Revista Integración
ISSN: 0120-419X
ISSN: 2145-8472
integracion@matematicas.uis.edu.co
Universidad Industrial de Santander
Colombia

El dual de la reflexión de un grupo topológico

Castillo, Adriana C.; Hernández A., Julio C.
El dual de la reflexión de un grupo topológico
Revista Integración, vol. 39, núm. 1, 2021
Universidad Industrial de Santander, Colombia
Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=327068399002
DOI: https://doi.org/10.18273/revint.v39n1-2021002

Artículos Originales

El dual de la reflexión de un grupo topológico

The dual of the reflection of a topological group

Adriana C. Castillo
Universidad de Cartagena, Colombia
adrianacarolinac35@gmail.com

DOI: https://doi.org/10.18273/revint.v39n1-2021002
Redalyc: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=327068399002

Julio C. Hernández A.
Universidad de Cartagena, Colombia
jhernandeza2@unicartagena.edu.co

Recepción: Febrero , 24, 2020
Aprobación: Septiembre , 01, 2020

Resumen:

En este escrito presentamos un estudio de la dualidad de un grupo vía reflexiones. Iniciamos con la demostración de una condición necesaria para que el homomorfismo dual del homomorfismo que va del grupo a su reflexión sea una biyección continua, esto es, que siendo $\phi: G \to \xi(G)$, sucede que $\hat{\varphi}: \widehat{\xi(G)} \to \hat{G}$ es una biyección continua si $T \in \xi$, donde ξ es una subcategoría reflexiva de la categoría de los grupos topológicos y $\xi(G)$ es la reflexión de G. Una vez se tenga la anterior condición se demuestra que $\hat{G} \cong \widehat{\xi(G)}$, cuando G es un grupo compacto, o es un grupo topológico Čech completo con $\phi: G \to \xi(G)$ sobreyectiva y abierta, o un grupo topológico localmente compacto y $\phi: G \to \xi(G)$ es sobreyectiva y abierta.

En el caso del dual de las reflexiones de grupos topológicos metrizables, nos apoyamos en el resultado de Chasco [5] que implica que si G es un grupo topológico abeliano metrizable y H es un subgrupo denso de G, entonces los grupos duales $\hat{G}$ y $\hat{H}$ son topológicamente isomorfos.

Palabras clave: Grupo dual, grupos topológicos, reflexiones. MSC2010: 18A40, 22A05, 43A40.

Abstract:

In this paper we present a study of the duality of a group via reflections. We begin with the demonstration of a necessary condition for the continuity of the dual homomorphism of the homomorphism that goes from the group to its reflection, that is, if $\phi: G \to \xi(G)$, it follows that $\hat{\varphi}: \widehat{\xi(G)} \to \hat{G}$ is a continuous bijection for $T \in \xi$, where ξ is a reflective subcategory of the category of topological groups and $\xi(G)$ is the reflection of G. Once the previous condition is met, it is shown that $\hat{G} \cong \widehat{\xi(G)}$, when G is either a compact group or a topological group Čech complete with $\phi: G \to \xi(G)$ surjective and open or a locally compact topological group and $\phi: G \to \xi(G)$ is surjective and open.

In the case of the dual reflections of metrizable topological groups, we rely on a result of Chasco [5] which implies that when G is a metrizable abelian topological group and H is a dense subgroup of G, then the dual groups $\hat{G}$ and $\hat{H}$ are topologically isomorphic.

Keywords: Dual groups, topological groups, reflections.

1. Introducción

La práctica de dotar a un conjunto no vacío de una operación interna, cerrada, asociativa con un elemento neutro y simétrico, da lugar a los llamados grupos en el Álgebra Abstracta, estructura que ha sido estudiada por muchos algebristas, los cuales dentro del desarrollo de las matemáticas han logrado aplicar este concepto en diversas áreas del conocimiento, permitiendo que se sitúe en el marco de las matemáticas contemporáneas; por otro lado, los topólogos toman estos conjuntos y los dotan de una topología, llamados

Notas de autor

adrianacarolinac35@gmail.com

espacios topológicos, generando una técnica con un extenso campo de aplicaciones y convirtiéndola en una herramienta para identificar propiedades de espacios.

