Revista Integración
ISSN: 0120-419X
Universidad Industrial de Santander

Sobre el índice de acotamiento de grupos topológicos

Ramírez-Páramo, Alejandro; Tenorio, Jesús F.
Sobre el índice de acotamiento de grupos topológicos
Revista Integración, vol. 36, núm. 2, 2018
Universidad Industrial de Santander
Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=327062424002
DOI: 10.18273/revint.v36n2-2018002

Artículos originales

Sobre el índice de acotamiento de grupos topológicos

On the index of boundedness of topological groups

Alejandro Ramírez-Páramo [a]
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Mexico
Jesús F. Tenorio [b*] jtenorio@mixteco.utm.mx
Universidad Tecnológica de la Mixteca, Mexico

Resumen: Estas notas proporcionan una breve introducción al índice de acotamiento en grupos topológicos. Damos, de manera casi autosuficiente, las herramientas necesarias de funciones cardinales, así como los hechos básicos de la teoría de grupos topológicos. *MSC2010:* 54H11, 54A25, 22A05, 54D20.

Palabras clave: Función cardinal, grupo topológico, índice de acotamiento.

Abstract: These notes provide a brief introduction to the index of boundedness in topological groups. We give, in an almost self-contained way, the necessary tools of cardinal functions, as well as the basic facts of the theory of topological groups.

Keywords: Cardinal function, topological group, index of boundedness.

Revista Integración, vol. 36, núm. 2, 2018

Universidad Industrial de Santander

Recepción: 10 Mayo 2018
Aprobación: 01 Agosto 2018

DOI: 10.18273/revint.v36n2-2018002

1. *Introducción*

En el presente artículo abordamos el tema de las funciones cardinales en grupos topológicos, enfocándonos en el índice de acotamiento. Como se sabe, la teoría de los grupos topológicos conjuga dos ramas de la matemática: la Teoría de grupos y la Topología. El concepto matemático de grupo topológico en sí fue aceptado a principios de los años treinta del siglo XX con la publicación de diversos artículos [14], y desde entonces se ha convertido en un área de gran interés para su estudio. En palabras, un grupo topológico es un grupo abstracto dotado con una topología que hace a las operaciones del grupo funciones continuas. Como podemos notar en [14], la teoría de los grupos topológicos es bastante extensa e interesante. Más aún, el estudio de las funciones cardinales dentro de los grupos topológicos despierta gran interés en vista de que su comportamiento en estos espacios es, desde un cierto punto de vista, mucho mejor que en espacios topológicos, incluso compactos. Ejemplo de esto es que en la clase de los grupos topológicos el carácter y el n-carácter, así como el peso y el n-peso, coinciden, cuando en general no sucede en espacios topológicos, aún en presencia de compacidad.

Una función cardinal importante definida para grupos topológicos es el índice de acotamiento o también llamado índice de estrechez, función que denotamos por *ib*. En este artículo exponemos algunas de sus propiedades básicas que consideramos útiles y representativas, dentro de la teoría de invariantes cardinales para grupos topológicos. Por ejemplo, la función *ib* nos ayuda a obtener cotas para la cardinalidad de un grupo topo-lógico; más aún, el índice de acotamiento refleja fuertemente todo cardinal infinito en la clase de los grupos topológicos.

Destacamos que para poder hacer accesibles los resultados de este escrito a un amplio número de lectores, presentamos las definiciones y, en buena medida, las demostraciones de los hechos utilizados referentes a funciones cardinales topológicas, así como un resumen de los conceptos de grupos topológicos. Con esto en mente, hemos dividido el artículo en cinco secciones. Después de la Introducción, en la Sección 2 recordamos las notaciones básicas de espacios topológicos y damos la mayor parte de las definiciones de las funciones cardinales, globales y locales, así como las demostraciones de casi todas las igualdades y desigualdades requeridas en el desarrollo del trabajo. La Sección 3 está dedicada a presentar lo fundamental de grupos topológicos para la lectura del trabajo. En la Sección 4 brindamos los resultados sobre el índice de acotamiento que, como hemos mencionado, consideramos que son los más útiles y representativos de esta función cardinal. Finalmente, en la Sección 5 exponemos un resultado de la teoría de reflejo en grupos topológicos para la función *ib*. Los lectores interesados en este tema pueden ampliar su lectura en las referencias [2], [11], [12], [13], [14], [16], en las cuales los autores han basado principalmente este estudio.

2. *Funciones cardinales*

Sea (X, T) un espacio topológico. Dado un punto x # X, llamamos *vecindad* de x en X a un conjunto abierto U # X tal que x # U. Denotamos por V_X (x) la colección de todas las vecindades de x en el espacio X. Una familia B de subconjuntos de X es una *base* para T, si B # T y para todo x # X y cualquier V # V_X (x), existe U # B tal que x # U # V .Si x # X, decimos que una familia B_x # V_X (x) es una *base local* de x en X, si para toda V # $Vx(x)$, existe U # B_x tal que x # U # V. Denotamos por A y por A^d la clausura de A en X y el conjunto derivado de A, respectivamente. Un subconjunto D # X es *denso* en X si $\overline{D} = X$. Dada una familia de espacios $\{X_\alpha \mid \alpha$ # $\lambda\}$, consideramos el espacio producto $\Pi_{\alpha\#\lambda}X_\alpha$ con la topología producto o Tychonoff; esto es, aquella topología que tiene por base la familia $\mathcal{B} = \{\bigcap_{\alpha\in\lambda_1} pr_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid \lambda_1 \subseteq \lambda$ es finito y U_α abierto en X_α, para cada α # $\lambda_1\}$, donde $pr_\alpha : \Pi_{\alpha\in\lambda} X_\alpha \to X_\alpha$ es la proyección sobre el factor X_α.

Para poder definir las primeras funciones cardinales que utilizamos a lo largo del trabajo, señalamos que la notación empleada es la misma que se usa en [8], [10]. El símbolo ω denota tanto el menor ordinal como el cardinal infinito. Si K es un cardinal, entonces K+ denota el menor cardinal mayor que K y le llamamos *sucesor* de K. Cada ordinal es el conjunto de los ordinales menores que él; de donde si β y α son ordinales, entonces $\beta < \alpha$ y β # α significan lo mismo. Dado un conjunto E y un número cardinal K, denotamos con P(E) el conjunto potencia de E. La colección de todos los subconjuntos de E con cardinalidad ≤ K (respectivamente, con cardinalidad = K), la denotamos con $[E]^{\leq K}$ (respectivamente, con $[E]^{K}$).

Una función cardinal es una función ϕ, de la clase de los espacios topológicos (o de una subclase bien definida) hacia la clase de los cardinales infinitos, de tal forma que si X y Y son espacios homeomorfos, entonces $\phi(X) = \phi(Y)$. Un ejemplo sencillo de una función cardinal es la función cardinalidad de un espacio X, denotada por $|X|$, y que es igual al número de elementos de X más ω. Decimos que una función cardinal φ es monótona si para todo subespacio Y de X, se cumple $\phi(Y) \leq \phi(X)$.

Recordemos que una *familia celular* en un espacio topológico X es una colección no vacía de conjuntos abiertos no vacíos y ajenos por pares. Entendemos por *red* en X una familia N # $P(X)$ tal que todo conjunto abierto no vacío de X es la unión de elementos de N.

