridade pesquisados. Todos os alunos responderam um teste com oito situações combinatórias sendo duas de cada tipo de problema (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano). As autoras destacam que:

> [...] alunos dos anos iniciais aos dos anos finais do Ensino Básico são capazes de compreender problemas de racio-

> cínio combinatório e que seus desempenhos são influenciados pelo tipo de escola que frequentam, pelo período de escolarização, pelo tipo de problema combinatório que estão resolvendo (e implicitamente pelas propriedades e relações envolvidas em cada tipo de problema), pela forma de representação simbólica utilizada para a resolução das situações, bem como pela ordem de grandeza dos números envolvidos (Pessoa; Borba, 2009, p. 11).

Dessa forma, Pessoa e Borba (2009) observaram que um dos fatores que pode influenciar a resolução de problemas combinatórios são as representações simbólicas utilizadas. Verificou-se que muitos estudantes – mesmo os do Ensino Médio que já haviam sido instruídos formalmente em Análise Combinatória – preferiam representar as situações por meio de sistemas de registros mais transparentes, tais como listagens, nos quais as diferentes possibilidades ficavam visíveis, ao invés do uso de procedimentos nos quais os casos identificados, não estavam claramente à amostra – como quando se faz uso do Princípio Fundamental da Contagem ou de fórmulas.

Moro e Soares (2006), em estudo com crianças de 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, investigaram o desenvolvimento do raciocínio combinatório, em situações de produto cartesiano. As autoras destacam em seus resultados que há diferentes níveis de pensamento combinatório, desde a ausência de solução combinatória até um nível mais avançado, quando os estudantes indicam a resposta correta por meio do uso de tabelas, de diagramas ou de operações multiplicativas.

Duro e Becker (2015) realizaram um estudo por meio do método de entrevista clínica piagetiana com estudantes de Ensino Médio regular e da EJA. Neste estudo, envolvendo os quatro tipos de situações combinatórias, os autores afirmam que há uma progressão do pensamento combinatório desde quando os estudantes utilizam procedimentos aleatórios (nível I) até o uso de procedimentos sistemáticos de organização das possibilidades (nível III). A utilização da sistematização indica uma generalização multiplicativa, enquanto procedimentos aleatórios derivam em generalização aditiva, que não converge com o pensamento combinatório.

Fischbein, Pampu e Minzat (1970) observaram o efeito de instruções específicas sobre a capacidade de lidar com permutações e arranjos por meio do diagrama de árvore de possibilidades com alunos de 10, 12 e 14 anos. Os autores destacam que "[...] até mesmo os alunos de 10 anos aprenderam o uso do diagrama de árvore e os procedimentos adequados para permutações e arranjos" (Fischbein; Pampu; Minzat, 1970, p. 261). Fischbein (1975) argumentou que apenas o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático não seria suficiente para a resolução de problemas combinatórios, sendo necessário, portanto, uma instrução específica, por exemplo, com o uso de árvore de possibilidades, de modo que os estudantes consigam organizar e sistematizar as informações e generalizar as possibilidades.

Azevedo (2013) analisou, junto a alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, a influência da construção de árvores de possibilidades, com e sem o uso de um *software* educativo voltado para o ensino e aprendizagem da Combinatória. A autora destaca que ambos os grupos (com e sem o uso do *software*) desenvolveram significativamente seus raciocínios combinatórios após a intervenção, isso porque, por meio de um pós-teste imediato, aplicado logo após os processos de intervenção, foi possível perceber que os alunos melhoraram seus desempenhos na resolução de problemas combinatórios. Também foi possível analisar por meio de um pós-teste posterior, aplicado nove semanas após o pós-teste imediato, que os alunos permaneceram em desenvolvimento.

Azerêdo (2013) defende que as representações semióticas da operação de multiplicação constituem instrumentos de mediação pedagógica no processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo. No seu estudo, realizado com oito professoras que ensinavam nos 2º, 3º, 4º e 5º anos do Ensino Fundamental e seus respectivos alunos, foram abordadas diferentes situações multiplicativas, inclusive uma situação combinatória de produto cartesiano. Especificamente sobre essa situação combinatória, com uma ilustração de entradas e saídas, os alunos de anos iniciais pouco relacionaram a ilustração com a resolução do problema, o que, segundo as professoras entrevistadas, foi uma surpresa, visto que se esperava que os alunos utilizassem a ilustração como estratégia de conversão da linguagem natural para a resolução do problema.

Na pesquisa relatada nesse artigo há o intuito de verificar e corroborar com o trabalho envolvendo diferentes tipos de representação, como a árvore de possibilidades e a listagem, mas, incluindo também o trabalho com expressões numéricas, uma vez que se constitui uma importante estratégia para o ensino e a aprendizagem da Combinatória. Essa ideia converge com o pensamento das teorias apresentadas por Vergnaud (1986) e Duval (2009), pois serão utilizados registros intermediários (árvores e listagens) entre a língua natural e a expressão numérica e que se levará em conta identificação, conversão e tratamento das distintas situações combinatórias.

Método

Este estudo teve como objetivo geral analisar o papel que a identificação e as transformações de tratamento e de conversão de registros têm na ampliação do conhecimento de distintas situações combinatórias por parte de estudantes do Ensino Fundamental.

Para o alcance desse objetivo, foram realizados dois estudos: um de sondagem de conhecimentos e outro de intervenção. O estudo de sondagem teve como objetivo analisar a identificação de conversões por alunos de anos iniciais do Ensino Fundamental em diferentes situações combinatórias, de modo que era solicitada a identificação em duas conversões: de linguagem natural para árvore ou para listagem; e de árvore ou listagem para expressão numérica. O estudo de intervenção, amparado nos resultados do estudo de sondagem, teve como objetivo investigar o efeito de intervenções pedagógicas, que mobilizam identificações e transformações de registros, por meio de diferentes representações intermediárias, que podem ser mais ou menos congruentes com a expressão numérica, no desempenho de alunos do Ensino Fundamental em diferentes problemas combinatórios.

No primeiro estudo foi aplicado um teste com 16 alunos do 5º ano de uma escola particular do Recife. O teste era composto por oito problemas combinatórios, sendo dois de cada tipo de situação (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano). Em cada problema havia o enunciado escrito em língua natural, duas alternativas de resposta representadas em árvore ou listagem, em que apenas uma delas era verdadeira e, em seguida, quatro alternativas com expressões numéricas, em que também apenas uma delas era verdadeira. Assim, os alunos deveriam realizar a identificação de duas conversões: a primeira estava relacionada com a escolha da alternativa correta para a representação em árvore ou listagem e, a segunda, escolhendo a alternativa correta para a expressão numérica que respondia corretamente a situação. Os testes variavam de modo que em um tipo de teste as quatro primeiras situações eram apresentadas com a representação intermediária em árvore e as quatro últimas em listagem. No outro tipo, era alterada a ordem. Também havia variação de teste com relação à explicitação dos casos repetidos nos problemas de combinação, em que ora havia explicitação com os casos repetidos riscados, ora não havia explicitação.