La interacción entre el Álgebra y la Topología, es el área de las matemáticas que se conoce como Álgebra Topológica, que tuvo su origen en los años 20 del siglo XX, debido a Dieudonne y Pontryagin. Al unir los conceptos de grupo y espacio topológico, se genera un grupo topológico en el cual no solo es suficiente que tenga una topología y operaciones asociadas, sino que es necesaria la continuidad de las operaciones del grupo a partir de la topología, esto hace realmente atractivo este medio para muchos por su extenso campo de estudio y aplicación, lo que permite poder abarcar muchos métodos de trabajo.

Uno de los conceptos categóricos que usaremos en este trabajo es el de reflexión, que actúa como un espejo en la cual la imagen de un objeto es el reflejo en una subcategoría de reflexión. En todas las categorías de las matemáticas podemos evidenciar ejemplos de gran relevancia de reflexiones. Uno muy antiguo es la compactación de Stone-Cech establecida en 1937, esta es una reflexión de los espacios de Tychonoff en los espacios compactos. Combinando Álgebra con Topología podemos ver que cada grupo topológico admite una completación que también es un grupo topológico y esta se llama la completación de Raĭkov. Un ejemplo de como la estructura algebraica continua influye mucho en los resultados topológicos, es el hecho de que cada grupo topológico es un espacio *Reg* y si además, es T_0, entonces todo grupo topológico T_0 es T_3. Por eso no tiene sentido estudiar en la categoría de los grupos topológicos, las reflexiones que provienen de espacios que satisfacen axiomas de separación, ya que con estudiar la reflexión sobre los espacios T0, tendríamos todas las demás.

Otro concepto importante que se estudia aquí es el de dualidad. La dualidad de Pontryagin en los grupos abelianos localmente compactos (brevemente, grupos ALC) también actúa como un espejo pero esta refleja las propiedades de un grupo en su grupo dual, y viceversa. La idea de dualidad consiste en asociar a un grupo topológico el grupo de los caracteres continuos (homomorfismos continuos en el circulo complejo unidad) dotado de la topología compacto abierta; se obtiene así otro grupo topológico denominado el dual. El Teorema de Dualidad de Pontryagin para grupos ALC ha sido el punto de partida para muchas rutas diferentes de investigación en Matemáticas. Desde su aparición, hubo un gran interés en colocarlo en un contexto más amplio que los grupos ALC. El Teorema de Dualidad de Pontryagin-Van Kampen, para grupos ALC, que establece que todo grupo ALC es reflexivo; es la base de la teoría de dualidad para grupos topológicos abelianos. Desde inicios del siglo XX, la dualidad de Pontryagin ha demostrado ser una útil e importante herramienta para el análisis de la estructura y propiedades de los grupos ALC; estos grupos se encuentran en las raíces del análisis de Fourier, a través de la medida de Haar y el Teorema de Bochner.

En este artículo presentamos un estudio de la dualidad de un grupo vía reflexiones, exponiendo nuestro aportes inicialmente en el Teorema 3.12, en el cual realizamos adaptaciones con muchas variaciones de una técnica conocida, usada para demostrar la existencia de grupos libres en [2], para probar que los grupos compactos son una subcategoría reflexiva de los grupos topológicos; seguidamente en los resultados referentes a las condiciones para que el dual de un grupo sea topológicamente isomorfo al dual de la reflexión del mismo, hecho que se evidencia en el Teorema 3.18, Teorema 3.20 y Teorema 3.23, relacionando cada resultado con ejemplos relevantes, finalizamos con el Teorema 3.27 en donde presentamos una prueba alternativa del resultado conocido, [11, Teorema 4.1].

El artículo consta de tres secciones. Luego de la presente introducción, en la Sección 1 se dan preliminares topológicos, algebraicos y categóricos, iniciamos presentando conceptos básicos de grupos topológicos; continuamos abarcando algunos tópicos referidos a la teoría de dualidad y los resultados generales dentro de esta teoría y, para fijar ideas, especificamos algunos temas.

