Tópicos (México)
ISSN: 0188-6649
Universidad Panamericana, Facultad de Filosofía

Castro-Manzano, J. Martín
Silogística intermedia, términos y árboles
Tópicos (México), núm. 58, 2020, Enero-Junio, pp. 209-237
Universidad Panamericana, Facultad de Filosofía

DOI: https://doi.org/10.21555/top.v0i58.1065 http://doi.org/10.21555/top.v0i58.1065

Intermediate Syllogistic, Terms, and Trees

Silogística intermedia, términos y árboles

J. Martín Castro-Manzano
Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla
México
josemartin.castro@upaep.mx
https://orcid.org/0000-0003-2227-921X

Recibido: 18 - 05 - 2018.
Aceptado: 11 - 10 - 2018.

Abstract

In this paper we propose a tableaux method for the intermediate syllogistic of Peterson and Thompson by using the algebra of Sommers and Englebretsen. The result is an analytic tableaux method capable of modeling inference in basic, relational, and intermediate syllogistic.

Key words: semantic trees; term logic; non-classical quantifiers.

Resumen

En este trabajo proponemos un método de árboles para la silogística intermedia de Peterson y Thompson usando el álgebra de Sommers y Englebretsen. El resultado es un método analítico de árboles capaz de modelar inferencia en silogística básica, relacional e intermedia.

Palabras clave: árboles semánticos; lógica de términos; cuantificadores no-clásicos.

1. Introducción

En otro lugar hemos propuesto una unión del sistema *Term Functor Logic* (Sommers, 1967, 1982; Sommers y Englebretsen, 2000; Englebretsen, 1987, 1996; Englebretsen y Sayward, 2011) con la silogística intermedia (Peterson, 1979; Thompson, 1982). Dicha unión estaba motivada porque si bien el sistema *Term Functor Logic* (TFL) ofrece una aproximación algebraica para la silogística, desafortunadamente, no modela casos de razonamiento en lenguaje natural con cuantificadores no clásicos como "muchos", "la mayoría", o "pocos"; mientras que, por otro lado, la silogística intermedia extiende el alcance de la silogística mediante la adición de cuantificadores no clásicos pero carece de un tratamiento algebraico. De la unión de estos sistemas resultó la *Intermediate Term Functor Logic* (TFL^{+}), un sistema capaz de modelar inferencia silogística con las ventajas de un enfoque algebraico (i.e., la reducción de conjunto de reglas complejas a un sistema simple, formal y unificado) y las ventajas de una teoría silogística con cuantificadores no clásicos (i.e., la evaluación de una amplia gama de patrones inferenciales en lenguaje natural que extiende las capacidades de la silogística apodíctica tradicional) (Castro-Manzano, 2019). Adicionalmente, en otro lugar hemos propuesto un método analítico de árboles para el sistema TFL. Este método de árboles estaba motivado porque no existía un sistema de árboles para TFL capaz de preservar la riqueza expresiva y el poder inferencial del álgebra de Sommers y Englebretsen (cfr. D'Agostino *et al*, 1999; Sommers y Englebretsen, 2000, pp. 183 y ss.; Priest, 2008). Esta propuesta resultó en un método de prueba que reduce el número de reglas de inferencia y preserva las capacidades expresivas e inferenciales de TFL para la silogística básica, la silogística relacional y la lógica proposicional (Castro-Manzano, 2018).

Dados estos resultados previos, en este trabajo proponemos, a modo de síntesis, un método de árboles para la silogística intermedia usando las nociones del álgebra de TFL; en otras palabras, presentamos un método analítico de árboles para el sistema TFL^{+}. El resultado es un método de árboles capaz modelar inferencia en silogística básica, relacional y, por supuesto, silogística intermedia. Para alcanzar este resultado procedemos de la siguiente manera. Primero presentamos de manera breve los sistemas lógicos previamente mencionados (con especial énfasis en la silogística), posteriormente introducimos nuestra contribución y, al final, mencionamos algunos posibles usos de este método.

2. Silogística, TFL, silogística intermedia y TFL⁺

2.1 Aspectos generales de la silogística

La *silogística* es una lógica de términos que tiene sus orígenes en los *Primeros Analíticos* de Aristóteles y que estudia la relación de inferencia entre proposiciones categóricas. Una *proposición categórica* es una proposición compuesta por dos términos, una cantidad y una cualidad. El sujeto y el predicado de una proposición se llaman *términos*: el término-esquema S denota el término sujeto de la proposición y el término-esquema P denota el predicado. La *cantidad* puede ser universal (*Todo*) o particular (*Algún*) y la *cualidad* puede ser afirmativa (*es*) o negativa (*no es*). Estas proposiciones categóricas se denotan mediante una *etiqueta* (a (para la universal afirmativa, SaP), e (para la universal negativa, SeP), i (para la particular afirmativa, SiP), y o (para la particular negativa, SoP)) que nos permite determinar una secuencia de tres proposiciones categóricas que se conoce como *modo*. Un *silogismo categórico*, entonces, es un modo ordenado de tal manera que dos proposiciones fungen como premisas y la última como conclusión. Al interior de las premisas existe un término que ocurre en ambas premisas pero no en la conclusión: este término especial, usualmente denotado con el término-esquema M, funciona como un enlace entre los términos restantes y es conocido como *término medio*. De acuerdo con la posición del término medio se pueden definir cuatro arreglos o *figuras* que codifican los modos o patrones silogísticos válidos (Cuadro 1[1]).

Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
aaa	eae	iai	aee
eae	aee	aii	iai
aii	eio	oao	eio
eio	aoo	eio	

Cuadro 1. Silogismos válidos

[1] Por mor de brevedad, pero sin pérdida de generalidad, omitimos los silogismos que requieren carga existencial.

2.2 *Term Functor Logic*

Para estudiar la relación de inferencia es costumbre hacer uso de lenguajes de primer orden. Así, por ejemplo, la lógica proposicional, la lógica de primer orden y la lógica de primer orden con identidad son sistemas lógicos definidos mediante lenguajes de primer orden: {*p*, *q*, *r*, ..., ¬, ⇒}, {*a*, *b*, *c*, ..., *x*, *y*, *z*, ..., *f*, *g*, *h*, ..., *A*, *B*, *C*, ..., ¬, ⇒, ∀, ∃} y {*a*, *b*, *c*, ..., *x*, *y*, *z*, ..., *f*, *g*, *h*, ..., *A*, *B*, *C*, ..., ¬, ⇒, ∀, ∃, =}, respectivamente. El origen de esta costumbre está relacionado con las ventajas de orden representativo que los lenguajes de primer orden ofrecen frente a sistemas más tradicionales. Russell (1937), por ejemplo, popularizó la idea de que las limitaciones del programa lógico tradicional, i.e. silogístico, se debían al análisis de las proposiciones en clave terminista como triadas de términos sujeto y predicado unidos por una cópula. Carnap (1930) generalizó esta consideración a toda la lógica tradicional al sostener que la única sintaxis disponible en este tipo de lógica es predicativa.