Havia duas hipóteses com respeito a esse estudo: a primeira em que se acreditava que os problemas de combinação seriam os mais difíceis de identificar as conversões, já que é necessário desconsiderar casos repetidos e as expressões numéricas que representam a situação precisam levar as repetições em consideração, por meio da divisão. A segunda hipótese estava relacionada com uma maior dificuldade em identificar a segunda conversão solicitada (para expressão numérica), uma vez que as crianças podem não reconhecer facilmente a expressão numérica.

No segundo estudo, com base nos resultados do primeiro estudo, foi proposta uma intervenção com alunos de 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental, divididos em dois grupos. No primeiro grupo (G1), após responderem um pré-teste em que se perguntava quais eram todas as possibilidades de resposta e qual a conta poderia ser usada para responder cada um dos oito problemas, os estudantes refaziam as questões do pré-teste, utilizando a árvore de possibilidades como representação intermediária, ou seja, entre a representação de partida (enunciado em língua natural) e a representação de chegada (expressão numérica). No segundo grupo (G2), a intervenção acontecia da mesma forma, sendo que a representação intermediária utilizada era a listagem sistematizada. Na primeira sessão de intervenção foram trabalhados os quatro primeiros problemas do pré-teste. Na segunda sessão, foram trabalhados os quatro últimos problemas. Nas intervenções, as situações de combinação eram trabalhadas explicitando todos os casos, para depois riscar os casos repetidos, uma vez que os resultados do primeiro estudo indicaram essa necessidade.

Após as sessões de intervenção, os alunos resolveram um pós-teste também com oito problemas combinatórios. Diferente do pré-teste, em que todas as questões não ultrapassavam 24 possibilidades como resposta, no pós-teste somente os quatro primeiros problemas tinha um número baixo de possibilidades. Já os quatro últimos problemas resultavam entre 56 e 120 possibilidades, de modo que para responder essas situações, a expressão numérica era a opção mais viável.

Acreditava-se que ambos os grupos teriam avanços em seus desempenhos, mas, que o grupo que teve intervenção utilizando a árvore de possibilidades apresentaria maior facilidade em indicar uma multiplicação correspondente à resolução do problema combinatório. Isso, porque esta representação parece indicar com maior clareza a relação de um-para-muitos envolvida nas situações combinatórias, pois a organização em ramos que indica essa ideia multiplicativa aparentemente é mais congruente com a operação matemática necessária para resolução de problemas.

A análise dos resultados se deu de forma quantitativa e qualitativa. Para uma análise, prioritariamente quantitativa, foi utilizado o *software* de análise estatística Statistical Package for the Social Sciences – SPSS. Para a análise qualitativa foram examinadas as representações utilizadas pelos alunos nas diferentes etapas da pesquisa. Acreditava-se que, a partir desses diferentes modos de intervenção, os estudantes avançariam mais em seus raciocínios combinatórios, bem como perceberiam o raciocínio multiplicativo implícito nas situações combinatórias.

Resultados do Estudo de Sondagem

Na Tabela 1 pode-se observar a quantidade de identificações corretas para as conversões solicitadas nos diferentes tipos de teste (Teste 1 – problema de combinação desconsiderando os casos repetidos; Teste 2 – problema de combinação com a apresentação dos casos repetidos riscados), sendo a primeira conversão de linguagem natural para listagem ou árvore e a segunda conversão de listagem ou árvore para a expressão numérica.

Observando a Tabela 1, é possível perceber que identificar qual a listagem ou qual a árvore de possibilidades representa o enunciado registrado em língua natural foi mais fácil para os estudantes, em comparação com a segunda conversão solicitada – da listagem ou da árvore para uma expressão numérica correspondente. Na conversão de língua natural para listagem de 36 itens (de possíveis 64) foram respondidos corretamente e na conversão de língua natural para árvore foram 33 itens. Já nas segundas conversões realizadas, o acerto caiu cerca de 50% (16 itens respondidos corretamente, tanto a partir de listagens, quanto a partir de árvores).

A conversão de língua natural para listagem e da língua natural para árvore de possibilidades praticamente não apresentou diferenças o que implica que as crianças entenderam igualmente bem o registro em lista e em árvore. Esse resultado pode ser justificado pelo fato de que há uma grande congruência entre listagens e árvores, uma vez que para cada elemento presente na listagem há um correspondente na árvore de possibilidades (critério de correspondência semântica), o que não ocorre entre listagens/árvores e a expressão numérica.

Tabela 1 – Identificações corretas em cada conversão por tipo de teste

Tipo de teste	Conversão 1		Conversão 2	
	LN → L	LN → A	L → EN	A → EN
1.1 (Teste sem casos repetidos, primeiro listagens e depois árvores.)	9	6	1	1
1.2 (Teste sem casos repetidos, primeiro árvores e depois listagens.)	5	8	1	2
Total Teste 1	14/32 (43,75%)	14/32 (43,75%)	2/32 (6,25%)	3/32 (9,375%)
2.1 (Teste com casos repetidos riscados, primeiro listagens e depois árvores.)	12	9	5	7
2.2 (Teste com casos repetidos riscados, primeiro árvores e depois listagens.)	10	10	9	6
Total Teste 2	22/32 (68,75%)	19/32 (59,375%)	14/32 (43,75%)	13/32 (40,625%)
Total Teste 1 + Teste 2	36/64 (56,25%)	33/64 (51,56%)	16/64 (25%)	16/64 (25%)

LN: Língua Natural; L: Listagem; A: Árvore de possibilidades; EN: Expressões Numéricas. Fonte: Montenegro (2018).

Na Tabela 1 pode-se observar, ainda, que no Teste 2 houve maior número de acertos, tanto para a primeira conversão, quanto para a segunda. Entretanto a diferença entre os testes era apenas nas situações de combinação, em que, nessas situações, os casos repetidos eram riscados, de modo que deixava explícito que para essa situação a ordem de escolha dos elementos não gera novas possibilidades. Pode-se inferir que, possivelmente a explicitação do invariante de ordem na situação de combinação pode ter influenciado o desempenho dos alunos também nos outros tipos de problemas combinatórios. Assim, os alunos prestaram mais atenção às diferenças entre os problemas no que diz respeito à ordenação dos elementos constituindo, ou não, possibilidades distintas.

Na Tabela 2 é possível observar os resultados por tipo de problema. Percebe-se que o desempenho é semelhante para os problemas de produto cartesiano, combinação e arranjo. Já os problemas de permutação apresentam, quantitativamente, um melhor desempenho. Apesar disso, quando se analisa a conversão para Expressão Numérica (EN), percebe-se que, nas situações de produto cartesiano, dos 14 acertos na primeira conversão, 9 também acertam a segunda. Já nos problemas de permutação, são 22 acertos na primeira conversão e, desses, 11 acertam a segunda conversão.