En la Sección 2 empezamos exponiendo algunas reflexiones en la categoría de los grupos topológicos, particularmente tomamos la reflexión sobre espacios totalmente disconexos, libres de torsión, abelianos, precompactos, $\#_0$-acotados, además de considerar la completación de Raĭkov y la compactación de Bohr. Seguimos con el dual de algunas reflexiones, partiendo con la demostración de una condición necesaria para que el homomorfismo dual del homomorfismo que va del grupo a su reflexión sea una biyección continua, luego tomando los resultados sobre el dual de la reflexión sobre los precompactos y el dual de la reflexión sobre los $\#_0$-acotados. Siguiendo ese orden de ideas mostramos que $\widehat{G} \cong \widehat{\xi(G)}$, dotando a G de propiedades variables. En el caso del dual de la reflexión de un grupo metrizable, nos apoyamos del resultado de Chasco en [5], que implica que si G es un grupo topológico abeliano metrizable y H es un subgrupo denso de G, entonces los grupos duales $\widehat{G}$ y $\widehat{H}$ son topológicamente isomorfos, usamos este resultado para abarcar los casos de la completación de Raĭkov y la compactación de Bohr; finalmente presentamos una prueba alternativa, usando la compactación de Bohr, de la Proposición 2.13, considerando G precompacto abeliano y metrizable.

2. Preliminares

Definición 2.1 ([13, Definición 1.1]). Un conjunto G con una operación binaria $\cdot$: $G \times G \to G$ y una familia τ de subconjuntos de G se llama grupo topológico si:

1. $(G, \cdot)$ es un grupo con neutro eG;
2. (G, τ) es un espacio topológico;
3. las funciones $g_1 : (G, \tau) \times (G, \tau) \to (G, \tau)$ y $g_2 : (G, \tau) \to (G, \tau)$ dadas por $g_1(x, y) = x \cdot y$ y $g_2(x) = x^{-1}$ son continuas, donde x^{-1} es el inverso de x.

En ocasiones prescindiremos del uso del símbolo de operación binaria $\cdot$, es decir, en vez de $x \cdot y$ escribiremos simplemente xy.

Ejemplo 2.2. Mencionamos tres ejemplos importantes:

a) El grupo aditivo de los números reales con la topología y suma usuales es un grupo topológico, denotado por $\mathbb{R}$.
b) El grupo multiplicativo de todos los números complejos de módulo uno con la topología inducida desde el plano complejo se llama grupo círculo, y se denota por $\mathbb{T}$.

Ahora exponemos una caracterización propia de los grupos topológicos.

Teorema 2.3 ([13, Teorema 1.13]). *Sea G un grupo topológico de Hausdorff. Existe una base local V para eG tal que cumple las siguientes condiciones:*

1. $\cap \mathcal{V} = \{eG\}$;
2. *Si U, V son dos elementos arbitrarios de V, entonces existe W # V tal que W # U # V ;*
3. *para cada U # V existe V # V tal que $V V^{-1}$ # U;*
4. *para toda U # V y cada x # U existe V # V con xV # U;*
5. *para cada U # V y a # G existe W # V con $aW a^{-1}$ # U.*

Recíprocamente, si tenemos un grupo G y una familia V no vacía de subconjuntos de G que contienen a eG, tales que se satisfacen las condiciones (1) a (5) para V, entonces cada una de las familias {xU : U # V, x # G} y {Ux : U # V, x # G} es base para una topología de grupo τ para G. Además V es una base local para eG en (G, τ).

El estudio de la estructura del dual de un grupo topológico en cuanto a conceptos y algunos resultados expuestos en este artículo pueden ampliarse en [7], [8] , [12] y [16].

Definición 2.4. Sean X e Y espacios topológicos, definimos

$$C(X,Y) = \{f : X \to Y : \ f \text{ es continua}\}$$

como el conjunto de las funciones continuas entre X e Y.