Ciertamente, la sintaxis de términos ternaria (sujeto-cópula-predicado) de la silogística tradicional es limitada y sus restricciones generan dificultades para representar proposiciones singulares, relacionales o compuestas (cfr. Geach, 1980, p. 64 y 1962, p. 54). Sin embargo, desde finales de la década de los 60's, Fred Sommers defendió una revisión y una revitalización de la sintaxis ternaria, a la luz de lo que llamamos "el reto de Bar-Hillel",[2] mostrando que ninguna de estas limitaciones es de tipo *knock-out*. Como resultado de esta revisión, el proyecto filosófico de Sommers se diversificó en tres grandes líneas de investigación en ontología, semántica y lógica (cfr. Sommers, 2005) que se sistematizaron, respectivamente, en una teoría de categorías, una teoría de la verdad y un sistema lógico que hoy conocemos como *Term Functor Logic* (Sommers, 1967; Sommers, 1982; Sommers y Englebretsen,

[2] El reto de Bar-Hillel es el siguiente (el énfasis es nuestro): "*I challenge anybody here to show me a serious piece of argumentation in natural languages that has been successfully evaluated as to its validity with the help of formal logic.* I regard this fact as one of the greatest scandals of human existence. Why has this happened? How did it come to be that logic which, at least in the views of some people 2,300 years ago, was supposed to deal with evaluation of argumentation in natural languages, has done a lot of extremely interesting and important things, but not this?" (cfr. Staal, 1969, p. 256).

2000; Englebretsen, 1987; Englebretsen, 1996; Englebretsen y Sayward, 2011).

El sistema *Term Functor Logic* representa la silogística usando términos en lugar de elementos lingüísticos de primer orden como variables individuales o cuantificadores.[3] De acuerdo con esta álgebra, las cuatro proposiciones categóricas pueden representarse mediante la siguiente sintaxis:[4]

- SaP := -S+P = -S-(-P) = -(-P)-S = -(-P)-(+S)
- SeP := -S-P = -S-(+P) = -P-S = -P-(+S)
- SiP := +S+P = +S-(-P) = +P+S = +P-(-S)
- SoP := +S-P = +S-(+P) = +(-P)+S = +(-P)-(-S)

Dada esta representación, TFL ofrece un método de decisión correcto, completo y simple para la silogística: una conclusión se sigue TFL-válidamente de un conjunto de premisas si y sólo si *i)* la suma de las premisas es algebraicamente igual a la conclusión y *ii)* el número de conclusiones con cantidad particular (*viz.*, cero o uno) es igual al número de premisas con cantidad particular (cfr. Englebretsen, 1996, p. 167). Así, por ejemplo, si consideramos un silogismo válido, digamos un silogismo tipo aaa-1, podemos ver cómo la aplicación de este método produce la conclusión correcta (Cuadro 2).

	Proposición	Representación
1.	Todos los mamíferos son animales.	-M+A
2.	Todos los perros son mamíferos.	-P+M
⊢	Todos los perros son animales.	-P+A

Cuadro 2. Un silogismo tipo aaa-1

[3] El que podamos modelar inferencias sin elementos lingüísticos de primer orden como variables o cuantificadores no es una novedad (cfr. Quine, 1971; Noah, 1980; Kuhn, 1983), pero el proyecto lógico de Sommers tiene un impacto mayor: que sea posible usar una lógica de términos en lugar de un sistema de primer orden no tiene que ver con el hecho sintáctico, por decirlo de algún modo, de que podemos modelar inferencia sin variables o cuantificadores, sino con la visión más general de que el lenguaje natural es fuente de una lógica natural (cfr. Sommers, 1982; Sommers, 2005; Moss, 2015).

[4] En lo que sigue usamos la presentación de Englebretsen (1996).

En el ejemplo anterior podemos ver claramente cómo funciona este método: *i)* si sumamos las premisas obtenemos la expresión algebraica (−M+A)+(−P+M)=−M+A−P+M=−P+A, de tal modo que la suma de las premisas es algebraicamente igual a la conclusión, y la conclusión es igual a −P+A, en lugar de +A−P, porque *ii)* el número de conclusiones con cantidad particular (cero en este ejemplo) es igual al número de premisas con cantidad particular (cero en este ejemplo).

Esta aproximación algebraica es capaz de representar y modelar proposiciones relacionales, singulares y compuestas sin perder su motivación principal, a saber, que una inferencia es un proceso que ocurre entre términos. Así, por ejemplo, los siguientes casos ilustran cómo representar y modelar inferencias con proposiciones relacionales (Cuadro 3), singulares[5] (Cuadro 4) o compuestas[6] (Cuadro 5).

	Proposición	Representación
1.	Algunos caballos son más rápidos que algunos perros.	$+C_1+(+R_{12}+P_2)$
2.	Los perros son más rápidos que algunos hombres.	$-P_2+(+R_{23}+H_3)$
3.	Lo que es más rápido que lo que es más rápido que los hombres, es más rápido que los hombres.[7]	$-(+R_{12}+(+R_{23}+H_3))+(+R_{13}+H_3)$
⊢	Algunos caballos son más rápidos que algunos hombres.	$+C_1+(+R_{13}+H_3)$

Cuadro 3. Ejemplo con proposiciones relacionales

[5] Bajo el supuesto de que los términos singulares, como *Sócrates*, se representan con minúsculas.

[6] Dado que el razonamiento proposicional se puede representar de la siguiente manera, P:=+[p], Q:=+[q], $\neg P$:=−[p], $P \Rightarrow Q$:=−[p]+[q], $P \wedge Q$:=+[p]+[q] y $P \vee Q$:=−−[p]−−[q], el método se comporta como resolución (cfr. Noah, 2005).

[7] En otras palabras, la relación *ser más rápido* que es transitiva.

	Proposición	Representación
1.	Todo hombre es mortal.	-M+L
2.	Sócrates es hombre.	+s+M
⊢	Sócrates es mortal.	+s+L

Cuadro 4. Ejemplo con proposiciones singulares

	Proposición	Representación
1.	Si *P* entonces *Q*.	-[p]+[q]
2.	*P*.	+[p]
⊢	*Q*.	+[q]

Cuadro 5. Ejemplo con proposiciones compuestas

2.3 Silogística intermedia

Peterson (1979) y Thompson (1982) desarrollaron extensiones para la silogística (SYLL^{+}) añadiendo cuantificadores no clásicos como "la mayoría" (para proposiciones mayoritarias), "muchos" (para proposiciones comunes) y "pocos" (para proposiciones predominantes).[8] Así, la silogística intermedia añade las siguientes proposiciones intermedias: p es la predominante afirmativa (*Pocos* S *no son* P), b es la predominante negativa (*Pocos* S *son* P), t es la mayoritaria afirmativa (*La mayoría de* S *es* P), d es la mayoritaria negativa (*La mayoría de* S *no es* P), k es la común afirmativa (*Muchos* S *son* P) y g es la común negativa (*Muchos* S *no son* P).