Tabela 2 – Identificações corretas em cada conversão por tipo de problema combinatório

Tipo de problema	Conversão 1		Conversão 2		
	LN → L	LN → A	L → EN	A → EN	Total
PC	7	7	4	5	23
C	9	6	4	2	21
A	8	10	2	4	24
P	12	10	6	5	33
	36/64	33/64	16/64	16/64	101/256

LN: Língua Natural; L: Listagem; A: Árvore de possibilidades; EN: Expressões Numéricas; PC: Produto Cartesiano; C: Combinação; A: Arranjo; P: Permutação.
Fonte: Montenegro (2018).

Nos problemas de combinação, em que há diferença entre os testes, são 15 acertos na primeira conversão, e desses 10 são no Teste 2 em que os casos repetidos são riscados. Na segunda conversão, para a Expressão Numérica, são apenas 6 acertos, e desses, 5 são no Teste 2, destacando a importância de explicitar os casos repetidos.

Assim, é possível perceber que a identificação da conversão, quando realizada de língua natural para listagem ou para árvore de possibilidades, resulta em maior taxa de sucesso, enquanto na identificação da conversão para a expressão numérica a taxa de acertos é mais fraca. Os resultados parecem indicar, portanto, que a razão de maior sucesso na identificação de conversões ocorre quando há maior congruência, no caso do registro de língua natural para uma listagem ou uma árvore de possibilidades, enquanto de árvore ou listagem para expressão numérica, o nível de congruência é menor.

Na Tabela 3 é possível observar que o quantitativo de justificativas incorretas ou em branco (87,5%) para as respostas dadas é muito superior ao de justificativas corretas (12,5%). Nas justificativas incorretas apresentadas, de um modo geral, não há explicação, de fato, do motivo pelo qual uma expressão numérica é correspondente ao enunciado em língua natural ou à listagem e árvore de possibilidades. Em alguns casos, estavam relacionadas apenas com o tratamento isolado das operações ou, por exemplo, com dificuldades em compreender a representação em árvore, como é possível observar na Figura 1.

Tabela 3 – Quantitativo do tipo de resposta em função de cada tipo de problema e do tipo de conversão intermediária realizada

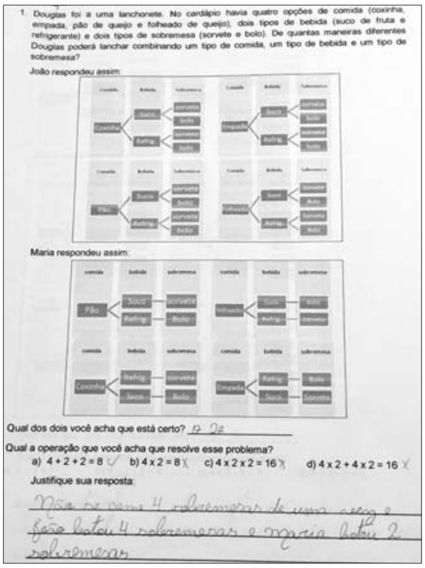
Tipo de problema	Tipo de conversão intermediária	Justificativa correta	Justificativa incorreta	Justificativa em branco
PC	Listagem	3	6	7
	Árvore	2	7	7
C	Listagem	1	9	6
	Árvore	1	8	7
A	Listagem	0	8	8
	Árvore	2	7	7
P	Listagem	4	6	6
	Árvore	3	6	7
Total		16 (12,5%)	57 (44,5%)	55 (43%)

PC: Produto Cartesiano; C: Combinação; A: Arranjo; P: Permutação.
Fonte: Montenegro (2018).

Na Figura 1 o aluno respondeu de forma incorreta, tanto a primeira conversão solicitada, quanto a segunda. Na justificativa discorreu, de acordo com critérios pessoais, sobre o raciocínio que utilizou para responder a situação, afirmando: "Não se come 4 sobremesas de uma vez e João botou 4 sobremesas e Maria botou 2 sobremesas". Essa afirmativa leva a entender que o aluno não conseguiu interpretar a situação em árvore de possibilidades, pois, não há nenhuma possibilidade com quatro sobremesas, mas sim, cada sobremesa indicando uma possibilidade diferente.

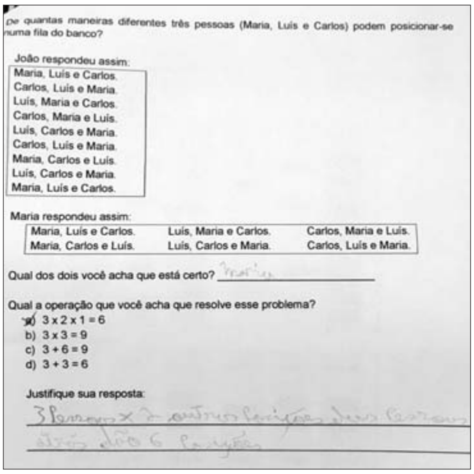
As justificativas corretas indicam textualmente o motivo pelo qual a operação escolhida indica a resposta correta, como pode ser observado na Figura 2, a seguir. Neste exemplo, o aluno respondeu que são "3 pessoas x 2 outras posições das pessoas atrás dão 6 posições", ou seja, são três pessoas para se posicionar numa fila sendo que quando uma está em primeiro lugar da fila as outras duas pessoas ocupam ora o segundo, ora o terceiro lugar, assim, são duas possibilidades para cada um ocupando a primeira posição da fila. Com a justificativa é possível observar que o aluno em questão percebeu o princípio multiplicativo envolvido no problema e coordenou de forma satisfatória os três registros de representações apresentados na situação – o enunciado em linguagem natural, a árvore de possibilidades e a expressão numérica correspondentes.

Figura 1 – Situação de produto cartesiano respondida incorretamente pelo Aluno 14 com solução apresentada em árvore



Fonte: Montenegro (2018).

Figura 2 – Situação de permutação respondida corretamente pelo Aluno 2, com solução apresentada em listagem



Fonte: Montenegro (2018).

É importante destacar que o pensamento inverso é mais complexo e pode ser o principal motivo das dificuldades em apresentar justificativas corretas para as identificações realizadas. Essa atividade se configura em nova conversão que indica retorno ao registro de representação utilizado inicialmente (linguagem natural), tarefa apontada como complexa. Duval (2009, p. 109) afirma que:

> Aqui, o registro de chegada é uma descrição da situação apresentada pela representação intermediária e não pela representação de saída. A complexidade da conversão inversa apega-se ao fato que estamos em presença de uma composição de duas conversões sucessivas.