Dado un subconjunto *K* compacto en *X* y *U* abierto en *Y* , notemos con (*K, U*), el conjunto de todas las *f* # *C*(*X, Y*), tales que f(*K*) # *U*, esto es,

$$(K, U) = \{f \in C(X, Y) : f(K) \subseteq U\}.$$

La familia de los (*K, U*) constituye una subbase para una topología en *C*(*X, Y*), llamada topología compacto abierta. Denotemos por C_c (*X, Y*) a *C*(*X, Y*) dotado con esta topología. Si *G* y *H* son grupos topológicos, el subespacio de todos los homomorfismos continuos de *G*, en *H*, con la topología heredada de la topología compacto abierta de C_c (*G, H*), lo notaremos por Hom_c (*G, H*).

Dados dos espacios topológicos *X* e *Y* y x $\in$ *X* podemos definir una aplicación $\hat{x}$: C_c (*X, Y*) → *Y* , dada por $\hat{x}$(f) = f(x).

Por como está definida $\hat{x}$ notamos que es continua, por lo que tenemos el siguiente resultado el cual se encuentra propuesto en [2].

Propiedad 2.5. *Sean X un espacio e Y un grupo topológico, entonces* C_c*(X, Y) es un grupo topológico.*

El siguiente resultado denota un punto de partida para la caracterización de Hom_c (*G, H*).

Propiedad 2.6. *Si G y H son grupos topológicos, entonces* Hom_c*(G, H) es cerrado en* C_c*(G, H).*

Denotemos por *Hom*(G,$\mathbb{T}$) el conjunto de todos los homomorfismos continuos de un grupo topológico abeliano *G* en el grupo del circulo $\mathbb{T}$. Los elementos de *Hom*(G,$\mathbb{T}$) son llamados caracteres de *G*.

Definición 2.7. El grupo dual de un grupo topológico abeliano *G*, denotado por $\hat{G}$, es Hom_c (*G*,$\mathbb{T}$).

Ejemplo 2.8. Observemos los siguientes ejemplos:

1. Si $G = \mathbb{R}$, tenemos que $\hat{G}$ #= $\mathbb{R}$.
2. Si $G = \mathbb{Z}$., entonces $\hat{G}$ #=$\mathbb{T}$.
3. Si $G = G_1 \times G_2$ entonces $\hat{G}$ #=$\hat{G}_1 \times \hat{G}_2$.

Recordemos la definición de espacios localmente compactos.

Definición 2.9. Un espacio topológico *X* es localmente compacto si cada x $\in$ *X* tiene una vecindad compacta.

Luego un grupo topológico es localmente compacto si y sólo si tiene una vecindad compacta del neutro.

Propiedad 2.10 ([4, Proposición 7.15]). *Sea X un espacio de Hausdorff. El espacio X es localmente compacto si, y sólo si, todo x # X tiene una vecindad abierta U tal que la cerradura de U es compacta*.

En este trabajo por brevedad utilizaremos la siguiente notación:

Grupo ALC : Grupo topológico abeliano localmente compacto T_0 .

Evidenciamos como las propiedades de un grupo dotan de características a su grupo dual.

Corolario 2.11 ([16, Corolario 1]). *Si G es un grupo ALC, entonces* $\hat{G}$ *es un grupo ALC.*

Corolario 2.12 ([16, Corolario 2]). *Si G es un grupo topológico abeliano discreto, entonces* $\hat{G}$ *es un grupo compacto.*

Propiedad 2.13 ([16, Proposición 2]). *Si G es un grupo topológico abeliano compacto* T_0*, entonces* $\hat{G}$ *es discreto.*

Otras implicaciones que tiene el grupo *G* en su dual $\hat{G}$ son las siguientes. Recordemos que un elemento g de *G* es de orden finito o, de forma equivalente, un elemento de torsión si $g^n = e_G$, para algún n $\in$ $\mathbb{N}$, entonces el menor n $\in$ $\mathbb{N}$ para el cual $g^n = e_G$ se llama el orden de *g* y se denota por o(*g*).