Dadas estas nuevas proposiciones, SYLL^{+} añade las siguientes suposiciones de distribución: las proposiciones universales distribuyen su término sujeto; las negativas distribuyen su término predicado; y las proposiciones predominantes, mayoritarias y comunes distribuyen su término sujeto si y sólo si dicho término sujeto es el término menor. Con estas suposiciones básicas, decimos que una conclusión se sigue SYLL^{+}-válidamente de un conjunto de premisas si y sólo si:

1. Reglas de distribución.

   a. El término medio está distribuido por lo menos en una premisa.

[8] Aquí seguimos la presentación de Thompson (1982).

b. Todo término distribuido en la conclusión está distribuido en las premisas.

2. Reglas de cualidad.

a. Existe por lo menos una premisa afirmativa.
b. Si la conclusión es negativa, por lo menos una premisa es negativa.
c. Si una premisa es negativa, la conclusión es negativa.

3. Reglas de cantidad.

a. Si una premisa es predominante, la conclusión no es universal.
b. Si una premisa es mayoritaria, la conclusión no es universal o predominante.
c. Si una premisa es común, la conclusión no es universal, predominante o mayoritaria.

Con estos elementos SYLL^{+} nos permite extender la silogística básica para lidiar con un rango más amplio de inferencias, tanto válidas (Cuadro 6) como inválidas (Cuadro 7). Además, como es de esperarse, la adición de p, t, k, b, d y g incrementa el número de inferencias válidas (Cuadro 8).

	Proposición	Representación
1.	Los humanos son mortales.	HaM
2.	La mayoría de griegos son humanos.	GtH
$\vdash$	La mayoría de griegos son mortales.	GtM

Cuadro 6. Un razonamiento válido: att-1

	Proposición	Representación
1.	La mayoría de humanos son mortales.	HtM
2.	La mayoría de griegos son humanos.	GtH
$\nvdash$	Los griegos son mortales.	GaM

Cuadro 7. Un razonamiento inválido: tta-1

	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
Con "mayoría"	aat att ati ead etd eto	aed add ado ead etd eto	ati eto tai dao	Aed eto tai
Con "muchos"	aak atk aki akk eag etg eko ekg	aeg adg ago agg eag etg eko ekg	aki eko kai gao	Aeg eko kai
Con "pocos"	aap app apt apk api eab epb epd epg epo	aeb abb abd abg abo eab epb epd epg epo	pai epo bao api	Aeb pai epo

Cuadro 8. Extensión de los silogismos válidos en $SYLL^+$ (adaptado de (Thompson, 1982))

2.4 Intermediate Term Functor Logic

Hasta este momento es claro que el tratamiento algebraico de TFL provee un método simple y correcto para modelar la inferencia silogística; sin embargo, desafortunadamente, este tratamiento no incluye inferencias con cuantificadores no-clásicos como "la mayoría", "muchos", o "pocos." Por otro lado, como hemos visto, aunque la silogística intermedia, $SYLL^+$, ofrece un rango más amplio de inferencias, carece de un procedimiento algebraico. Dado este estado de cosas, en esta sección exponemos brevemente algunos detalles del sistema *Intermediate Term Functor Logic* (TFL^+). Para exponer este sistema proponemos una modificación de la sintaxis de TFL con el fin de representar los cuantificadores adicionales de $SYLL^+$ y posteriormente mostramos el método de decisión de TFL^+.

Así pues, para representar las proposiciones intermedias p, t, k, b, d y g dentro del marco de TFL consideremos la sintaxis del Cuadro 9.

Proposición		Representación		Proposición		Representación
SaP	:=	$-S^0+P^0$		SeP	:=	$-S^0-P^0$
SpP	:=	$+S^3+P^0$		SbP	:=	$+S^3-P^0$
StP	:=	$+S^2+P^0$		SdP	:=	$+S^2-P^0$
SkP	:=	$+S^1+P^0$		SgP	:=	$+S^1-P^0$
SiP	:=	$+S^0+P^0$		SoP	:=	$+S^0-P^0$

Cuadro 9. Sintaxis de TFL^+

La razón detrás de esta propuesta sintáctica es simple: de acuerdo con el marco lógico de $SYLL^+$, las proposiciones intermedias p (b), t (d) y k (g) son particulares hasta cierto punto, tal como lo son las proposiciones tipo i (o), lo cual nos obliga a elegir, siguiendo la sintaxis de TFL, una combinación +/+ de términos para las proposiciones afirmativas; y una combinación +/− para las negativas. Sin embargo, esto no es suficiente porque, de acuerdo con $SYLL^+$, las proposiciones p (b), t (d) y k (g) no son convertibles,[9] y por tanto, no son equivalentes a proposiciones de tipo i (o), lo cual nos obliga a usar algún tipo de bandera para denotar explícitamente este hecho: nosotros proponemos el uso de superíndices.

Ahora, de acuerdo con $SYLL^+$, los nuevos cuantificadores implican un cierto orden (p (b) implica t (d), t (d) implica k (g) y k (g) implica i (o)) y por ende los superíndices se usan no sólo como banderas, sino

[9] Así, por ejemplo, t := *La mayoría de mexicanos hablan español* es particular, tal y como i := *Algunos mexicanos hablan español* es particular, pero claramente t no es convertible y por tanto no es equivalente a i: notemos que si *Algunos mexicanos hablan español* entonces seguramente *Algunos hispanohablantes son mexicanos*, pero *La mayoría de mexicanos hablan español* no implica que *La mayoría de hispanohablantes son mexicanos*. Contraejemplos similares pueden ser expuestos para mostrar que las proposiciones p (b), t (d) y k (g) no colapsan en proposiciones tipo i (o).

como niveles ordenados de cuantificación. Esta elección sintáctica tiene las siguientes características: las proposiciones tipo a, e, i y o tienen nivel 0 para denotar el hecho de que se comportan de manera usual, como si no se hubieran hecho modificaciones; los superíndices se añaden a cada término con la finalidad de especificar el detalle de que las proposiciones tipo p, t, k, b, d y g no son convertibles; y además, estos índices nos permiten inducir un orden (3≥2≥1≥0) que indica que a (e) no entraña p (b), t (d), k (g), i (o); pero p (b), t (d), k (g) sí entrañan i (o).[10]

Dada esta representación, la modificación del método de decisión es como sigue: una conclusión se sigue válidamente de un conjunto de premisas si y sólo si *i)* la suma de las premisas es algebraicamente igual a la conclusión, *ii)* el número de conclusiones con cantidad particular (viz., cero o uno) es igual al número de premisas con cantidad particular, y *iii)* el nivel de cuantificación de la conclusión es menor o igual que el máximo nivel de cuantificación de las premisas. Para ejemplificar este procedimiento consideremos un par de ejemplos, uno válido (Cuadro 10), uno inválido (Cuadro 11).