O registro de partida, em língua natural, passou por um registro intermediário (árvore ou listagem) até o registro de chegada em expressão numérica, entretanto, ao final, era solicitada uma justificativa em que se esperava que os alunos escrevessem em língua natural. Essa atividade, de apresentar justificativas em linguagem natural, se caracteriza numa conversão muito difícil, que apresentou um alto índice de respostas em branco, o que ratifica a sua complexidade.

Resultados do Estudo de Intervenção

Os testes aplicados antes e depois das intervenções foram analisados conforme o levantamento de possibilidades e a expressão numérica (operação, conta) utilizada para responder a situação.

No levantamento de possibilidades foi considerado erro nos casos em que as respostas estavam em branco, ou aquelas que não apresentavam um raciocínio combinatório na sua resolução. Nesse caso, a questão não recebeu pontos. As respostas com raciocínio combinatório em que se apresentasse menos da metade de possibilidades que responde a situação foram consideradas Acerto Parcial 1 e receberam um ponto. Dois pontos foram dados para aquelas questões que apresentaram o que se considerou Acerto Parcial 2. Nessa pontuação estavam os casos em que foram apresentados metade ou mais do número de possibilidades, mas não havia ainda o esgotamento de todas as possibilidades. Receberam três pontos aqueles que conseguiram responder corretamente o problema com o esgotamento de todas as possibilidades. Assim, no teste contendo oito situações, cada aluno poderia chegar a um total de 24 pontos (oito problemas x três pontos em cada problema).

A análise para a expressão numérica que responde a situação também foi realizada com pontuação de 0 a 3 pontos, sendo que não recebiam pontos as respostas em branco ou que apresentavam um cálculo que não correspondia ao usado para responder a situação. Estudantes que escreviam o tipo de operação que deveria ser realizado, mas que não indicavam qual a expressão numérica, nem a resposta numérica também foram classificados com pontuação zero. Os Acertos Parciais 1 e 2, para expressão numérica, são caracterizados como aqueles que indicavam a expressão numérica correta, entretanto erravam o cálculo numérico propriamente dito, acertando, portanto, o que Vergnaud (1986) chama de cálculo relacional, entretanto, com dificuldades na realização do cálculo numérico; ou ainda, dificuldade no tratamento dentro do próprio registro, como apontado por Duval (2012). Assim, quando o aluno acertava o cálculo relacional mas errava o cálculo numérico indicando menos da metade do número de possibilidades, era caracterizado como Acerto Parcial 1; e quando acertava o cálculo relacional mas errava o cálculo numérico indicando metade ou mais do número de possibilidades, era caracterizado como Acerto Parcial 2. Também foram encontrados acertos parciais com generalização incompleta de possibilidades. Os 3 pontos foram designados para os que indicavam a expressão numérica correta, seja ela por meio de uma generalização de possibilidades ou pelo PFC.

Na Tabela 4 é possível observar a média de desempenhos, tanto para o levantamento de possibilidades, quanto para a expressão numérica. Percebe-se que a média no pré-teste de todos os grupos é baixa, considerando que a média total poderia chegar em 24 pontos, principalmente na expressão numérica. Também é possível notar que todos os grupos avançaram em seus desempenhos após a intervenção, e, pela análise estatística realizada por meio do *software* SPSS, destaca-se que esse avanço foi significativo[4] em todos os grupos[5], revelando que ambas as representações intermediárias utilizadas são importantes estratégias para o trabalho com situações combinatórias.

É importante destacar, ainda, que a média de desempenhos dos grupos que trabalharam com a árvore de possibilidades é maior no pós-teste em todos os anos de escolarização pesquisados, o que pode ser pode ser justificado por essa representação ter mais congruência com a expressão numérica, hipótese inicial desse estudo. Entretanto, quando foi realizada a análise estatística, na comparação entre os resultados do pós-teste no G1 e o pós-teste do G2, verificou-se que o avanço superior do G1 não foi significativo em relação ao G2[6]. Dessa forma, tanto a árvore de possibilidades, quanto a listagem, são representações auxiliares que ajudam no desenvolvimento do raciocínio combinatório, inclusive para a apresentação de expressões numéricas correspondentes.

Tabela 4 – Média de desempenho no pré-teste e no pós-teste por ano de ensino e por grupo de intervenção

		Pré-teste		Pós-teste	
		Levantamento	Expressão	Levantamento	Expressão
5º Ano	G1 (árvore)	1,89	0,31	6,11	4,57
	G2 (Listagem)	2,85	1,2	5,15	3,30
7º Ano	G1 (árvore)	1,38	0,57	6,76	4,76
	G2 (Listagem)	1,77	0,46	6,23	3,46
9º Ano	G1 (árvore)	6,74	3,68	9,52	7,89
	G2 (Listagem)	6,25	2,56	8,43	5,93

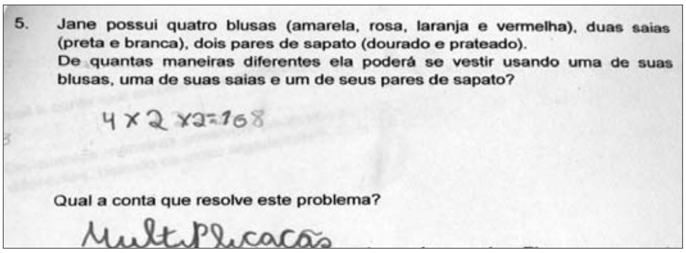
Fonte: Montenegro (2018).

A diferença entre os grupos também foi analisada levando em consideração apenas os resultados nas situações em que o número de possibilidades na resposta era elevado, sendo recomendável, portanto, o uso de uma expressão numérica. Os resultados indicam uma diferença significativa[7] entre os grupos. Desse modo, o Grupo 1, que teve intervenção com o uso da árvore de possibilidades, obteve melhor desempenho nas situações em que era recomendável o uso de uma expressão numérica. A explicação desse resultado pode ser pelo fato de essa representação intermediária ter um maior grau de congruência com a expressão numérica necessária para a resolução dos problemas combinatórios.

As médias que podem ser observadas na Tabela 4 indicam que os 5º e 7º anos têm desempenhos similares entre si antes e depois do processo de intervenção, indicando que, provavelmente não houve, entre esses anos de escolarização, um trabalho específico com situações combinatórias. Após o 7º ano, provavelmente esse trabalho aconteceu, uma vez que os resultados no pré-teste do 9º ano equiparam-se com os resultados do pós-teste dos 5º e 7º anos. É importante salientar que, apesar do 9º ano já apresentar melhores resultados no pré-teste, continuou avançando em seus raciocínios combinatórios, uma vez que avançou em seus desempenhos na ocasião do pós-teste. A análise estatística indicou que o 9º ano apresentou diferenças significativas com os 5º e 7º anos, tanto para o levantamento de possibilidades (9ºx5º: p=0,003; 9ºx7º: p=0,023), quanto para a indicação de uma expressão numérica correspondente (9ºx5º: p=0,007; 9ºx7º: p=0,007). Mas o 5º e o 7º ano não apresentaram diferenças entre si, nem no levantamento de possibilidades (p=0,650), nem na expressão numérica (p=0,991).