Definición 2.14. Sea *G* un grupo abeliano. El subgrupo de elementos de torsión de *G* es t(*G*)

$$t(G) = \{g \in G : g^n = e_G \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Luego:

- Si $t(G) = G$, es decir, si todos los elementos de G tienen orden finito, decimos que G es un grupo de torsión.
- Si $t(G) = \{e_G\}$, es decir, si el grupo G no tiene elementos de orden finito, excepto e, entonces se llama libre de torsión.

Teorema 2.15 ([2, Teorema 9.6.11]). [**L. S. Pontryagin**] *Un grupo abeliano compacto G es conexo si, y sólo si, el grupo dual* $\widehat{G}$ *es libre de torsión.*

Teorema 2.16 ([2, Teorema 9.6.12]). *Un grupo abeliano compacto G es totalmente disconexo si, y sólo si,* $\widehat{G}$ *es un grupo de torsión.*

Veamos un resultado sobre los grupos metrizables.

Definición 2.17. Un espacio topológico X es un k-espacio si tiene la siguiente propiedad: Un conjunto F es cerrado en K si, y sólo si, para cada subconjunto compacto K de X, el conjunto $F \# K$ es cerrado en K [10, Teorema 3.3.18].

Una propiedad que caracteriza las funciones continuas en los k-espacios es que, una función f de un k-espacio X, a un espacio topológico, es continua si, y solo si, su restricción a cada subconjunto compacto de X es continua [10, Teorema 3.3.21].

Teorema 2.18 ([5, Teorema 1]). *Si G es un grupo topológico abeliano metrizable, entonces* $\widehat{G}$ *es un k-espacio.*

Pasemos a definir el homomorfismo dual.

Definición 2.19. Sean G y H grupos topológicos y ϕ: $G \to H$ un homomorfismo continuo. El homomorfismo dual ϕb: $\widehat{H} \to \widehat{G}$, definido por $\phi b(\chi)(g) = \chi(\phi(g))$ para todo $\chi \in \widehat{H}$ y $g \in G$, es continuo. Además existe un homomorfismo canónico

$$\alpha\colon G \to \widehat{\widehat{G}},$$

dado por

$$\alpha(g) = \widehat{g},$$

donde $\widehat{g}$: $\widehat{G} \to \mathbb{T}$ está dada por $gb(\gamma) = \gamma(g)$. Si α es un isomorfismo topológico, decimos que G es reflexivo y α es la llamada evaluación canónica.

Así como los grupos dotan de características a su grupo dual, en el caso de los homomorfismos observamos su comportamiento.

Propiedad 2.20 ([12, Proposición 3.11]). *Sean G y H grupos ALC y f : G → H un homomorfismo continuo. Si* $\widehat{f}$: $\widehat{H} \to \widehat{G}$ *es la aplicación dada por* $\widehat{f}$ $(\chi)(g) = (\chi \# f)(g)$, *para todo* $\chi \# \widehat{H}$ *y* $g \# G$, *entonces* $\widehat{f}$ *es un homomorfismo continuo. Además, si f es suprayectiva, entonces* $\widehat{f}$ *es inyectiva; y si f es abierta e inyectiva, entonces* $\widehat{f}$ *es suprayectiva.*

3. El dual de la reflexión

Recordemos el concepto de categoría el cual será utilizado en este trabajo, seguimos con la definición de algunas reflexiones y sus caracterizaciones; luego se presentan resultados y casos puntuales de gran relevancia en la temática del dual de la reflexión de un grupo topológico.

Definición 3.1. Una categoría C es una cuarteta $(Ob(C), Hom, \circ, {}_{id})$, donde:

- $Ob(C)$ es una clase de objetos.
- Para cada $X, Y \in Ob(C)$, $Hom(X, Y)$ es un conjunto cuyos elementos se llaman morfismos o flechas de X a Y.

- La aplicación composición o : $Hom(X, Y) \times Hom(Y, Z) \to Hom(X, Z)$ dada por $(f, g) \to f \circ g$ es asociativa, es decir, para toda $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y $h : Z \to W$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- Para cada $X \in \mathrm{Ob}(C)$, existe $\mathrm{i}_{dX} \in Hom(X, X)$ tal que $f \circ \mathrm{i}_{dX} = f$ y $\mathrm{i}_{dX} \circ g = g$ para cualesquiera $f \in Hom(X, Y)$ y $g \in Hom(Z, X)$.