	Proposición	Representación
1.	Los humanos son mortales.	$-H^0+M^0$
2.	La mayoría de griegos son humanos.	$+G^2+H^0$
$\vdash$	La mayoría de griegos son mortales.	$+G^2+M^0$

Cuadro 10. Un razonamiento válido: att-1

	Proposición	Representación
1.	La mayoría de humanos son mortales.	$+H^2+M^0$
2.	La mayoría de griegos son humanos.	$+G^2+H^0$
$\nvdash$	Los griegos son mortales.	$-G^0+M^0$

Cuadro 11. Un razonamiento inválido: tta-1

[10] Esto es diferente de la versión original (cfr. Thompson, 1982): Thompson permite que las proposiciones universales entrañen proposiciones particulares, pero nuestra versión sigue la propuesta de Sommers y Englebretsen, por lo que tenemos que añadir otra regla al marco de SYLL$^+$: si dos premisas son universales, la conclusión no puede ser particular.

Para ilustrar las ventajas de TFL$^+$ frente a TFL y SYLL$^+$ consideremos algunos ejemplos que ilustran el balance entre la complejidad de las reglas de SYLL$^+$ y el poder expresivo de TFL (Cuadros 13-16). Notemos además que, como es de esperarse, la adición de p, t, k, b, d y g incrementa el número de modos correctos y permite las inferencias válidas del Cuadro 12.[11]

	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
Con "mayoría"	att ati etd eto	add ado etd eto	ati eto tai dao	eto tai
Con "muchos"	atk aki akk etg eko ekg	adg ago agg etg eko ekg	aki eko kai gao	eko kai
Con "pocos"	app apt apk api epb epd epg epo	abb abd abg abo epb epd epg epo	pai epo bao api	pai epo

Cuadro 12. Extensión de los silogismos válidos en TFL$^+$

[11] Para los modos válidos que necesitan carga existencial, como aat-1 o aak-1, lo único que necesitamos es añadir la premisa implícita que declara la existencia del término menor, es decir, algo como $+S^0+S^0$: tal adición permite la introducción de los modos válidos que aparecen en el Cuadro 8 pero que están ausentes en el Cuadro 12.

	Proposición	Representación
1.	Muchos ancianos están enfermos.	$+A^1+E^0$
2.	Esta persona es anciana.	$+p^0+A^0$
$\nvdash$	Esta persona está enferma.	$+p^0+E^0$

Cuadro 13. Una inferencia inválida: kii-1

	Proposición	Representación
1.	Muchos alemanes son blancos.	$+A^1+B^0$
2.	Todos los alemanes son europeos.	$-A^0+E^0$
$\nvdash$	Muchos europeos son blancos.	$+E^1+B^0$

Cuadro 14. Una inferencia inválida: kak-3

	Proposición	Representación
1.	Pocos autos son híbridos.	$+A^3-H^0$
2.	Todo auto es caro.	$-A^0+C^0$
$\vdash$	Algunos autos caros no son híbridos.	$+C^0-H^0$

Cuadro 15. Una inferencia válida: bao-3

	Proposición	Representación
1.	Ningún tonto es ciudadano.	$-T^0-C^0$
2.	La mayoría de votantes son ciudadanos.	$+V^2+C^0$
$\vdash$	Muchos votantes no son tontos.	$+V^1-T^0$

Cuadro 16. Una inferencia válida: etg-2

Así pues, como se puede observar, TFL$^+$ es un sistema que, además de ser confiable,[12] tiene las ventajas algebraicas de TFL y las ventajas expresivas de SYLL$^+$.

Con estos elementos estamos en condiciones para introducir, a modo de síntesis, un método analítico de árboles para TFL$^+$.

3. Árboles para TFL⁺

Como es usual, y siguiendo a D'Agostino *et al* (1999; Priest, 2008), decimos que un *árbol* es un grafo conectado acíclico definido por nodos y vértices. El nodo superior es la *raíz*. Los nodos inferiores son *puntas*. Cualquier camino desde la raíz hasta una punta es una *rama*. Para probar la validez de una inferencia se construye un árbol que comienza con una única rama cuyos nodos son premisas y la negación de la conclusión: esta es la *lista inicial*. Entonces se aplican las reglas que nos permiten extender la lista inicial:

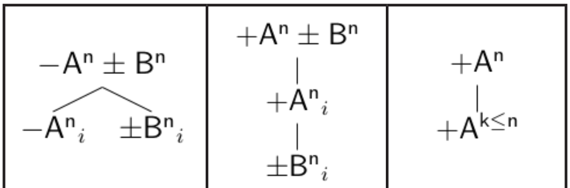


Diagrama 1	Diagrama 2	Diagrama 3

El Diagrama 1 ilustra la regla para las proposiciones de tipo universal; el Diagrama 2, la regla para las proposiciones intermedias; y el Diagrama 3, la regla de ordenamiento para los términos positivos, con $n,k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Notemos, además, que después de aplicar una regla introducimos un subíndice $i \in \{1, 2, 3, ...\}$. Para las proposiciones universales el subíndice puede ser cualquier número natural; para las proposiciones intermedias, el subíndice tiene que ser un nuevo natural si dichas proposiciones no tienen ya un subíndice asociado. Adicionalmente, y siguiendo los principios de TFL, asumimos las siguientes reglas de negación: $-(\pm A) = \mp A$, $-(\pm A \pm B) = \mp A \mp B$ y $-(--A--A) = +(-A)+(-A)$.

Como es costumbre, decimos que un árbol es *completo* si y sólo si toda regla que puede ser aplicada ha sido aplicada. Una rama es *cerrada* si y sólo si hay términos de la forma $\pm A^n_i$ y $\mp A^n_i$ en dos de sus nodos; de otro modo es *abierta*. Una rama cerrada se indica escribiendo ⊥ en su punta; una rama abierta se indica escribiendo ∞. Un árbol es *cerrado* si y sólo si todas sus ramas son cerradas; de otro modo es *abierto*. Así, de nuevo como es usual, A es una consecuencia lógica de un conjunto de premisas Γ (i.e., Γ⊢A) si y sólo si existe un árbol completo y cerrado cuya lista inicial incluye a Γ y la negación de A (i.e., Γ∪{−A}⊢⊥).

De acuerdo con esta propuesta, a continuación mostramos que el método funciona probando algunas formas válidas (Diagramas 4 y 5) e inválidas (Diagramas 6 y 7) de TFL⁺. Adicionalmente, a modo de ejemplo, mostramos algunos casos particulares de silogística básica y relacional. Y por último, ofrecemos algunos elementos para concluir que el método es confiable.