Definición 2.1. Sea X un espacio topológico. Se define:

- La *amplitud* de X como $s(X) = \sup\{|A| \mid A \subseteq X \text{ y } A = A \setminus A^d\} + \omega$.
- La *celularidad* de X como $c(X) = \sup\{|\mathcal{F}| \mid \mathcal{F} \text{ es familia celular en } X\} + \omega$.
- La *densidad* de X como d(X) = mín{|D| | D # X y D es denso en X} + ω.
- La *extensión* de un espacio X como $e(X) = \sup\{|A| \mid A \subseteq X,\ A = A \setminus A^d \text{ y } A = \overline{A}\} + \omega$.
- El *grado o número de Lindelöf* de X, denotado por L(X), como el menor cardinal infinito K tal que toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta de cardinalidad ≤ K.
- El *número débil de Lindelöf* de *X,* denotado *wL(X),* como el menor cardinal infinito *K* tal que para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de *X,* existe $\mathcal{W} \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa}$ tal que $X = \overline{\bigcup \mathcal{W}}$.
- El *peso* de X como w(X) = mín{|B| | B es base de X} + *w*.
- El *peso red* de X como nw(X) = mín{|N| | N es red para X} + *w*.

El resultado que exponemos a continuación está en [5, Theorem 3.2-(3)], del cual incluimos una demostración. Requerimos recordar los conceptos siguientes: orden parcial, cota superior de un conjunto, elemento maximal y cadena; además, el Lema de Zorn.

Lema 2.2. *Sean X un espacio topológico, n = c(X) y F una colección de abiertos no vacíos en* X. *Existe* $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ *tal que* $|\mathcal{F}'| \leq \kappa$ *y* $\bigcup \mathcal{F} \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{F}'}$.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ la colección de los abiertos no vacíos en X, los cuales son subconjuntos de algún elemento de F. Sea P la colección de los subconjuntos G # $\mathcal{U}$ tal que *G* es familia celular en X. Nótese que si U # $\mathcal{U}$, entonces G = {U} # P. De donde, P es no vacía. Más aún, no es difícil verificar que toda cadena en (P, #) tiene una cota superior en P. De aquí, por el Lema de Zorn, P tiene un elemento maximal, digamos $\mathcal{U}$ '. Puesto que $\mathcal{U}$ ' es una familia celular en *X,* |$\mathcal{U}$ '| ≤ *k*. Además, si $x \in (\bigcup \mathcal{F}) \setminus (\overline{\bigcup \mathcal{U}'})$, entonces *x* # *U,* para algún $U \in \mathcal{F}$ y $x \notin \overline{\bigcup \mathcal{U}'}$. Luego, existe una vecindad abierta U_x de *x* tal

que $U_x \cap (\bigcup \mathcal{U}') = \emptyset$. Sea $V = U \cap U_x$. Notemos que, por construcción, V # $\mathcal{U}$; además, $V \cap (\bigcup \mathcal{U}') = \emptyset$. De aquí que la familia $\mathcal{U}'' = \mathcal{U}' \cup \{V\}$ es una familia celular tal que $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}'' \neq \mathcal{U}$, lo que contradice la maximalidad de $\mathcal{U}$ '. Por tanto, $\bigcup\mathcal{F} \subseteq \overline{\bigcup\mathcal{U}'}$. Sea F' la familia formada por los U # F para los cuales existe V # $\mathcal{U}$ ', con V # U. Claramente $|\mathcal{F}'| \leq \kappa$ y $\bigcup\mathcal{F} \subseteq \overline{\bigcup\mathcal{F}'}$.

En la Proposición 2.3 recordamos algunas relaciones bien conocidas entre las funciones cardinales dadas en la Definición 2.1. Las utilizamos más adelante y, con el afán de hacer este trabajo lo más autosuficiente posible, incluimos una demostración.

Proposición 2.3. *Dado un espacio topológico X, se cumple lo siguiente:*

(a) $d(X) \leq w(X)$.

(b) $c(X) \leq d(X)$.

(c) $c(X) \leq s(X)$.

(d) $L(X) \leq nw(X) \leq w(X)$.

(e) $wL(X) \leq L(X)$ *y* $wL(X) \leq c(X)$.

(f) $e(X) \leq L(X)$.

Demostración. (a) Sea B_0 una base para X tal que |B0| = mín{|B| | B es base de X}. Entonces $|B_0| + \omega = w(X)$. Consideremos el conjunto D0 = {x_B | B # B_0}. Es fácil ver que D_0 es denso en X. Así, mín{|D| | D # X y D es denso en X} ≤ $|D_0|$. Además, como $|D_0| \leq |B_0|$, obtenemos que $d(X) \leq |D_0| + \omega \leq |B_0| + \omega = w(X)$. Por lo tanto, d(X) ≤ w(X).

(b) Sea D_0 un subconjunto denso de X tal que $|D_0|$ = mín{|D| | D # X y D es denso en X}, y supongamos que existe al menos una familia celular F en X. Notemos que $|D_0| + \omega = d(X)$. Como D_0 es denso en X, para cualquier U # F, existe x_U # U # D_0. Sea A = {x_U | U # F}. Se tiene que |A| ≤ $|D_0|$. Además, es claro que si U ≠ V , entonces $x_U \neq x_V$. Luego, |F| = |A|. Por lo que |F| ≤ $|D_0|$ y, así, |F| ≤ d(X). Se sigue que d(X) es cota superior de {|F| | F es familia celular en X} + ω. Por lo tanto, c(X) ≤ d(X).

(c) Sea F una familia celular en X. Para cada F # F, consideremos x_F # F. Luego, el conjunto E = {x_F | F # F} es no vacío y tal que $E = E \setminus E^d$. Además, |E| = |F|. De aquí, |F| + ω ≤ s(X). Por lo tanto, c(X) ≤ s(X).

(d) La demostración de que nw(X) ≤ w(X) se sigue del hecho de que toda base es una red. Para demostrar que L(X) ≤ nw(X), veamos que se cumple lo siguiente:

(#) Si nw(X) ≤ k entonces para cualquier colección de abiertos en X, {U_s | s # S}, existe S_0 # $[S]^{\leq k}$ tal que $\bigcup\{U_s \mid s \in S_0\} = \bigcup\{U_s \mid s \in S\}$.

En efecto, tomemos una red N para X tal que |N | ≤ nw(X) y consideremos el conjunto N_0 = {N # N | N # Us para algún s # S}. Para cada N # N_0, fijamos r(N) # S, de tal forma que N # $U_{r(N)}$. Esto nos define una función r : N → S. Ponemos $S_0 = r(N_0)$. Veamos que el conjunto S_0 cumple con lo requerido en (#). Claramente $|S_0| \leq |N_0| \leq nw(X)$. Además, si $x \in \bigcup\{U_s \mid s \in S\}$, entonces x # U_s para algún s # S. Como N es una red, existe N # N tal que x # N # U_s. Para tal N hemos fijado r(N) # S tal que N # $U_{r(N)}$. Luego $x \in U_{r(N)} \subseteq \bigcup\{U_s \mid s \in S_0\}$. Así, $\bigcup\{U_s \mid s \in S\} \subseteq \bigcup\{U_s \mid s \in S_0\}$. Por lo tanto, $\bigcup\{U_s \mid s \in S\} = \bigcup\{U_s \mid s \in S_0\}$, y la afirmación en (#) queda demostrada. Ahora es inmediato de (#) que L(X) ≤ nw(X).

(e) La desigualdad wL(X) ≤ L(X) se obtiene directamente de las definiciones. Por otra parte, del Lema 2.2 tenemos que wL(X) ≤ c(X).

(f) Sean K = L(X) y A un subconjunto cerrado y discreto en X. Demostremos que |A| ≤ K. Supongamos que |A| > K. Para cada x # A, existe un abierto U_x en X tal que A # U_x = {x}. Puesto que A es cerrado, X \ A es abierto. Así, la colección

{U_x | x # A}#{X \ A}

es una cubierta abierta de X que no admite subcubiertas de cardinalidad menor que | A| . Esto es una contradicción. Por tanto, e(X) ≤ L(X). 0

Cabe señalar que un aspecto común entre las funciones cardinales definidas anteriormente es que son de carácter global; esto es, su definición depende o está dada a través de propiedades globales del espacio. Por otra parte, las siguientes funciones (excepto el π-peso) son de carácter local, es decir, su definición concierne a propiedades locales y puntuales del espacio.