Ejemplo 3.2. La categoría de los espacios vectoriales como objetos y los morfismos todas las transformaciones lineales entre estos objetos.

En los grupos, los morfismos son los homomorfismos de grupos.

Otro ejemplo es la categoría de los espacios topológicos como objetos y las funciones continuas entre los espacios, como los morfismos.

3.1. Algunas reflexiones

Iniciamos con el concepto categórico de reflexión.

Definición 3.3. Sean D una categoría, C una subcategoría de D y X un objeto de D. Una reflexión para X en C es un objeto $\xi(X)$ de C junto con un morfismo $\eta_X : X \to \xi(X)$ de D, que satisface la siguiente propiedad universal: dado un objeto Y de C y un morfismo $\phi: X \to Y$ de D, existe un único morfismo $\lambda: \xi(X) \to Y$ de C tal que $\lambda \# \eta_X = \phi$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\varphi"'] & \xi(X) \arrow[dl, "\lambda"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Por la unicidad de λ, cualesquiera dos reflexiones para X son isomorfas en C; así denotaremos la reflexión por $(\xi(X), \eta_X)$ (o $\xi(X)$ para abreviar).

Si existe la reflexión para cada X en D, se dice que C es una subcategoría reflexiva de D; en caso de que η_X sea un epimorfismo, se dice que existe una epireflexión para cada X en D y C es una subcategoría epireflexiva de D.

Dentro de este concepto consideramos las reflexiones sobre los grupos totalmente disconexos, donde se define la reflexión como el espacio cociente $G/c(e_G)$, siendo $c(e_G)$ la componente conexa de G que contiene a e_G. Recordemos que dado G un grupo topológico con elemento neutro e_G. La componente conexa de G que contiene a e_G es la unión de todos los subconjuntos conexos de G que contienen a e_G.

Dado que la unión de cualquier familia de subespacios conexos que contengan un punto dado es conexa, la componente conexa de G puede describirse como el mayor subespacio conexo de G que contiene a e. Por tanto, si G es un grupo topológico, entonces $c(e_G)$ es un subgrupo normal y cerrado de G [13, Proposición 3.1], y $G/c(e_G)$ es un grupo totalmente disconexo [13, Teorema 3.13].

Sobre los grupos libres de torsión tomamos a $t(G)$ el subgrupo de torsión de G y la reflexión $G/t(G)$. Si G es un grupo abeliano y $t(G)$ es el subgrupo de torsión de G, entonces $G/t(G)$ es libre de torsión. En efecto, sea $\pi : G \to G/t(G)$ el homomorfismo canónico. Supongamos que $(\pi(x))^n = e_G$, luego $\pi(x^n) = \pi(e_G)$, esto es equivalente a que $x^n \in t(G)$, luego existe k tal que $x^{nk} = e_G$, así $x \in t(G)$, por tanto $\pi(x) = \pi(e_G)$.

Sobre los grupos abelianos, o la abelianización de un grupo G, definida como el grupo G/C, donde C es la clausura de $[G, G]$, siendo éste último el subgrupo generado por todos los conmutadores, o elementos de la forma $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ donde $x, y \in G$.

Continuemos con la reflexión sobre una clase más amplia que los grupos compactos, hacemos referencia a la constituida por los grupos precompactos o totalmente acotados.

Definición 3.4. Un grupo topológico G es precompacto si para cada vecindad abierta V de e_G, existe un subconjunto finito F de G tal que $G = FV$.

Nota. La propiedad de precompacidad se preserva en:

- Subgrupos, cada subgrupo H de un grupo topológico precompacto G es un grupo topológico precompacto [2, Proposición 3.7.4].
- Bajo homomorfismos continuos, si f es un homomorfismo continuo de un grupo topológico precompacto G en un grupo topológico H, entonces el grupo H también es precompacto [2, Proposición 3.7.1].
- Productos, el producto de una familia de grupos topológicos precompactos es un grupo topológico precompacto [2, Corolario 3.7.14].