3.1 Ejemplos de silogística intermedia

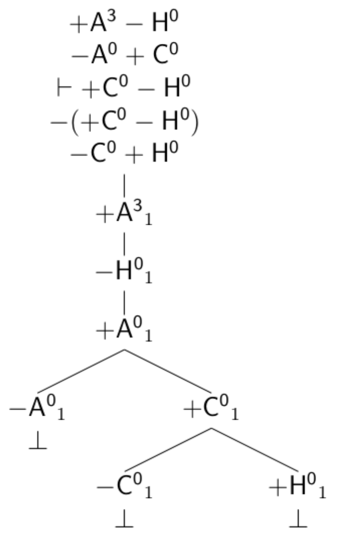


Diagrama 4. Una inferencia válida: bao-3 (*vide* Cuadro 15)

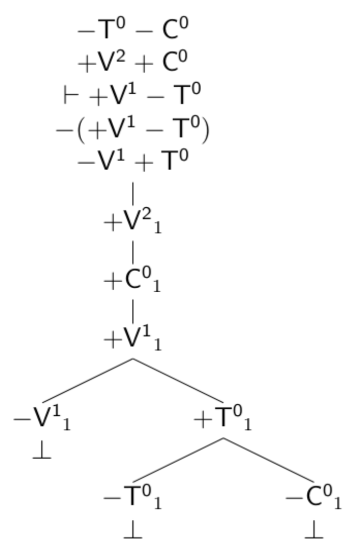


Diagrama 5. Una inferencia válida: etg-2 (*vide* Cuadro 16)

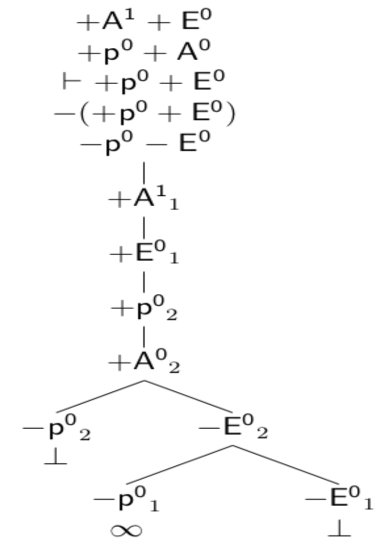


Diagrama 6. Una inferencia inválida: kii-1 (*vide* Cuadro 13)

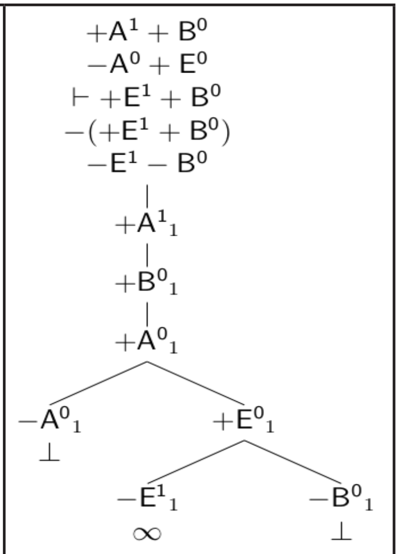


Diagrama 7. Una inferencia inválida: kak-3 (*vide* Cuadro 14)

3.2 Ejemplos de silogística básica

Cuando no usamos superíndices para representar niveles de cuantificación, el método nos permite lidiar con la silogística apodíctica tradicional o básica (Diagramas 8-11).

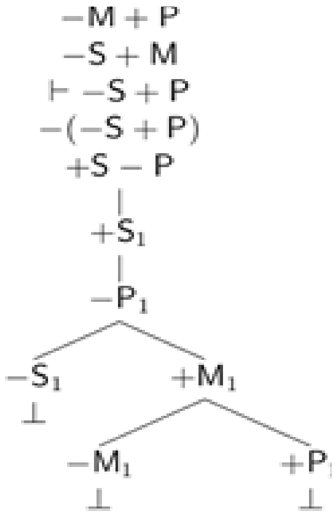


Diagrama 8. aaa-1

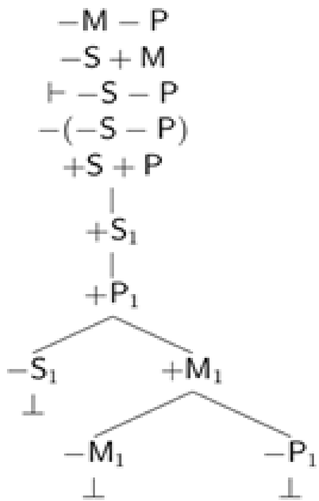


Diagrama 9. eae-1

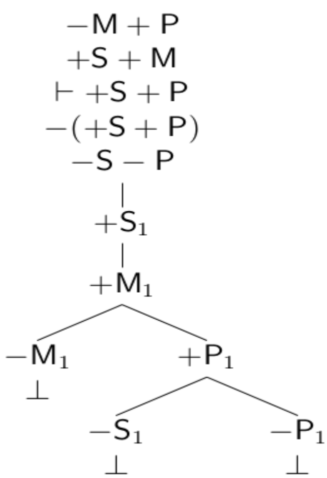


Diagrama 10. aii-1

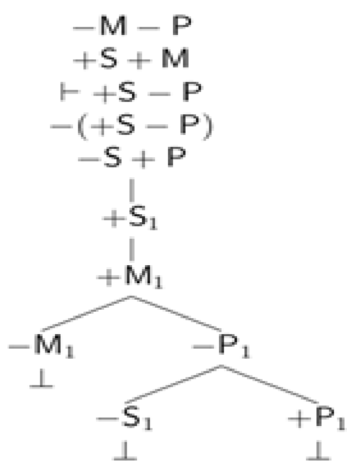


Diagrama 11. eio-1

3.3 Ejemplos de silogística relacional

El método, también, preserva inferencias con proposiciones relacionales. Consideremos, a continuación, el árbol del Diagrama 12 que corresponde al ejemplo del Cuadro 17 (aquí, de nuevo, no necesitamos superíndices para representar niveles de cuantificación).

	Proposición	TFL
1.	Todo niño ama alguna niña.	−B+(+L+G)
2.	Toda niña adora algún gato.	−G+(+A+C)
3.	Todo gato es sarnoso.	−C+M
4.	Quien adora algo sarnoso es tonto.	−(+A+M)+F
⊢	Todo niño ama algo tonto.	−B+(+L+F)

Cuadro 17. Ejemplo de silogística relacional (adaptado de Englebretsen (1996, p. 172))

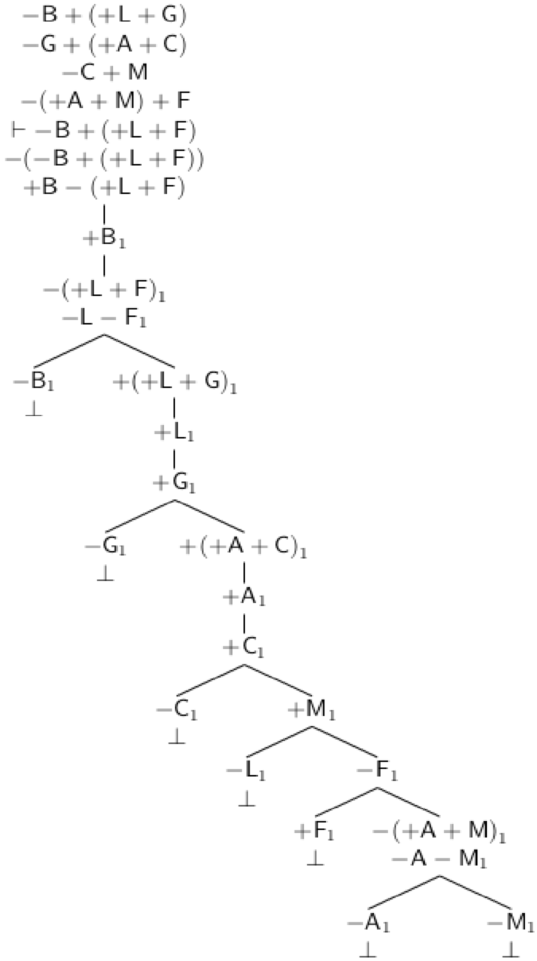


Diagrama 12. Ejemplo de silogística relacional

Consideremos, por último, el árbol del Diagrama 13 que corresponde a un silogismo relacional con cuantificadores no clásicos (Cuadro 18).