Em relação às representações utilizadas, todos os anos escolares, no pré-teste tiveram preferência pela listagem (Figura 4), ou por uma operação matemática, que podia ser correta ou incorreta para a situação (Figura 5). O PFC foi usado no pré-teste apenas em situações de produto cartesiano, situação em que os números do enunciado são utilizados para responder o problema (Figura 3). No 9º ano ocorreu, ainda no pré-teste, o uso da generalização de possibilidades, por meio de uma listagem sistemática seguida de uma multiplicação que responde corretamente a situação (Figura 6).

Figura 3 – Situação de produto cartesiano com resposta correta por meio da expressão numérica que responde o problema, utilizada por aluno do 5º ano


5. Jane possui quatro blusas (amarela, rosa, laranja e vermelha), duas saias (preta e branca), dois pares de sapato (dourado e prateado).
De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas saias e um de seus pares de sapato?

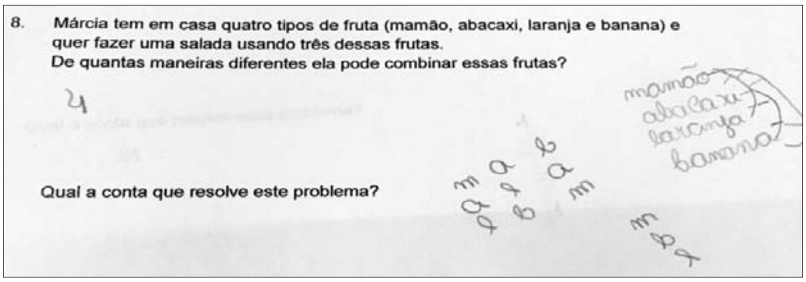
4 x 2 x2=168

Qual a conta que resolve este problema?

MultiPlicacõs

Fonte: Montenegro (2018).

Figura 4 – Situação de combinação com resposta correta por meio da listagem e diagrama, utilizada por aluno do 7º ano



8. Márcia tem em casa quatro tipos de fruta (mamão, abacaxi, laranja e banana) e quer fazer uma salada usando três dessas frutas.
De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

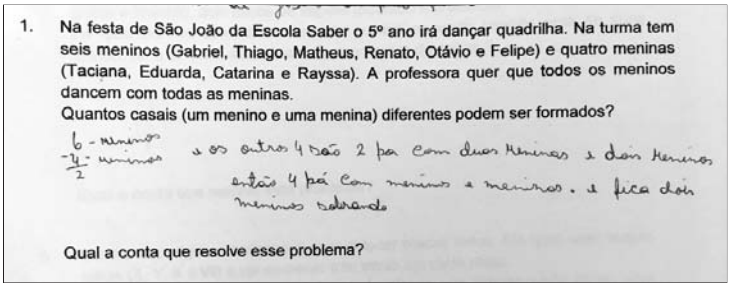
4

mamão
abacaxi
laranja
banana

Qual a conta que resolve este problema?

Fonte: Montenegro (2018).

Figura 5 – Situação de produto cartesiano com resposta parcialmente correta 1 com apresentação de uma expressão numérica incorreta



1. Na festa de São João da Escola Saber o 5º ano irá dançar quadrilha. Na turma tem seis meninos (Gabriel, Thiago, Matheus, Renato, Otávio e Felipe) e quatro meninas (Taciana, Eduarda, Catarina e Rayssa). A professora quer que todos os meninos dancem com todas as meninas.
Quantos casais (um menino e uma menina) diferentes podem ser formados?

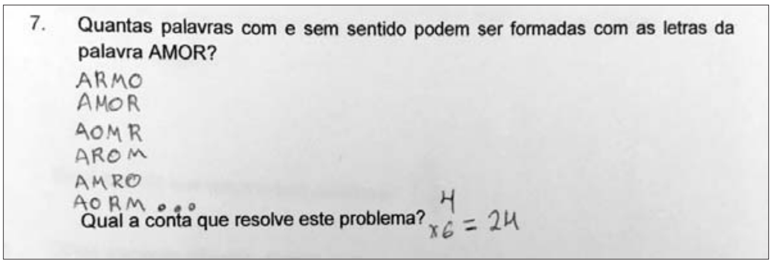
6 - meninos
-4 - meninas
2

e os outros 4 são 2 pa com duas meninas e dois meninos então 4 pá com meninos e meninas. e fica dois meninos sobrando

Qual a conta que resolve esse problema?

Fonte: Montenegro (2018).

Figura 6 – Situação de permutação com resposta correta por meio de generalização das possibilidades, utilizada por aluno do 9º ano



7. Quantas palavras com e sem sentido podem ser formadas com as letras da palavra AMOR?

ARMO
AMOR
AOMR
AROM
AMRO
AORM ...

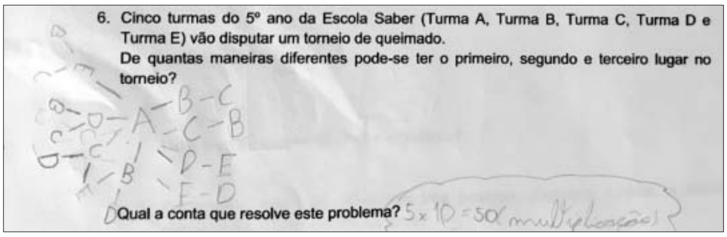
Qual a conta que resolve este problema?

4
x6 = 24

Fonte: Montenegro (2018).

No pós-teste foram encontradas listagens e árvores de possibilidades utilizadas como representações intermediárias para a generalização de possibilidades em todos os anos escolares (Figuras 7, 8, 11 e 12), indicando o uso de conversões sucessivas para chegar na expressão numérica. O mesmo ocorreu com o uso do PFC, sendo que este procedimento foi mais usado pelos alunos do 7º e 9º anos (Figuras 9 e 14).

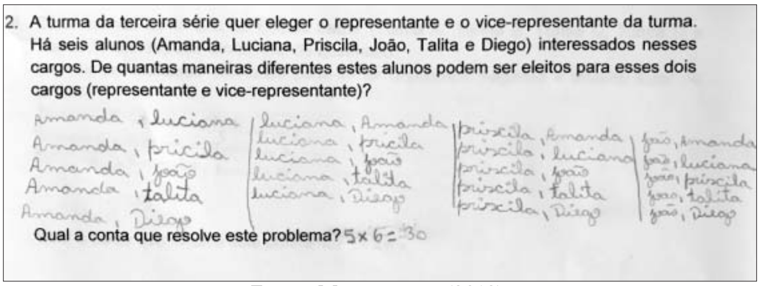
Figura 7 – Situação de arranjo com resposta parcialmente correta do tipo 2 por meio da generalização de possibilidades com uso da árvore e com expressão numérica que responde parcialmente a situação, utilizada por aluno do 5º ano


6. Cinco turmas do 5º ano da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C, Turma D e Turma E) vão disputar um torneio de queimado.
De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

Qual a conta que resolve este problema? 5 x 10 = 50 multiplicação

Fonte: Montenegro (2018).