Recordemos que dado un espacio topológico X, una colección B de subconjuntos abiertos no vacíos en X es una *π-base* para X, si para cualquier abierto U en X, existe V # B tal que V # U. Claramente toda base de un espacio X es una π-base para X. Por otro lado, dado un punto p # X y una colección B_p de conjuntos abiertos no vacíos en X, se dice que B_p es *π-base local* de p, si para toda U # VX(p), existe V # Bp tal que V # U. Notemos que toda base local de un espacio X es una π-base local de X. Dado x # X, una pseudobase local de x es una colección V de subconjuntos abiertos en X tal que para cualquier V # V, se cumple que $x \in V$ y $\bigcap\{V \mid V \in \mathcal{V}\} = \{x\}$.

Definición 2.4. Sea X un espacio topológico. Se define:

El carácter de un punto x # X como (x,X) = mín{|Bx| | Bx es base local de x}, y el carácter de X como (X) = sup{ (x,X) | x # X} + ω.

El π-carácter de un punto x # X como π_X (x,X) = mín{|Bx| | Bx es π-base local de x}, y el π-carácter de X como π_X(X) = sup{π_X (x,X) | x # X} + ω.

El π-peso de X como πw(X) = mín{|B| | B es π-base de X} + ω.

Si X es un espacio T_1, se define el *pseudocarácter de un punto* x # X como ψ(x,X) = mín{|V| | V es pseudobase local de x}. Además, el *pseudocarácter* de X se define como ψ (X) = sup{ ψ(x,X) | x # X} + ω.

En la Proposición 2.5 encontramos relaciones que se cumplen entre algunas funciones cardinales, locales y globales. Serán empleadas posteriormente.

Proposición 2.5. *Dado un espacio topológico X, se cumple:*

(a) $\chi(X) \leq w(X)$.

(b) $d(X)\chi(X) \leq w(X)$.

(c) $L(X)\chi(X) \leq w(X)$.

(d) $\pi\chi(X) \leq \chi(X)$.

(e) $d(X) \leq \pi w(X)$.

(f) $\pi\chi(X) \leq \pi w(X)$.

(g) $\pi w(X) \leq w(X)$.

*Demostración. (*a) Sean x_0 # X y B_0 una base para X tal que |B_0| = mín{| B| |B es base de X}. Así, |B_0| + ω = w(X). Sea B(x_0) = {B # B_0 | x_0 # B}. Se tiene que B(x_0) es una base local de x_0. Luego, (x_0,X) ≤ |B(x_0)|. Como | B(x_0)| ≤ |B_0|, obtenemos que (x_0,X) ≤ |B_0|. De aquí, sup{ (x,X) | x # X} ≤ |B_0|. Luego, (X) ≤ |B_0|+ω. Por lo tanto, (X) ≤ w(X).

(b) Por (a) previo se sigue que d(X)x(X) ≤ d(X)w(X). Por lo tanto, de la Proposición 2.3-(a), obtenemos que d(X)x(X) ≤ w(X).

(c) Por (a) previo notamos que L(X)x(X) ≤ L(X)w(X). De aquí, en vista de la Proposición 2.3-(d), concluimos que L(X)x(X) ≤ w(X).

(d) Se sigue del hecho de que toda base local de un espacio X es una π-base local de X.

(e) Sea B_0 una π-base para X tal que $|B_0|$ = mín{|B| | B es π-base de X}. Se sigue que $|B_0| + \omega = \pi w(X)$. Consideremos el conjunto D_0 = {xV | V # B_0}. Es fácil ver que D_0 es denso en X. Así, mín{|D| | D # X y D es denso en X} ≤ $|D_0|$. Además, como $|D_0| \leq |B_0|$, obtenemos que $d(X) \leq |D_0| + \omega \leq |B_0| + \omega = \pi w(X)$. Por lo tanto, $d(X) \leq \pi w(X)$.

(f) Sea B una π -base de X tal que $|B| \leq \pi$ w(X). Sea x un punto arbitrario en X. Puesto que B es π-base, para cada U # $V_X(x)$, existe V # B de tal forma que V # U. Denotemos por B_x la colección de los elementos de B con esta propiedad. Claramente, B_x # B y B_x es una π-base. Notemos que (x,X) ≤ $|B_x| \leq |B| \leq \pi w(X)$. Así, dado que x lo tomamos de forma arbitraria, tenemos que $\pi w(X)$ es cota superior del conjunto { π_X (x,X) | x # X}, y por lo tanto π_X (X) = sup{ π_X (x,X) | x # X} ≤ $\pi w(X)$. Esto es, $\pi_X (X) \leq \pi w(X)$.

(g) Es consecuencia de que toda base de un espacio X es una π-base para X.

Terminamos la sección con lo siguiente. Para un espacio X de Tychonoff, se dice que un espacio de Tychonoff Y es una *condensación* de X si existe una función biyectiva *f*: X → Y tal que f es continua. El i-peso de X se define como iw(X) = mín{w(Y) |Y es una condensación de X}.

Proposición 2.6. *Para cualquier espacio de Tychonoff* X *se cumple que* $|X| \leq 2^{iw[X]}$.

Demostración. Puesto que X es T_0, se sigue que $|X| \leq 2^{nw[X]}$ (véase pág. 17 de [8]). Luego, por la parte (d) de la Proposición 2.3, $|X| \leq 2^{w[X]}$. Sea K = iw(X) y sea Y una condensación de X tal que K = w(Y). Notemos que |X| = |Y|. Además, como Y es de Tychonoff, $|Y| \leq 2^{w[Y]}$. Así, $|X| \leq 2^K$. Es decir, $|X| \leq 2^{iw[X]}$. 0

3. Grupos topológicos

Ahora presentamos algunas definiciones y resultados de la teoría de los Grupos topológicos, que utilizamos en el desarrollo del artículo. Las demostraciones de los hechos indicados a continuación, así como un estudio más detallado sobre grupos topológicos, pueden consultarse en [2], [15].

Recordemos que un grupo algebraico (G,) dotado con una topología T se llama *grupo topológico* cuando las funciones cuya regla de correspondencia es (x, y) → x · *y* y x - x^{-1} son continuas respecto a *T*. Esto último es equivalente a decir que la función $\phi : G\times G \to G$ definida por $\phi(x, y) = x \cdot y^{-1}$ es continua. En lo que sigue, escribimos *xy* en lugar de x · y. Dados un grupo topológico G y $n \in \mathbb{N}$, , ponemos x^n para el producto de x consigo mismo *n* veces. Denotamos por e_G el elemento identidad de *G*. En caso de que el espacio *G* quede subentendido, escribimos simplemente *e*. De acuerdo a nuestras notaciones que hemos indicado para espacios topológicos, denotamos por *VG(e)* la colección de todas las vecindades de la identidad en *G*. Dados dos subconjuntos *A y B* de un grupo topológico

G, se define el producto de *A y B* en *G* como el conjunto *AB = {xy | x # A, y # B}*. Para *g # G* escribimos *gB* en lugar de *{g}B*, o bien *Ag* en lugar de *A{g}*. Observemos que *AB = S{xB | x # A}*. Cuando *A = B* escribimos *A*2 en vez de *AA*. En general, para $n \in \mathbb{N}$, , denotamos con A^{n} el producto de A consigo mismo n veces. Además, A^{-1} denota el conjunto $\{x^{-1} \mid x \,\#\, A\}$. Por otra parte, un subconjunto V # G es simétrico si $V = V^{-1}$.