	Proposición	TFL⁺
1.	Pocos mexicanos no son populares.	$+M^3+P^0$
2.	Las personas populares favorecen a muchos gobiernos.	$-P^0+(+F^0+G^2)$
$\vdash$	La mayoría de mexicanos favorece a algunos gobiernos.	$+M^2+(+F^0+G^0)$

Cuadro 18. Ejemplo de silogística intermedia relacional

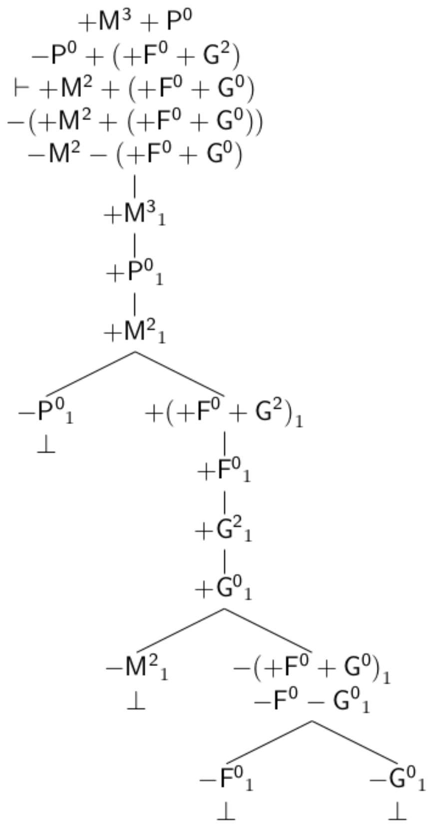


Diagrama 13. Ejemplo de silogística intermedia relacional

3.4 Confiabilidad

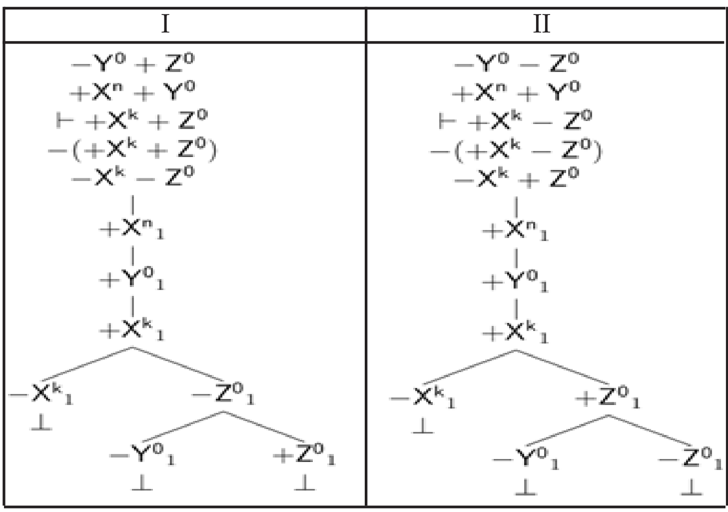
Adicionalmente, podemos comentar que este método de árboles es confiable en la medida en que preserva las inferencias de TFL$^+$, es decir, es confiable en el sentido de que toda inferencia TFL$^+$ válida produce árboles completos y cerrados; y viceversa, toda inferencia que produce un árbol completo y cerrado es una inferencia TFL$^+$ válida.

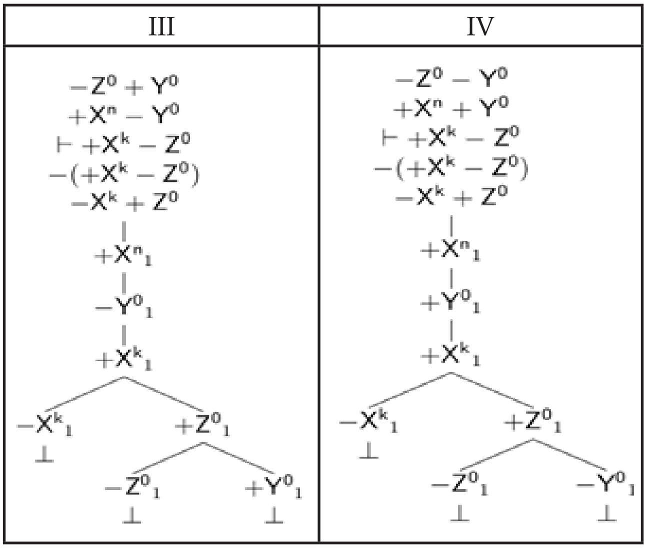
Proposición 1. Toda inferencia TFL$^+$ válida produce un árbol TFL$^+$ completo y cerrado.

Para probar esta proposición consideremos un esquema general con todas las inferencias TFL$^+$ válidas que aparecen en el Cuadro 12 (Cuadro 20). Al aplicar las reglas de los árboles a las inferencias del Cuadro 20 obtenemos árboles completos y cerrados (Cuadros 21 y 22).

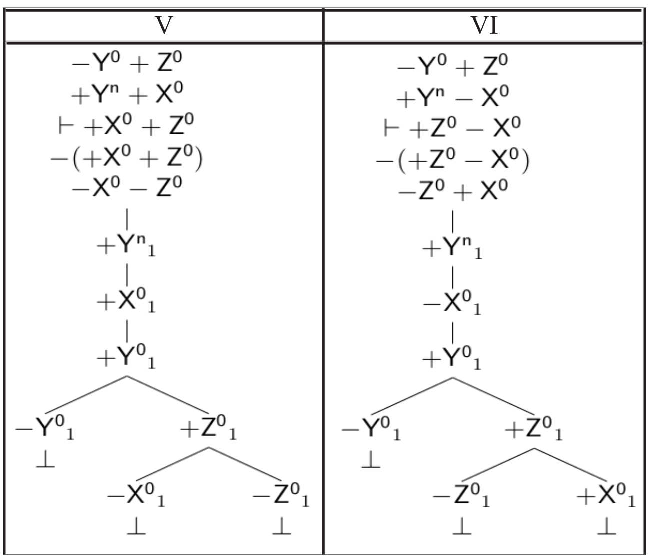
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1.	$-Y^0+Z^0$	$-Y^0-Z^0$	$-Z^0+Y^0$	$-Z^0-Y^0$	$-Y^0+Z^0$	$-Y^0-Z^0$	$+Z^n+Y^0$	$-Z^0-Y^0$
2.	$+X^n+Y^0$	$+X^n+Y^0$	$+X^n-Y^0$	$+X^n+Y^0$	$+Y^n+X^0$	$+Y^n+X^0$	$-Y^0+X^0$	$+Y^n+X^0$
$\vdash$	$+X^k+Z^0$	$+X^k-Z^0$	$+X^k-Z^0$	$+X^k-Z^0$	$+X^0+Z^0$	$+X^0-Z^0$	$+Z^k+X^0$	$+X^0-Z^0$