Figura 8 – Situação de arranjo com resposta correta por meio da generalização de possibilidades com uso da listagem, utilizada por aluno do 5º ano

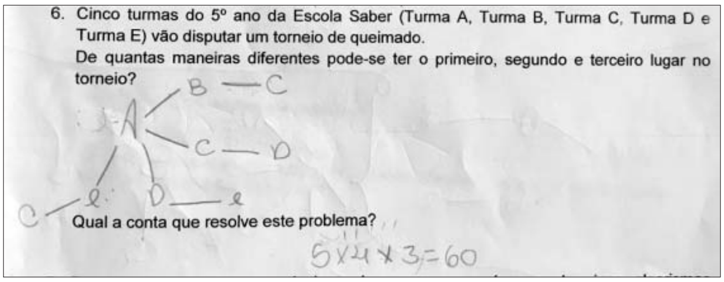

2. A turma da terceira série quer eleger o representante e o vice-representante da turma. Há seis alunos (Amanda, Luciana, Priscila, João, Talita e Diego) interessados nesses cargos. De quantas maneiras diferentes estes alunos podem ser eleitos para esses dois cargos (representante e vice-representante)?

Amanda, luciana | luciana, Amanda | priscila, Amanda | joão, Amanda
Amanda, pricila | luciana, pricila | priscila, luciana | joão, luciana
Amanda, joão | luciana, joão | priscila, joão | joão, priscila
Amanda, talita | luciana, talita | priscila, talita | joão, talita
Amanda, Diego | luciana, Diego | priscila, Diego | joão, Diego

Qual a conta que resolve este problema? 5 x 6 = 30

Fonte: Montenegro (2018).

Figura 9 – Situação de arranjo com resposta correta por meio do Princípio Fundamental da Contagem, utilizada por aluno do 5º ano

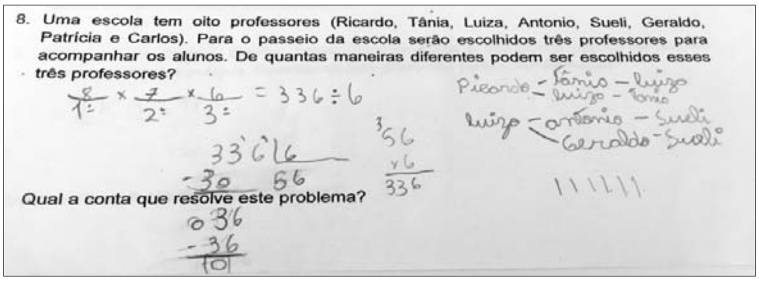

6. Cinco turmas do 5º ano da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C, Turma D e Turma E) vão disputar um torneio de queimado.
De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

Qual a conta que resolve este problema?
5 x 4 x 3 = 60

Fonte: Montenegro (2018).

Nas situações de combinação, o 5º ano não apresentou nenhuma expressão numérica correspondente, indicando que a conversão da situação de combinação para uma expressão numérica é mais difícil nessa etapa do Ensino Fundamental. Enquanto no 7º e no 9º ano os alunos conseguiram desenvolver uma expressão numérica para essa situação (Figuras 10 e 13), corroborando com os resultados do primeiro estudo que indicavam a dificuldade dos alunos do 5º ano em reconhecer as expressões numéricas para esse tipo de situação. A conversão da língua natural para o PFC sem a necessidade de uma representação auxiliar aconteceu no 5º ano apenas em problemas de produto cartesiano. No 7º e 9º anos, a conversão direta para o uso do PFC aconteceu também nas outras situações combinatórias.

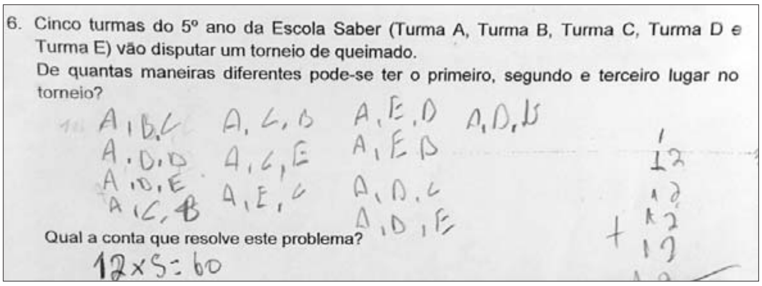
Figura 10 – Situação de combinação com resposta correta por meio do Princípio Fundamental da Contagem, utilizada por aluno do 7º ano


8. Uma escola tem oito professores (Ricardo, Tânia, Luiza, Antonio, Sueli, Geraldo, Patrícia e Carlos). Para o passeio da escola serão escolhidos três professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses três professores?

Qual a conta que resolve este problema?

Fonte: Montenegro (2018).

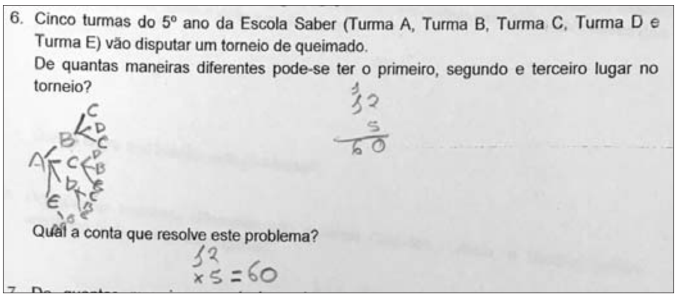
Figura 11 – Situação de arranjo com resposta correta por meio da generalização de possibilidades, utilizada por aluno do 7º ano


6. Cinco turmas do 5º ano da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C, Turma D e Turma E) vão disputar um torneio de queimado.
De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

Qual a conta que resolve este problema?

Fonte: Montenegro (2018).

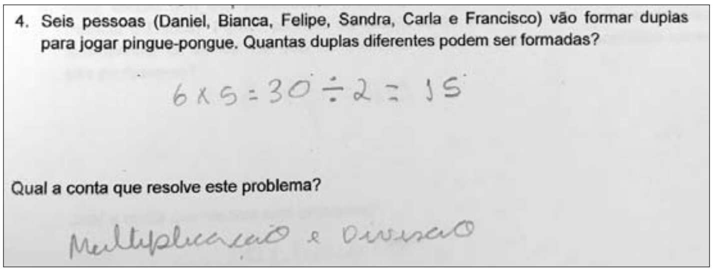
Figura 12 – Situação de arranjo com resposta correta por meio de generalização das possibilidades, utilizada por aluno do 9º ano


6. Cinco turmas do 5º ano da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C, Turma D e Turma E) vão disputar um torneio de queimado.
De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

Qual a conta que resolve este problema?