Sean *G* un grupo topológico y *H # G*. Se dice que *H* es un *subespacio* de *G*, si *H* es un grupo topológico con la topología de subespacio. Más aún, dado un grupo topológico *G*, se define el *subgrupo generado por un conjunto* S como la intersección de todos los subgrupos de *G* que contienen a *S*.

Recordemos que dados un grupo topológico *G* y g # *G* fijo, se definen las funciones *φg, σg : G → G por φg(x) = xg y σg(x) = gx,* para cada *x # G*. Estas funciones reciben el nombre de traslación de *g derecha y traslación de g izquierda,* respectivamente. La función *f : G → G dada por f(y) =* y^{-1}, para cada *y # G*, se llama inversión. Una propiedad importante de los grupos topológicos es que son espacios homogéneos [15, Corolario 1.4]. Es decir, si G es un grupo topológico, entonces para cualesquiera *x, y # G*, existe un homeomorfismo *f : G → G* tal que *f(x) = y*. La demostración de este resultado, se basa en el hecho de que las traslaciones derecha e izquierda, así como las inversiones, son homeomorfismos [15, Teorema 1.3]. La homogeneidad de un grupo topológico *G* nos permite estudiar las propiedades topológicas locales de G en un único punto, que por conveniencia se toma la identidad *e* de *G*.

Es sabido que si *G* es un grupo topológico, *g # G* y *A # G*, entonces para cualquier subconjunto abierto *U* de *G* los conjuntos *gU*, *Ug*, U^{-1}, *AU* y *UA* son abiertos en *G* [15, Teorema 1.10]. Además, si B_{e} es una base local de *e* en *G* y *U # VG*(*e*), entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $V \,\#\, B_{e}$ tal que V^{n} # *U* [15, Lema 1.9-(1)]. Más aún, en este mismo sentido se tiene que los conjuntos que son abiertos y simétricos forman una base para la identidad de *G* [15, Lema 1.8].

Si G es un grupo topológico de Hausdorff, entonces existe una base local B_{e} que satisface lo siguiente [15, Teorema 1.13]:

- para cada $U \,\#\, V_{G}\,(e)$, existe V # Be tal que $V V^{-1} \,\#\, U$;
- para cada $U \,\#\, V_{G}\,(e)$ y para cada *x # U*, existe $V \,\#\, B_{e}$ tal que x*V* # *U* .

Luego, $\{xV \mid V \,\#\, B_{e}\}$ es base local de *x*.

Por otro lado, sean *G y G'* dos grupos. Una función f : G → G' es inyectiva si y sólo si el núcleo de f, ker(f), es el conjunto $\{e_{G}\}$. Decimos que una función f : G → G' es un *homomorfismo* si f es suprayectiva y si para cada x,y # G se cumple f (xy) = f (x)f (y).

Cuando f : G → G’ es una función biyectiva entre grupos topológicos, se dice que f es un *isomorfismo topológico* si f y f^{1} son homomorfismos continuos.

Finalmente, mencionamos que en este artículo consideramos grupos topológicos T_0. De hecho, todo grupo topológico T_0 es un espacio de Tychonoff, es decir, completamente regular y T_1 ([15, Teorema 4.14]).

4. El índice de acotamiento

Como hemos mencionado en la introducción, una función cardinal importante definida en la clase de los grupos topológicos es el índice de acotamiento, o también llamado índice de estrechez, que la denotamos por *ib*. En esta sección exponemos las relaciones que existen entre el índice de acotamiento y otras funciones cardinales. Además, vemos la utilidad de la función *ib* dentro de la teoría de los invariantes cardinales de grupos topológicos. Por ejemplo, el *ib* es útil para demostrar que el peso y el π-peso de un grupo topológico son iguales (Proposición 4.15). Además, sirve para estimar el i-peso de un grupo topológico (Teorema 4.17) y obtener cotas para la cardinalidad de estos espacios (Teorema 4.18 y Corolario 4.19).

Definición 4.1. Sean G un grupo topológico y k un cardinal infinito. Decimos que G es *k-acotado*, si para cada U # $V_G(e)$, existe K # $[G]^{\leq k}$ tal que G = KU. El *índice de acotamiento* para un grupo topológico G es el menor cardinal infinito k ≥ ω tal que G es k-acotado.

El índice de acotamiento de G es denotado con ib(G). De esta manera, podemos escribir:

$$ib(G) = \text{mín}\{k \geq \omega \mid G \text{ es k-acotado}\} + \omega.$$

Claramente, si ib(G) > k, para algún cardinal infinito k, entonces existe U # $V_G(e)$ tal que para todo K # $[G]^{\leq k}$ se tiene que G ≠ KU.

Antes de mostrar ejemplos de grupos topológicos con un determinado índice de acotamiento, presentamos algunas propiedades de esta función cardinal.

Proposición 4.2. *Sean* G *y* G' *grupos topológicos. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

(i) El índice de acotamiento ib es una función monótona;

(ii) Si f : G → G' *es un homomorfismo continuo, entonces* ib(G') ≤ ib(G);

(iii) Si $\{G_\alpha \mid \alpha \# \lambda\}$ *es una colección de grupos topológicos tales que para todo* α # λ, $ib(G_\alpha) \leq k$, *entonces* $ib(\prod_{\alpha\in\lambda} G_\alpha) \leq \kappa.$

Demostración. (i) Ponemos k = ib(G). Dado un subespacio H de G, veamos que ib(H) ≤ ib(G). Para cualquier U # $V_H(e)$, existen V,W # $V_G(e)$ tales que U = V #H y $W^{-1}W$ # V . Puesto que ib(G) = k, existe K # $[G]^{\leq k}$ tal que G = KW. Para cada x # K, tomamos a_x # H de la siguiente manera:

(#) Si xW # H ≠ #, entonces a_x # xW # H; en otro caso, a_x = e.

Sea A el conjunto formado por tales puntos. Claramente A # $[H]^{\leq k}$. Veamos que H = AU. Como AU # H, resta verificar que H # AU. Sea *y* # H. Puesto que G = KW y *y* # G, tenemos que existe x # K tal que y # xW. Así, y # (xW) # H. De aquí, xW # H ≠ #. Luego, por (#), a_x # xW. En consecuencia, x # a_xW^{-1}. Por consiguiente, xW # $a_xW^{-1}W$ # a_xV. Así, y # a_xV. De donde, a_x^{-1} x y # a_x^{-1} x a_xV = V. Además, dado que y # H y a_x

H, obtenemos que a_x $^{-1}$ x y # H. Luego, a_x $^{-1}$ x y # V # H = U. Se sigue que y # a_xU # AU. Con todo, concluimos que H # AU. Con esto, H es k-acotado. Por lo tanto, ib(H) ≤ k.

(ii) Supongamos que f : G → G# es un homomorfismo continuo. Sea V # V_G#(e). Es claro que U = f^{-1}(V) # V_G(e). Luego, existe K # $[G]^{\leq ib[G]}$ tal que G = KU. Ponemos L = f(K). Claramente L # $[G\#]^{\leq ib[G]}$. Por otro lado, LV = f(K)f(U) = f(KU) = f(G) = G#. Con esto se tiene que G# es ib(G)-acotado. Por lo tanto, ib(G#) ≤ ib(G).