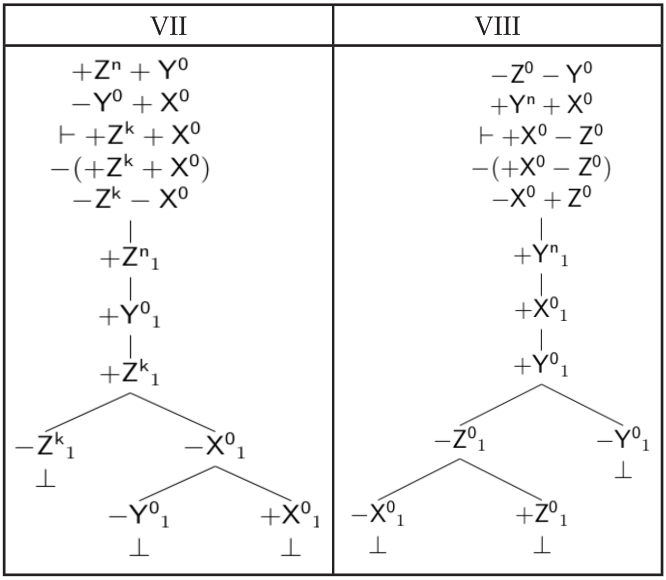
Cuadro 20. Inferencias válidas en TFL$^+$ para $k \leq n$





Cuadro 21. Árboles completos y cerrados de las inferencias TFL+ válidas (parte I)





Cuadro 22. Árboles completos y cerrados de las inferencias TFL⁺ válidas (parte II)

Proposición 2. Toda inferencia que produce un árbol TFL⁺ completo y cerrado es una inferencia TFL⁺ válida.

Para probar esta proposición supongamos que existe una inferencia que produce un árbol TFL⁺ completo y cerrado pero que no es una inferencia TFL⁺ válida. Entonces existe un árbol completo y cerrado cuya lista inicial incluye un conjunto de proposiciones, digamos Γ, y la negación de la conclusión, pero de Γ no podemos construir una prueba de la conclusión usando las condiciones de validez de TFL⁺, es decir, a partir de Γ, o bien la suma de las premisas no es algebraicamente igual a la conclusión, o el número de conclusiones con cantidad particular no es igual al número de premisas con cantidad particular, o el nivel de cuantificación de la conclusión es mayor que el máximo nivel de cuantificación de las premisas.

Para este caso, considerando únicamente las inferencias TFL⁺ válidas que aparecen en el Cuadro 12, existen dos formas generales de conclusión a considerar, a saber, $+X^{k\pm}Z^0$ y $+X^{0\pm}Z^{0.}$ Ahora, como el árbol es completo, las reglas para generar dicho árbol deben haber sido aplicadas; y como el árbol es cerrado, cada árbol debe ser de una de las siguientes siguientes formas (Diagramas 14 y 15):

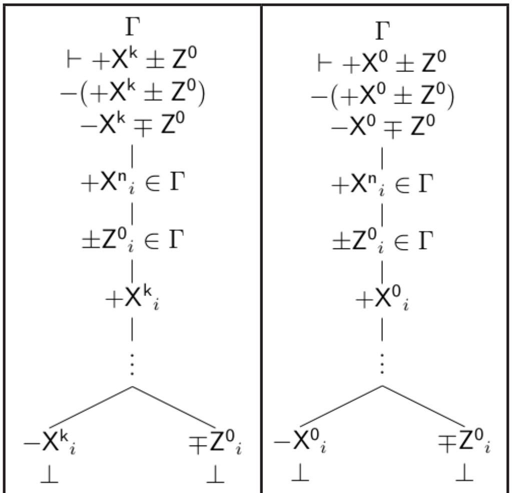


Diagrama 14 **Diagrama 15**

Supongamos, entonces, que tenemos una instancia del árbol del Diagrama 14 pero que su correspondiente inferencia no es válida, es decir, donde $\Gamma^{+}=\Gamma\cup\{-X^{k}\mp Z^{0}\}$, $\Gamma^{+}\vdash\bot$, pero la aplicación de las condiciones de inferencia de TFL^{+} a Γ no nos permite producir $+X^{k}\pm Z^{0}$, con $k\leq n$. Ahora bien, siguiendo las ramas del árbol del Diagrama 14 observamos que las puntas están cerradas, por lo que en nodos previos el árbol tiene que incluir algo de la forma $+X^{k}$ y $\pm Z^{0}$, es decir, $\Gamma=\{\ldots, +X^{k,} \pm Z^{0}, \ldots\}$. Pero si esto es así, si aplicamos la regla *i)* (i.e. la suma) a Γ obtenemos algo de la forma $+X\pm Z$, y no al revés, por la condición *ii)* (cantidad de particulares); y por último, por la condición *iii)* (nivel de cuantificación), la conclusión tiene que ser algo de la forma $+X^{k}\pm Z^{0}$ con $k\leq n$. Sin embargo, esto último contradice la suposición de que no podemos construir una prueba de tal conclusión usando las condiciones de inferencia de TFL^{+}. Lo mismo ocurre para el árbol del Diagrama 15 que es un caso particular del Diagrama 14 cuando k=0.

4. Conclusiones

En esta contribución hemos intentado ofrecer un método analítico de árboles para el sistema TFL^{+}. Como consecuencia de esta meta podemos extraer las siguientes observaciones:

1. El método de árboles que hemos propuesto evita la condición *ii)* (y *iii)*) del método de decisión de la silogística básica, relacional (e intermedia), a saber, que el número de premisas particulares debe ser igual al número de conclusiones particulares. Esto posibilita la aplicación general del método para cualquier número de premisas y niveles de cuantificación.
2. El método preserva el poder de TFL con respecto a inferencias relacionales, transformaciones de voz activa-pasiva, cambios asociativos y simplificaciones poliádicas, lo cual le da a este procedimiento una ventaja competitiva sobre (los árboles de) la lógica clásica de primer orden.
3. El método preserva el poder de TFL^{+} para lidiar con inferencias con cuantificadores no clásicos, lo cual le da una ventaja competitiva no sólo sobre (los árboles de) la lógica clásica de primer orden, sino sobre (los árboles de) TFL.
4. Debido a la peculiar álgebra de TFL, no necesitamos usar reglas de cuantificación ni skolemización, lo cual puede ser útil en relación con la programación lógica y la resolución.
5. El número de reglas de inferencia se reduce a un conjunto más pequeño, simple y uniforme de reglas que preserva las capacidades de TFL y TFL^{+} en diferentes contextos inferenciales (silogística básica, silogística relacional, silogística intermedia y lógica proposicional[13]).