Fonte: Montenegro (2018).

Figura 13 – Situação de combinação com resposta correta por meio de uma expressão numérica, utilizada por aluno do 9º ano


4. Seis pessoas (Daniel, Bianca, Felipe, Sandra, Carla e Francisco) vão formar duplas para jogar pingue-pongue. Quantas duplas diferentes podem ser formadas?

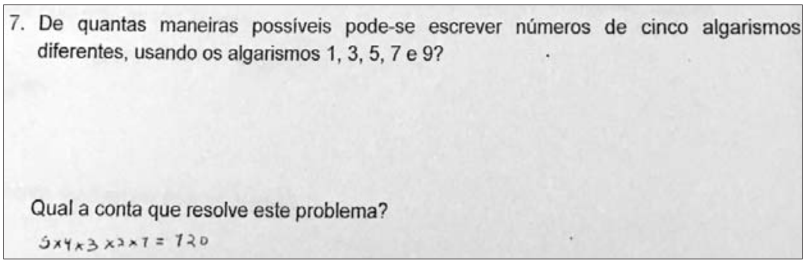
6x5=30÷2=15

Qual a conta que resolve este problema?

Multiplicação e Divisão

Fonte: Montenegro (2018).

Figura 14 – Situação de permutação com resposta correta por meio do PFC, utilizada por aluno do 9º ano


7. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de cinco algarismos diferentes, usando os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9?

Qual a conta que resolve este problema?

5x4x3x2x1 = 120

Fonte: Montenegro (2018).

Apesar de ainda serem apresentados resultados de desempenhos baixos no teste final, os processos interventivos, ou seja, o ensino, com listagens sistematizadas ou com árvores de possibilidades, resultou em melhoras significativas de desempenho nos dois grupos e nos três anos escolares.

O grupo que trabalhou com árvores de possibilidades teve melhor desempenho que o grupo que trabalhou com listagens sistematizadas, nos problemas com maior número de possibilidades. Isso mostra que esse registro pode ser um melhor registro intermediário entre enunciados em linguagem natural e as expressões numéricas. O ensino também serviu para ampliar o repertório de representações simbólicas utilizadas em problemas combinatórios. Inicialmente, listagens eram o registro preferido, mas após o ensino, as listagens passaram a ser mais sistematizadas e outros registros foram igualmente utilizados: árvores de possibilidades e expressões numéricas, em especial no 7º e 9º anos que utilizaram expressões numéricas inclusive em problemas de combinação o que exige, além de uma multiplicação, também a divisão pelo número de possibilidades iguais entre si.

Considerações Finais

A presente pesquisa teve o objetivo de analisar o papel que a identificação e as transformações de conversão e tratamento de registros têm na ampliação do conhecimento de variadas situações combinatórias. Foram realizados dois estudos: o primeiro de sondagem com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental; e o segundo estudo, elaborado a partir dos resultados do primeiro, de intervenção com o uso de representações intermediárias na conversão de registros e no tratamento dentro do próprio registro realizado e na ampliação do raciocínio combinatório, de modo que os alunos percebessem o caráter multiplicativo na solução de problemas de Combinatória.

No primeiro estudo, foram confirmadas as hipóteses levantadas inicialmente, de maior dificuldade nos problemas com situação de combinação, bem como, maior dificuldade na conversão para uma expressão numérica correspondente à resolução do problema. Isso porque poucos alunos identificaram as conversões para a expressão numérica correspondente, poucos alunos conseguiram justificar com coerência suas respostas e apenas um aluno conseguiu justificar a expressão numérica para o problema de combinação. Isso aconteceu, possivelmente, em função da não-congruência entre as representações em língua natural (enunciado) e a expressão numérica, principalmente nas situações de combinação em que, além de uma multiplicação, é necessário realizar a divisão pelo número de casos repetidos. Assim, ressaltam-se as dificuldades dos alunos na conversão da linguagem natural do enunciado para a representação em listagem sistemática ou árvore de possibilidades, bem como, com maior frequência, com a conversão para expressão numérica, o que indica a necessidade de processos de ensino para que os alunos possam identificar essas distintas conversões (de língua natural para árvores ou listagens e dessas para a expressão numérica).

Em função desses resultados, no Estudo 2 foram propostas distintas intervenções, não apenas em turmas do 5º ano do Ensino Fundamental, uma vez que a dificuldade com o uso do PFC se destacou neste primeiro estudo, mas também com turmas do 7º e 9º anos deste nível de escolarização. No 5º ano o objetivo era verificar se e como as dificuldades para reconhecerem a expressão numérica como representação de chegada poderiam ser superadas. No 7º e 9º anos se pretendia observar como acontece ampliação do conhecimento combinatório, particularmente com relação ao uso das expressões numéricas/PFC.

No segundo estudo os resultados indicam que ambas as representações intermediárias, árvore de possibilidades ou listagem sistematizada, são bons caminhos para o ensino da Combinatória, uma vez que a média de acertos aumentou na comparação entre pré-teste e pós-teste para os dois grupos, em todos os anos de escolarização, tanto para o levantamento de possibilidades, quanto para a expressão numérica. Além disso, essa diferença se revelou significativa em todos os anos escolares pesquisados. Isso pode indicar que a congruência entre os registros de partida (língua natural), intermediários (listagem ou árvore) e de chegada (expressão numérica), pode ser evidenciada nos dois tipos de intervenção realizados.

Apesar de ambos os grupos avançarem em seus desempenhos, destaca-se que os grupos que trabalharam com a árvore de possibilidades (G1) apresentaram melhores médias em todos os anos escolares pesquisados, e, além disso, destaca-se que nesses grupos houve maior número de acertos nas situações da segunda parte do pós-teste, com maior número de possibilidades do pós-teste, indicando diferença significativa com o G2, uma vez que, o acerto desses problemas estava diretamente relacionado com o uso do PFC ou de uma generalização de possibilidades.

Com a presente investigação buscou-se defender a tese de que, com base na Teoria dos Campos Conceituais e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, um registro de representação intermediário, transparente e sistematizado, é recomendável para auxiliar os alunos na interpretação e representação de expressões numéricas dos problemas que envolvem variadas situações combinatórias. É importante também que no uso dessas representações sejam discutidos os invariantes das distintas situações combinatórias. Objetivou-se defender, ainda, que dentre os registros de representação intermediários, a árvore de possibilidades pode ser mais eficiente, por possuir mais congruência com a expressão numérica.

As discussões realizadas evidenciam como é necessária e importante uma discussão articulando a TCC e a TRRS. Observou-se que as conversões possuem diferentes níveis de dificuldade, dependendo do tipo de registro utilizado e da situação combinatória tratada. Dessa forma, comprova-se uma estreita relação entre registros de representação e situações combinatórias.