(iii) Sea $G = \prod_{\alpha\in\lambda} G_\alpha,$ donde para todo $\alpha \in \lambda,\ ib(G_\alpha) \leq \kappa.$ Veamos que para cada U # V_G(e), existe K # $[G]$-^{K} tal que G = KU. Dado U # V_G(e) cualquiera, podemos suponer, sin perder generalidad, que existe un subconjunto finito λ_1 # λ tal que U = $\bigcap_{\alpha\in\lambda_1} pr_\alpha^{-1}(U_\alpha),$ donde para cada α # λ_1, U_α # $T_{G\alpha}$. Notemos que para cada a # λ_1, $e_{G\alpha}$ # U_α. Para cada α # λ_1, sea V_α una vecindad de $e_{G\alpha}$ en G_α tal que $V_\alpha V_\alpha$ $^{-1}$ # U_α. Ahora, por hipótesis, para todo α # λ_1, existe K_α # $[G_\alpha]^{\leq K}$ tal que G_α = $K_\alpha V_\alpha$. Notemos que G_α = $K_\alpha U_\alpha$. Sea $K = \prod_{\alpha\in\lambda} L_\alpha,$ donde

$$L_\alpha = \begin{cases} K_\alpha & \text{si } \alpha \in \lambda_1, \\ \{e_{G_\alpha}\} & \text{si } \alpha \in \lambda \setminus \lambda_1. \end{cases}$$

Claramente, K # $[G]^{\leq k}$. Afirmamos que G = KU. En efecto, si g # G, entonces para todo α # λ1, tenemos que pr_α(g) # G_α. Como G_α = $K_\alpha K_\alpha$, existe $k_g^\alpha \in K$ que $pr_\alpha(g) \in k_g^\alpha U_\alpha.$ Ponemos

$$k_\alpha = \begin{cases} k_g^\alpha & \text{si } \alpha \in \lambda_1, \\ e_{G_\alpha} & \text{si } \alpha \in \lambda \setminus \lambda_1. \end{cases}$$

Sea $\bar{k} = (k_\alpha)_{\alpha\in\lambda}.$ Es claro que $g \in \bar{k}U.$ Así, G = KU. Por lo tanto, ib(G) ≤ k.

Proposición 4.3. *Sean* G *un grupo topológico y* H *un subespacio denso de G. Se tiene que* ib(G) = ib(H).

Demostración. Sea k = ib(H). Por Proposición 4.2-(i), sólo demostremos que ib(G) ≤ k. Sea U # V_G(e). Existe V # V_G(e) tal que V V $^{-1}$ # U. Como V # H # V_H(e), existe K # $[H]^{\leq k}$ tal que H = K(V # H). De aquí, H # KV . Entonces, como H es denso en G, obtenemos que KV es denso en G. Veamos que G = KU. Dado x # G cualquiera, se tiene que xV # V_G(x). Luego, (xV) # (KV) ≠ #. Así, existen v_1, v_2 # V y c # K tales que xv_1 = cv_2. De aquí, x = cv_2v_1 $^{-1}$ 1 # KV V $^{-1}$ # KU. Luego, G = KU. Por lo tanto, ib(G) ≤ k.

En el siguiente resultado vemos la relación que guarda el índice de acotamiento de un grupo topológico con otras funciones cardinales, a saber con el grado de Lindelöf y la celularidad.

Proposición 4.4. *Para cualquier grupo topológico G:*

$$(i)\ ib(G) \leq L(G);$$

$$(ii)\ ib(G) \leq c(G).$$

Demostración. (i) Sean k = L(G) y U # $V_G(e)$. Es claro que la familia U = {xU | x # G} es una cubierta abierta de G. Luego, como = L(G), existe K # [G]≤tal que G = $\bigcup\{xU \mid x \in K\} = KU.$ Así, G es k-acotado. Por lo tanto, ib(G) ≤ k.

(ii) Pongamos k = c(G). Supongamos que ib(G) > k. Así, existe U # $V_G(e)$ tal que para todo K # &·091;G&·093;$^{\leq k}$ se tiene que G ≠ KU. Consideremos V # $V_G(e)$ tal que V V^{-1} # U. Con inducción transfinita, construimos una sucesión de puntos en G, {x_α | α # k^+}, con la siguiente propiedad:

(#) Si β < α < k^+, entonces x_α # x_βU.

Como para cada K # $[G]^{\leq k}$, G ≠ KU, en particular G ≠ eU. Luego, existe x_0 # G\ eU. Claro que |{x_0}| ≤ k. Así, G ≠ x_0U. De donde, existe x_1 # G\$x_0$U. Ahora, sea 0 < α < k y supongamos construido el elemento para cada β < α Notemos que el elemento x_α queda construido como sigue. En vista de que $|\{x_\beta \mid \beta < \alpha\}| = |\alpha| < \kappa,$ tenemos que $G \neq \{x_\beta \mid \beta < \alpha\}U.$ Así, existe $\in G \setminus (\{x_\beta \mid \beta < \alpha\}U).$

Afirmamos que la familia F = {x_αU | α # k^+} es celular. Supongamos que no. Luego, existen α, β # k^+ tales que β < α y (x_αV) # (x_βV) ≠ #. Luego, existen v_1, v_2 # V tales que $x_\beta v_2 = x_\alpha v_1$. De donde, x_α # x_βV V^{-1} # x_βU. Así, x_α # x_βU, lo que contradice la propiedad (#). Por lo tanto, F es celular. Puesto que |F| > k, obtenemos una contradicción con k = c(G). Por lo tanto, ib(G) ≤ k.

Como consecuencia de la Proposición 4.4 y de los incisos (b)-(d) de la Proposición 2.3, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.5. *Sea* G *un grupo topológico. Para cualquier función cardinal* ϕ # {d, s, nw, w}, *se cumple que* ib(G) ≤ ϕ (G).

En particular, del Corolario 4.5 obtenemos lo siguiente:

Ejemplo 4.6. Sea $(\mathbb{R}, +)$ el grupo topológico de los números reales con la suma usual. Es bien sabido que $d(\mathbb{R}) = \omega.$. Así, por el Corolario 4.5, obtenemos que $ib(\mathbb{R}) = \omega.$

Por otro lado, dado que para cualquier espacio topológico *X*, se cumple que e(X) ≤ L(X) (vea parte (f) de la Proposición 2.3), una pregunta natural es si la desigualdad en la parte (i) de la Proposición 4.4 se sigue cumpliendo si cambiamos la función L por la función e. En el siguiente resultado vemos que la respuesta es afirmativa.

Proposición 4.7. *Para cada grupo topológico* G *se cumple que* ib(G) ≤ e(G).

Demostración. Sea G un grupo topológico tal que K = e(G). Es suficiente con demostrar que podemos cubrir a G con a lo más K-traslaciones de toda vecindad simétrica U de e.

(*) Supongamos que existe una vecindad simétrica U_0 de G tal que para cada *D* # $[G]^{\leq\kappa},$ $G \setminus DU_0 \neq \emptyset.$

Con la suposición en (*), construimos una sucesión X = {x_a | a < K^+} en G que cumple: (**) Si α < β < K^+, entonces $x_\beta \notin x_\alpha U_0.$

En efecto, sea 0 < a < K^+ y supongamos que para todo β < α hemos construido x_β tal que se cumple la condición (**). Dado que |{x_β: β < α}| ≤

K, se sigue de (*) que G \ {x$_\beta$ | β < α}U$_0$ α ≠ #. Luego, existe x$_\alpha$ # G \ {x$_\beta$ | β < α}U$_0$, lo que completa la construcción de la sucesión deseada.

Ahora demostremos que para cualesquiera $x_\alpha, x_\beta \in X$, con $x_\alpha \neq x_\beta$, se cumple que $x_\alpha \notin x_\beta U_0$. En efecto, sean xα, x$_\beta$ # X tales que $x_\alpha \neq x_\beta$ y supongamos que $x_\alpha \in x_\beta U_0$. Luego de la condición en (**) tenemos que α < β. Además, como $x_\alpha \in x_\beta U_0$, entonces existe u # U$_0$ tal que x$_\alpha$ = x$_\beta$u. Luego $x_\alpha u^{-1} = x_\beta$. Así, $x_\beta = x_\alpha u^{-1} \in x_\alpha U_0^{-1} = x_\alpha U_0$. Pero esto es una contradicción, pues α < β .