Por todas estas razones, creemos que este método no es sólo novedoso, sino también prometedor, no nada más como otra herramienta didáctica, sino como un dispositivo de investigación:

1. Por ejemplo, el método puede ser útil para estudiar razonamiento modal, probabilista o numérico en la medida en que puede ser usado para representar silogística modal (cfr. Englebretsen,

[13] Para el caso proposicional usamos las mismas normas de los árboles para la silogística pero suprimimos cualquier tipo de índice.

1988; Thom, 1996; Rini, 1998; Malink, 2006), probabilística (cfr. Thompson, 1986) o numérica (cfr. Murphree, 1998).

2. El método, además, contribuye al estudio del razonamiento visual en tanto que encuentra un lugar natural dentro de un proyecto de razonamiento diagramático (cfr. Englebretsen, 1991; Englebretsen, 1996; Castro-Manzano y Pacheco-Montes, 2018).
3. Como el método puede ser útil para el estudio psicológico de la inferencia puede usarse para aproximar una descripción psicológica más rica del razonamiento en lenguaje natural (cfr. Keil, 2005; Khemlani y Johnson-Laird, 2012).
4. Además, en la medida en que puede utilizarse para adaptar o modificar motores inferenciales para bases de datos aristotélicas (cfr. Mozes, 1989), el método tiene impacto en la programación lógica (cfr. Castro-Manzano, Lozano-Cobos y Reyes-Cárdenas, 2018).
5. Por último, el estudio de este método tiene relevancia para la historia y la filosofía de la lógica en tanto que promueve una revisión de las lógicas de términos (cfr. Veatch, 1970; Sommers, 1982; Englebretsen, 1996; Englebretsen y Sayward, 2011) como herramientas que pueden ser más interesantes y poderosas de lo que originalmente podríamos creer (cfr. Carnap, 1930; Geach, 1962 y 1980).

Agradecimientos

Agradecemos a los árbitros anónimos por sus precisas correcciones y útiles comentarios; y al apoyo económico del Fondo de Investigación UPAEP.

Referencias

Castro-Manzano, J. M. (2018). A Tableaux Method for Term Logic. LANMR 2018, 2264, 1-14.

____ (2019). An Intermediate Term Functor Logic. *Argumentos, Revista de Filosofía*, 11(22), 17-31.

Castro-Manzano, J. M., Lozano-Cobos, L. I. y Reyes-Cárdenas, P. O. (2018). Programming with Term Logic. *BRAIN. Broad Research in Artificial Intelligence and Neuroscience*, 9(3), 22-36.

Castro-Manzano, J. M. y Pacheco-Montes, J. R. (2018). Moded Diagrams for Moded Syllogisms. En P. Chapman, G. Stapleton, A. Moktefi,

S. Perez-Kriz y F. Bellucci (eds.), *Diagrammatic Representation and Inference*. *Diagrams 2018*. (pp. 757-760). Lecture Notes in Computer Science, vol. 10871. Cham: Springer.

Carnap, R. (1930). Die alte und die neue Logik. *Erkenntnis*, 1, 12-26.

D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hähnle, R. y Posegga, J. (1999). *Handbook of Tableau Methods*, Heidelberg: Springer.

Englebretsen, G. (1987). *The New Syllogistic*. Nueva York-Berna: Peter Lang.

___ (1988). Preliminary Notes on a New Modal Syllogistic. *Notre Dame Journal of Formal Logic,* 29(3), 381-395.

___ (1991). Linear Diagrams for Syllogisms (with Relationals). *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 33(1), 37-69.

___ (1996). *Something to Reckon with: The Logic of Terms*. Ottawa: University of Ottawa Press.

Englebretsen, G. y Sayward, C. (2011). *Philosophical Logic: An Introduction to Advanced Topics*. Londres: Bloomsbury Academic.

Geach, P. (1962). *Reference and Generality: An Examination of Some Medieval and Modern Theories*. Ithaca: Cornell University Press.

___ (1980). *Logic Matters*. Oakland: University of California Press.

Keil, F. (2005). Exploring Boundary Conditions on the Structure of Knowledge: Some Nonobvious Influences of Philosophy on Psychology. En David S. Oderberg (ed.), *The Old New Logic: Essays on the Philosophy of Fred Sommers*. (pp. 67-84). Londres: Bradford.

Khemlani, S. y Johnson-Laird, P. N. (2012). Theories of the Syllogism: A Meta-Analysis. *Psychological Bulletin*, 427-457.

Kuhn, S. (1983). An Axiomatization of Predicate Functor Logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24(2), 233-241.

Malink, M. (2006). A Reconstruction of Aristotle's Modal Syllogistic. *History and Philosophy of Logic*, 27, 95-141.

Moss, L. (2015). Natural Logic. En S. Lappin y C. Fox (eds.), *The Handbook of Contemporary Semantic Theory*. (pp. 559-592). Hoboken: John Wiley & Sons.

Mozes, E. (1989). A Deductive Database Based on Aristotelian Logic. *Journal of Symbolic Computation*, 7(5), 487-507.

Murphree, W. (1998). Numerical Term Logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 39(3), 346-362.

Noah, A. (1980). Predicate-functors and the Limits of Decidability in Logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 21(4), 701-707.

___ (2005). Sommers's Cancellation Technique and the Method of Resolution. En David S. Oderberg (ed.), *The Old New Logic: Essays on the Philosophy of Fred Sommers*. (pp. 169- 182). Londres: Bradford.

Peterson, P. L. (1979). On the Logic of "few", "many", and "most". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 20, 155-179.

Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic: From If to Is*. Cambridge: Cambridge University Press.

Quine, W. V. O. (1971). Predicate Functor Logic. En J. E. Fenstad (ed.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*. (pp. 309-316). Ámsterdam: North-Holland.

Rini, A. A. (1998). Is There a Modal Syllogistic? *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 39(4), 554-572.

Russell, B. (1937). *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz: With an Appendix of Leading Passages*. Londres: G. Allen & Unwin.

Sommers, F. (1967). On a Fregean Dogma. En I. Lakatos (ed.), *Problems in the Philosophy of Mathematics*. (pp. 47- 81). Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 47. Ámsterdam: Elsevier.

___ (1982). *The Logic of Natural Language*. Oxford: Oxford University Press.

___ (2005). Intellectual Autobiography. En David S. Oderberg (ed.), *The Old New Logic: Essays on the Philosophy of Fred Sommers*. (pp. 1-24). Londres: Bradford.

Sommers, F. y Englebretsen, G. (2000). *An Invitation to Formal Reasoning: The Logic of Terms*. Farnham: Ashgate.

Staal, J. F. (1969). Formal Logic and Natural Languages (a Symposium). *Foundations of Language*, 5(2), 256-284.

Thom, P. (1996). *The Logic of Essentialism. An Interpretation of Aristotle's Modal Syllogistic*. Dordrecht: Kluwer.

Thompson, B. (1982). Syllogisms using "few", "many", and "most". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 23(1), 75-84.

___ (1986). Syllogisms with Statistical Quantifiers. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 27(1), 93-103.

Veatch, H. B. (1970). *Intentional Logic: A Logic Based on Philosophical Realism*. Hamden: Archon Books.