Desse modo, conclui-se que é possível desenvolver e ampliar o raciocínio combinatório dos estudantes de 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental por meio do uso de ambas as representações intermediárias utilizadas neste estudo, oportunizando um melhor desempenho na apresentação das expressões numéricas correspondentes à resolução das situações, principalmente com o uso da árvore de possibilidades, visto que, diante do exposto, esta parece ter maior congruência com a expressão numérica. Desse modo, em diferentes anos de escolarização é possível viabilizar a aprendizagem da Combinatória, uma vez que é possível que todos avancem em seus desempenhos, garantindo uma gradual ampliação do raciocínio combinatório.

Recebido em 26 de outubro de 2018
Aprovado em 21 de setembro de 2019

Notas

1 Princípio Fundamental da Contagem (PFC), também conhecido como princípio multiplicativo, é uma forma de resolução de situações combinatórias e é base de fórmulas utilizadas no estudo de Combinatória, pois expressa a natureza multiplicativa dos diferentes tipos de problemas combinatórios. (Lima, 2015, p. 22) O PFC também pode ser anunciado como Princípio Fundamental da Enumeração ou Princípio da Multiplicação.

2 A generalização de possibilidades resulta da multiplicação da quantidade de possibilidades elencadas para um elemento fixo na primeira escolha pelo

número total de elementos, se caracterizando como um cálculo relacional diferente do expresso no PFC. A expressão numérica do PFC se caracteriza pela multiplicação do número de possibilidades para cada escolha.

3 Neste estudo ‘Análise Combinatória’ e ‘Combinatória’ são consideradas sinônimos.

4 Nesta pesquisa foi considerado índice de significância $p<,05$.

5 Pré X pós-teste: 5º ano: levantamento de possibilidades ($t(38) = -4,766$; $p<0,001$); expressão numérica ($t(38)= -4,361$; $p<0,001$). 7º ano: levantamento de possibilidades ($t(46)= -8,878$; $p<0,001$); expressão numérica ($t(46)= - 6,156$; $p<0,001$). 9º ano: levantamento de possibilidades ($t(34)= -3,710$; $p= 0,001$); expressão numérica ($t(34)= - 7,824$; $p<0,001$).

6 G1 x G2: 5º ano: levantamento de possibilidades ($t(37)= 0,576$; $p=0,568$); expressão numérica ($t(37)= 0923$; $p=0,362$). 7º ano: levantamento de possibilidades ($t(45)= 0,440$; $p=0,662$); expressão numérica ($t(45)= 0,166$; $p=0,300$). 9º ano: levantamento de possibilidades ($t(33)= 0,650$; $p=0,520$); expressão numérica ($t(33)= 1,341$; $p=0,189$).

7 G1x G2 situações com número elevado de possibilidades: $t(119)= 3,162$; $p=0,002$.

Referências

AZERÊDO, Maria Alves. **As Representações Semióticas de Multiplicação**: um instrumento de mediação pedagógica. 2013. 279 f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

AZEVEDO, Juliana. **Alunos de Anos Iniciais Construindo Árvores de Possibilidades**: é melhor no papel ou no computador? 2013. 127 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute. Combinatória: a construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de software. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 113-140, jun. 2013.

BATANERO, Carmen; NAVARRO-PELAYO, Virginia; GODINO, Juan.Díaz. Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils. **Educational Studies in Mathematics**, v. 32, n. 2, p. 181-199, Feb. 1997. Disponível em: <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Implicitmodel.pdf>. Acesso em: 6 jul. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília, DF, 1997.

BORBA, Rute. O Raciocínio Combinatório na Educação Básica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador. **Anais...** Salvador: Universidade Católica do Salvador (UCSal), 2010. P. 1-16.

COLOMBO, Janecler; FLORES, Cláudia; MORETTI, Méricles. Reflexões em Torno da Representação Semiótica na Produção do Conhecimento: compreendendo o papel da referência na aprendizagem da matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 9, n. 2, p. 181-203, 2007.

DURO, Mariana Lima; BECKER, Fernando. Análise Combinatória: do método aleatório à combinatória sistemática. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 40, n. 3, p. 859-882, 2015.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. **Ver e Ensinar Matemática de Outra Forma – Entrar no Modo Matemático de Pensar**: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo do Pensamento. **Revemat**: revista eletrônica de educação matemática. Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

FISCHBEIN, Efraim. **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children**. Dordrecht: Reidel, 1975.

FISCHBEIN, Efraim; PAMPU, Ileana; MINZAT, Ion. Effects of Age and Instruction on Combinatory Ability in Children. **The British Journal of Educational Psychology**, Nova Jersey, n. 40, 1970.

GITIRANA, Verônica; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra; SPINILLO, Alina. **Repensando Multiplicação e Divisão**: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

GUIRADO, João Cesar; CARDOSO, Evelyn. Análise Combinatória: da manipulação à formalização de conceitos. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Assis Chateaubriand. **Anais...** Assis Chateaubriand: UNIMEO, 2007.

LIMA, Ana Paula. **Princípio Fundamental da Contagem**: conhecimentos de professores de matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias. 2015. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

MONTENEGRO, Juliana Azevedo. **Identificação, Conversão e Tratamento de Registros de Representações Semióticas Auxiliando a Aprendizagem de Situações Combinatórias**. 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

MORGADO, Augusto; PITOMBEIRA DE CARVALHO, João; PINTO DE CARVALHO, Paulo; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

MORO, Maria Lucia; SOARES, Maria Tereza. Níveis de Raciocínio Combinatório e Produto Cartesiano na Escola Fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 99-124, 2006.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. A Compreensão do Raciocínio Combinatório por Alunos do 2º Ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2009, Brasília. **Anais...** Brasília: UCB, 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O Raciocínio Combinatório do Início do Ensino Fundamental ao Término do Ensino Médio. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais...** Salvador, 2010.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do Desenvolvimento Cognitivo e Didática das Matemáticas um Exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, Lisboa, v. 1, p. 75-90, 1986.

VERGNAUD, Gerárd. **El Niño, las Matemáticas y la Realidad** – problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Mexico: Trillas, 1991.

VERGNAUD, Gerárd. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Horizontes pedagógicos. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. P. 155-191.

Juliana Azevedo Montenegro é doutora em Educação Matemática e Tecnológica e professora do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino – Centro de Educação na Universidade Federal de Pernambuco.
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3570-9581
E-mail: azevedomontenegro.ju@gmail.com

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba é doutora em Educação Matemática pela Oxford Brookes University e professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Centro de Educação na Universidade Federal de Pernambuco.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5098-4461
E-mail: resrborba@gmail.com

Marilena Bittar é doutora em Didática da Matemática pela Université Joseph Fourier, Grenoble e professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS).
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9989-7871
E-mail: marilenabittar@gmail.com