Finalmente, sea V una vecindad simétrica de e tal que V^4 # U$_0$. Por [2, Lemma 1.4.22], {x$_\alpha$V | α < K$^+$} es una familia discreta (es decir, para cada g # G existe una vecindad que interseca a lo más un elemento de {x$_\alpha$V | α < K$^+$} [6, p. 16]). De este hecho se sigue que X es un conjunto cerrado y discreto en G con |X| = K$^+$, una contradicción. Por lo tanto, ib(G) ≤ e(G).

Para poder contar con más ejemplos del índice de acotamiento de grupos topológicos, recordemos lo siguiente. Dado un espacio topológico X, se dice que x # X es un *punto de acumulación completo* de un subconjunto E # X si para todo V # V(x), se cumple que |V#E| = |E|. Por otra parte, para un cardinal infinito K, se dice que un espacio topológico X es *inicialmente K-compacto* si para toda cubierta abierta U de X con |U| ≤ K, existe V # [U]$^{<\omega}$, tal que V cubre a X . De hecho, un espacio X es inicialmente K-compacto si y sólo si todo subconjunto infinito de cardinalidad a lo más K tiene un punto de acumulación completo [1]. Esta equivalencia nos ayuda a obtener lo siguiente:

Teorema 4.8. *Si* X *es un espacio topológico inicialmente K-compacto, entonces* e(X) ≤ K.

Demostración. Para ver que e(X) ≤ K basta demostrar que si *A* es un subconjunto infinito de X con |A| > K, entonces A tiene un punto de acumulación. Sea A # X tal que |A| > K. Tomemos *B* # [A]^K. Por la equivalencia mencionada en el párrafo previo, *B* tiene un punto de acumulación completo, de donde *A* tiene al menos un punto de acumulación. Por lo tanto, e(X) ≤ K.

Se sigue de la Proposición 4.7 y del Teorema 4.8 lo siguiente.

Ejemplo 4.9. Si G es un grupo inicialmente K-compacto, entonces ib(G) ≤ k.

En particular, puesto que para cualquier K, todo espacio compacto es inicialmente K-compacto, obtenemos del Ejemplo 4.9 el siguiente hecho.

Ejemplo 4.10. Para un grupo topológico compacto G, se tiene que ib(G) = w.

Las siguientes dos proposiciones nos muestran la relación entre el índice de acotamiento con otras funciones cardinales. La primera de ellas mejora las desigualdades en la Proposición 4.4, pues involucra el número débil de Lindelöf (vea Proposición 2.3-(e)). La segunda proposición nos relaciona el índice de acotamiento con el peso y el carácter de un grupo topológico.

Proposición 4.11. *Para cualquier grupo topológico* G *se cumple que* ib(G) ≤ wL(G).

Demostración. Sea G un grupo topológico tal que K = wL(G). Veamos que ib(G) ≤ K. Sea U # $V_G(e)$. Existe V # $V_G(e)$ tal que $VV^{-1} = V^2$ # U. Sea U = {xV | x # G}. Claramente *U* es una cubierta abierta de *G.* Luego, como *k = wL(G),* existe *K # $[G]^{\leq K}$* tal que $G = \overline{KV}$. Veamos que *G = KU.* Sea *g # G.* Puesto que *KV* es denso en *G* obtenemos que (gV) # (KV) ≠ #. Entonces, existe x # K tal que (gV) # (xV) ≠ #. De aquí, existen v_1,v_2 # V tales que $gv_1 = xv_2$. De donde, g = $xv_2v_1^{-1}$ # $xVV^{-1} = xV^2$. Con esto, g # xV^2 # xU. Así, G # KU. Se concluye que G = KU. Por lo tanto, ib(G) ≤ K. 0

Proposición 4.12. *Para cualquier grupo topológico G,* w(G) = ib(G)x(G).

Demostración. Sea G un grupo topológico. Notemos que por el Corolario 4.5, ib(G) ≤ w(G). De aquí, por la parte (a) de la Proposición 2.5, se sigue que ib(G)x(G) ≤ w(G).

Por otro lado, sea K = ib(G)x(G). Veamos que w(G) ≤ K. Como x(G) ≤ K, existe una base local B_e de la identidad e de G tal que $|B_e|$ ≤ K. Puesto que ib(G) ≤ K, para todo B # B_e existe D_B # $[G]^{\leq K}$ tal que G = D_BB. Sean $D = \bigcup\{D_B \mid B \in B_e\}$ y B = {xB | x # D y B # B_e}. Afirmamos que B es base de G. Sean g # G y U un abierto que contiene a g. Así, existe V # V_G (e) tal que gV # U. Consideremos W # V_G (e) tal que $W^{-1}W$ # V y sea B # B_e tal que B # W. Puesto que G = D_B B existe x # D_B con g # xB. De aquí, xB # $gB^{-1}B$. Como $gB^{-1}B$ # $gW^{-1}W$ # gV # U, obtenemos que g # xB # U. Por tanto, B es base de G. Finalmente, como |D| = Σ{$|D_B|$ | B # B_e} ≤ $|B_e|$ ≤ K, se tiene que |B| ≤ K. Con todo w(G) ≤ K. Por lo tanto, w(G) = ib(G)x(G).

La Proposición 4.13 que presentamos a continuación la demostramos utilizando algunos de los resultados que hemos expuesto del índice de acotamiento. Esta proposición es de suma importancia en la teoría de los grupos topológicos, por la siguiente razón. Es bien sabido que todo espacio topológico segundo numerable es primero numerable y separable; además, todo espacio segundo numerable es de Lindelöf. Sin embargo, en general, un espacio primero numerable y separable no es segundo numerable; más aún, un espacio primero numerable y de Lindelöf no siempre es segundo numerable (vea [6, Example 3.8.14]). La situación es muy distinta en la teoría de los grupos topológicos. De hecho, como consecuencia de la Proposición 4.13, obtenemos que todo grupo topológico primero numerable y separable sí es segundo numerable; y, además, todo grupo topológico primero numerable y de Lindelöf resulta ser segundo numerable.

Proposición 4.13. *Todo grupo topológico* G *satisface que:*

$$(i)\ \ w(G) = d(G)\chi(G);$$
$$(ii)\ \ w(G) = L(G)\chi(G).$$

Demostración. (i) Se sigue del Corolario 4.5, la Proposición 4.12 y de la parte (b) de la Proposición 2.5.

(ii) Se sigue de la parte (i) de la Proposición 4.4, de la Proposición 4.12 y de la parte (c) de la Proposición 2.5. 0

Se desprende de la Proposición 4.13 lo siguiente.

Corolario 4.14. *Dado un grupo topológico* G, *se cumple:*

(i) Si G *es primero numerable y separable, entonces* G *es segundo numerable;*

(ii) Si G *es primero numerable y de Lindelöf, entonces* G *es segundo numerable.*

Cabe señalar que una propiedad importante que poseen algunas funciones cardinales definidas en grupos topológicos es que coinciden, incluso cuando en espacios compactos pueden ser distintas (vea [8, Example 7.22]). Mostramos esto en el siguiente resultado.

Proposición 4.15. *Para cualquier grupo topológico* G *se cumple:*

$$(i)\ \chi(G) = \pi\chi(G).$$

$$(ii)\ w(G) = \pi w(G).$$

Demostración. Sea G un grupo topológico. Podemos suponer que G no es discreto.

(i) Por la parte (d) de la Proposición 2.5 es suficiente verificar que x(G) ≤ πx(G). Sea B una π-base local de e tal que |B| = πx(e, G). Se tiene que B' = {BB^{-1} | B # B} es una base local de e. En efecto, sea U un abierto tal que e # U. Consideremos V # V_G (e) tal que VV^{-1} # U. Puesto que B es π-base local de e, existe B # B tal que B # V. De donde, e BB^{-1} # U, lo que demuestra la afirmación. Observemos que |B'| ≤ |B|. Así, x(e, G) ≤ πx(e, G). Puesto que todo grupo topológico es homogéneo, concluimos que x(G) ≤ πx(G).

(ii) Por la parte (i) de la Proposición 4.13 y por (i) previo, tenemos que w(G) = d(G)πx(G). Se sigue de la parte (e) de la Proposición 2.5 que w(G) ≤ πw(G)πx(G). Luego, de (f) de la Proposición 2.5, w(G) ≤ πw(G). Por lo tanto, de la parte (g) de la Proposición 2.5, obtenemos que w(G) = πw(G).

Para terminar esta sección, en el Teorema 4.18, empleamos el índice de acotamiento para establecer una cota superior para la cardinalidad de un grupo topológico. Para destacar la importancia de este resultado, previamente recordamos algunas desigualdades de la teoría de los invariantes cardinales topológicos:

(A) Hajnal-Juhász: |X| ≤ $2^{s[X]\psi[X]}$, para X un espacio T_1.

(B) Hajnal-Juhász: |X| ≤ $2^{c[X]x[X]}$, para X un espacio T_2.

(C) Arhangel'skiĭ: |X| ≤ $2^{L[X]x[X]}$, para X un espacio T_2.

Es bien sabido que con el resultado en (C), Arhangel'skiĭ resuelve el problema de Alexandroff-Urysohn. El lector interesado en conocer más detalles sobre las desigualdades en (A) y en (B), así como las contribuciones de la desigualdad de Arhangel'skiĭ en (C) a la teoría de los invariantes cardinales topológicos, puede consultar [7].

En la actualidad aún existen problemas que podrían continuar abiertos relacionados con la desigualdad de Arhangel'skii. Por ejemplo:

(I) ¿Existe una generalización común para las desigualdades en (B) y en (C)?

Una respuesta parcial y afirmativa a esta pregunta es la desigualdad de Bell, Ginsburg y Woods, que nos dice que si X es un espacio T_4, entonces |X| ≤ $2^{wL[X]x[X]}$ [3].

A su vez, el mismo Arhangel'skiĭ cuestiona (vea [7]):

(II) ¿Qué se puede decir de la cardinalidad de un espacio X que es T_1, de Lindelöf y con pseudocarácter numerable?

Finalmente, un problema en cierto sentido más natural es el siguiente:

(III) Si X es un espacio T_1, de Lindelöf y primero numerable; entonces, ¿es cierto que $|X| \leq 2^w$?

Si bien la desigualdad que presentamos en el Teorema 4.18 es interesante por sí sola, es importante destacar que, por un lado, es una generalización común, en la clase de los grupos topológicos, para las desigualdades dadas en (B) y (C), lo que notamos en el Corolario 4.19. Por otro lado, de la desigualdad del Teorema 4.18 se obtienen respuestas a las preguntas en (II) y (III), para la clase de los grupos topológicos.

A continuación, presentamos lo requerido para la demostración del Teorema 4.18.

Lema 4.16 ([12, p. 191]). *Sea* G *un grupo topológico* T*-acotado y sea* U *una vecindad de la identidad* e # G. *Entonces existe un homomorfismo continuo sobre un grupo topológico H,* $f : G \to H$*, con* $w(H) \leq T$*, y existe una vecindad* V *de la identidad de H tal que* $f^{-1}(V)$ # U.

Teorema 4.17. *Para cualquier grupo topológico G, existe un isomorfismo continuo de* G *sobre un grupo topológico H tal que* $w(H) \leq ib(G)\psi(G)$. *En consecuencia, cualquier grupo topológico* G *satisface que* $iw(G) \leq ib(G)\psi(G)$.

Demostración. Sea G un grupo topológico. Sea $K = ib(G)\psi(G)$. Como $\psi(G) \leq K$, existe una pseudobase local de e_G en G, digamos $B = \{U_\alpha \mid \alpha$ # $K\}$. Puesto que $ib(G) \leq K$, se sigue del Lema 4.16 que, para cada $\alpha < K$, existen un grupo topológico H_α y un homomorfismo continuo y suprayectivo f_α: $G \to H_\alpha$ tales que $w(H_\alpha) \leq K$, y existe una vecindad V_α de la identidad $e_{H\alpha}$ tal que $f^{-1}(V_\alpha)$ # U_α. Sea $H = \prod_{\alpha\in\kappa} H_\alpha$ y definamos la función F : $G \to H$ por $F(g) = (f_\alpha(g))_{\alpha\in\kappa}$, para cada g # G. Es claro que F es suprayectiva. Además, por [6, Proposition 2.3.6] F es continua. Veamos que F es inyectiva. Para esto, demostramos que $\ker(F) = \{ e_G \}$. Supongamos que g # G es tal que $F(g) = e_H$, donde e_H es la identidad de H. Si $g \neq e_G$, entonces por ser B pseudobase local de e_G, existe a < K tal que $g \notin U_\alpha$. Se tiene que $f_\alpha(g) \neq e_{H_\alpha}$. En efecto, si $f_\alpha(g) = e_{H\alpha}$, entonces $f_\alpha(g)$ # V_α. De aquí, g # $f_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ # U_α. Así, g # $U\alpha$, lo que es una contradicción. Luego $f_\alpha(g) \neq e_{H_\alpha}$. Con esto, $F(g) \neq e_H$, de donde $\ker(F) = \{e_G\}$. Con todo, hemos demostrado que F es una biyección continua entre G y H. Es claro que $w(H) \leq K$.

Resta probar que $iw(G) \leq ib(G)\psi(G)$. Para esto, notemos que H es una condensación de G tal que $w(H) \leq ib(G)\psi(G)$. Por lo tanto, de la definición de iw, obtenemos que $iw(G) \leq ib(G)\psi(G)$.

Teorema 4.18 ([12]). *Para cualquier grupo topológico G, se cumple que* $|G| \leq 2^{ib[G]\psi[G]}$.

Demostración. Se sigue de la Proposición 2.6 y del Teorema 4.17.

Corolario 4.19 ([12]). *Para cualquier grupo topológico G, se cumple:*

(i) $|G| \leq 2^{c(G)\psi(G)}$;

(ii) $|G| \leq 2^{L(G)\psi(G)}$.

Demostración. Por la Proposición 4.4, obtenemos las desigualdades ib(G)ψ(G) ≤ c(G)ψ(G) y ib(G)ψ(G) ≤ L(G)ψ(G). Así, (i) y (ii) se siguen del Teorema 4.18.

5. Reflejo y el índice de acotamiento

Concluimos este trabajo mostrando que el índice de acotamiento refleja todo cardinal infinito en la clase de los grupos topológicos. Antes daremos algunas definiciones y resultados, sin demostración, referentes a la teoría de reflejo para funciones cardinales topológicas. Cabe mencionar que esta teoría es una manera muy natural para estudiar las propiedades de un espacio topológico dado. Básicamente, el problema de reflejo tiene la siguiente forma: ¿es cierto que si para todo subespacio Y de X tal que |Y| ≤ K y *Y* satisface la propiedad P, entonces X tiene la propiedad P? El lector interesado en el tema o en conocer una demostración para los resultados que presentamos a continuación puede consultar [9].

Definición 5.1. Sean X un espacio topológico, ϕ una función cardinal y K ≥ w un cardinal. Se dice que:

(1) ϕ *refleja* a K, cuando se verifica la condición: si ϕ(X) ≥ K, entonces existe Y # $[X]^{\leq K}$ tal que ϕ(Y) > K.

(2) ϕ *refleja fuertemente* a K, cuando se verifica la condición: si ϕ(X) ≥ K, entonces existe Y # $[X]^{\leq K}$ tal que para todo subespacio Z de X tal que Y C Z, se cumple ϕ(Z) ≥ K.

Observemos que *ϕ* refleja a K si y sólo si para todo Y # $[X]^{\leq K}$ tal que *ϕ*(Y) < K, se cumple que *ϕ*(X) < K. En ocasiones, cuando se desean obtener teoremas de reflejo, para ciertas funciones cardinales, es necesario restringir la clase de espacios en consideración. En un caso así, la definición de reflejo apropiada es: *ϕ* refleja a K para la clase C, si dado X # C con *ϕ* (X) ≥ K, existe Y # $[X]^{\leq K}$ tal que *ϕ*(Y) ≥ K. Es claro que las condiciones de la Definición 5.1 se satisfacen cuando K = w. Por esta razón suponemos que K > w.

Las relaciones entre reflejo y reflejo fuerte se resumen en el resultado siguiente.

Teorema 5.2. *Sean ϕ una función cardinal y K ≥ w.*

(i) Si ϕ refleja fuertemente a K, entonces ϕ refleja a K. Cuando ϕ es monótona, el recíproco también se cumple.

(ii) Si ϕ refleja fuertemente todo cardinal sucesor, entonces ϕ refleja fuertemente todo cardinal infinito. En particular, si ϕ es monótona y refleja todo cardinal sucesor, entonces ϕ refleja fuertemente todo cardinal infinito.

En seguida vemos que el índice de acotamiento refleja todo cardinal infinito. La demostración del siguiente resultado sigue las ideas de [16, Proposition 2.3].

Teorema 5.3 ([4]). *La función* ib *refleja fuertemente todo cardinal infinito en la clase de los grupos topológicos.*

Demostración. Sea G un grupo topológico. Puesto que ib es monótona (vea parte (i) de la Proposición 4.2) tenemos que, en vista del Teorema 5.2-(ii), es suficiente demostrar el resultado para un cardinal sucesor K^+. Supongamos que para todo subgrupo H de G, con $|H| \leq K^+$, se tiene que $ib(H) \leq K$. Si $ib(G) > K$ (es decir, si $ib(G) \geq K^+$), entonces existe U \# $V_G(e)$ tal que para todo K \# $[G]^{\leq K}$, se tiene que $G \neq KU$.

Vamos a construir ahora una sucesión $\{p_\alpha \mid 0 \leq a < K^+\}$ de puntos en G tal que:

(\#) $p_\beta \, \# \, G \setminus ((\{p_p \mid p<\beta\})U)$.

Para esto tomemos $0 < \alpha < K^+$, y supongamos que p_β se tiene construido para cada β \# α. Puesto que $\alpha < K^+$, tenemos que $|\alpha| < K$. Así, por nuestra hipótesis, existe $p_\alpha \, \# \, G \setminus (\{p_\beta \mid \beta < \alpha\})U$, lo cual completa la construcción.

Ahora, sea $Y = \{p_\alpha \mid 0 < \alpha < K^+\}$ y denotemos con H el subgrupo de G generado por Y. Notemos que $|H| \leq |[Y]^{\leq W}| = |Y| \leq K^+$.

Para terminar la demostración probemos que $ib(H) = K^+$. Para esto, supongamos que $ib(H) = \mu \leq K$, y sea V una vecindad abierta y simétrica de la identidad de H de tal forma que $V^2 \, \# \, U$. Luego existe F \# H con $|F| \leq \mu$ tal que $H = F(V\#H)$. Ahora, para cada $\alpha < K^+$, existen $g_\alpha \, \# \, F$ y $v_a \, \# \, V$ tales que $p_\alpha = g_\alpha v_\alpha$. Puesto que $|F| < K^+$, se tiene que, por la regularidad de K^+, existe $\beta < \alpha < K^+$ tal que $g_\beta = g_\alpha = g$. Luego, $p_\beta = gv_\beta$ y $p_\alpha = gv_\alpha$. Así, $p_\alpha = (p_\beta)(v_\beta{}^{-1})(v_\alpha) \, \# \, (p_\beta)V^{-1}V \, \# \, (p_\beta)V^2 \, \# \, (\{p_\beta \mid \beta < \alpha\})U$, lo cual es una contradicción con (\#). De esta contradicción obtenemos que $ib(G) \leq K$. Por lo tanto, ib refleja a K^+, y dado que ib es monótona, tenemos que ib refleja todo cardinal infinito.

Agradecimientos

Los autores agradecen las observaciones y comentarios realizados por los revisores, con los cuales se mejoró en gran medida la presentación de este artículo.

Referencias

[1] Alexandroff P. and Urysohn P., "Mémoire sur les éspaces topologiques compacts", *Ver. Akad. Wetensch*, Amsterdam 14 (1929), 1-96.

[2] Arhangel'skii A.V. and Tkachenko M., *Topological groups and related structures*, Atlantis Studies in Mathematics, Atlantis Press, 2008.

[3] Bell M., Ginsburg J. and Woods G., "Cardinal inequalities for topological spaces involving the weak Lindelöf number", *Pacific J. Math*. 79 (1978), No. 1, 37-45.

[4] Casarrubias-Segura F. and Ramírez-Páramo A., "Some reflection theorems", *Topology Proc*. 31 (2007), No. 1, 51-65.

[5] Charlesworth A., "On the cardinality of a topological space", *Proc. Amer. Math. Soc*. 66 (1997), No. 1, 138-142.

[6] Engelking R., *General topology,* Translated from the Polish by the author, 2nd ed. Sigma Series in Pure Mathematics, Vol 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[7] Hodel R.E., "Arhangel'skii's solution to Alexandroff's problem: A survey", *Topology Appl.* 153 (2006), No. 13, 2199-2217.

[8] Hodel R.E., "Cardinal functions I", In *Handbook of set-theoretic topology*, Edited by K. Kunen and J. E. Vaughan, North-Holland, Amsterdam (1984), 1-61.

[9] Hodel R.E. and Vaughan J.E., "Reflection theorems for cardinal functions", *Topology Appl.* 100 (2000), 47-66.

[10] Juhász I., *Cardinal functions in topology-10 years later*, Math. Center Tract. 123, Amsterdam, 1980.

[11] Tkachenko M.G., "Cellularity and the index of narrowness in topological groups", *Comment. Math. Univ. Carolin.* 52 (2011), No. 2, 309-315.

[12] Tkachenko M.G., "Introduction to topological groups", *Topology Appl.* 86 (1998), 179-231.

[13] Tkachenko M.G., "Paratopological and Semitopological Groups Versus Topological Groups", In *Recent Progress in General Topology III* (2014), 825-882.

[14] Tkachenko M.G., "Topological features of topological groups", In *Handbook of the History of General Topology Vol* 3 (2001), 1027-1144.

[15] Tkachenko M.G., Villegas Silva L.M., Hernández García C. y Rendón Gómez O.J., *Grupos topológicos*, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, Primera edición 1997.

[16] Torres Falcón Y., "Unions of chains of subgroups of a topological group", *Appl. Gen. Topol* 2 (2001), No. 2, 227-235.

Notas

Para citar este artículo: A. Ramírez-Páramo, J.F. Tenorio, Sobre el índice de acotamiento de grupos topológicos, Rev. Integr. temas mat. 36 (2018), No. 2, 83-99. doi: 10.18273/revint.v36n2-2018002.

Notas de autor

*

E-mail: jtenorio@mixteco.utm.mx