Dentro de esta particular definición encontramos los grupos #0-acotados u ω-estrechos.

Definición 3.5. Un grupo topológico G es #0-acotado si para toda vecindad U de e_G existe un conjunto numerable K # G tal que $G = KU$.

Teorema 3.6. *Las clases de los grupos topológicos #0-acotados y precompactos, son categorías epireflexivas de los grupos topológicos.*

Demostración. Sean (G, τ) un grupo topológico y Γ la familia de todas las topologías de grupos topológicos $\#_0$-acotados contenidas en τ. $\Gamma \neq$ #, ya que la topología indiscreta está en Γ. Sea ρ la topología en G generada por S Γ, [13, Lema 1.2 y Proposición 5.5] garantizan que (G, ρ) es un grupo topológico $\#_0$-acotado, además dado que τ es más fina que ρ, tenemos que id: $(G, \tau) \to (G, \rho)$ es continua. Que la clase Γ sea epireflexiva significa que $((G, \rho), \mathrm{id})$ es la reflexión de (G, τ) sobre la clase de los grupos topológicos $\#_0$-acotados. Probaremos la propiedad universal, consideremos un homomorfismo continuo de grupos, $f : G \to H$, siendo H un grupo topológico $\#_0$-acotado. Sin pérdida de generalidad suponemos que f es sobreyectiva. Podemos probar que la topología inicial en G generada por f, τ^f, es una topología de grupo para G [4, Proposición 4.1]. Veamos que (G, τ^f) es $\#_0$-acotado. Sea V una vecindad abierta de e_G de la forma $f^{-1}(U)$, donde U es una vecindad abierta de e_H. Existe K # G, numerable, tal que $KU = H$. Para cada $k \in K$, elijamos x_k en G, tal que $f(x_k) = k$. Sea $L = \{x_k : k \in K\}$. Es fácil ver que $G = LV$. Dado que L es numerable, tenemos que (G, τ^f) es $\#_0$-acotado. Por la forma como se eligió ρ, tenemos que τ^f # ρ y por ende $f : (G, \rho) \to H$, sigue siendo continua. Por tanto (G, id) es la reflexión deseada.

La construcción de la reflexión sobre los grupos precompactos, se realiza de forma análoga a la anterior.

Consideremos la reflexión en los espacios completos, particularmente en la llamada completación de Raĭkov.

Definición 3.7. Sean X un conjunto y $\mathfrak{F}$ una familia no vacía de subconjuntos de X. La familia $\mathfrak{F}$ es un filtro cuando:

1. # $\notin \mathfrak{F}$.
2. Si $A_1, A_2 \in F$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{F}$.
3. Si $A \in \mathfrak{F}$ y A # B # X, entonces $B \in \mathfrak{F}$.

Un filtro $\mathfrak{F}$ en X es un filtro maximal o un ultrafiltro si para todo filtro $\mathfrak{F}'$ en X tal que $\mathfrak{F}$ # $\mathfrak{F}'$ se cumple $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$.

Definición 3.8. Sea G un grupo topológico; un filtro $\mathfrak{F}$ de subconjuntos no vacíos de G es un filtro de Cauchy si para cada vecindad abierta U de e_G existe $F \in \mathfrak{F}$ tal que $F^{-1} \cdot F$ # U y $F \cdot F^{-1}$ # U.

Definición 3.9. Un grupo topológico G se dice completo Raĭkov, si todo filtro de Cauchy en G, converge.

Además, un grupo topológico G es compacto si, y sólo si, es precompacto y completo Raĭkov [2, Teorema 3.7.15].

En el siguiente teorema que dice que todo grupo topológico admite una completación que es única, salvo isomorfismo topológico, presentamos una de las mas importantes propiedades de grupos topológicos completos Raĭkov.

Teorema 3.10 (D.A. Raˇıkov). *Para cada grupo topológico T_0 G, existen un grupo topológico completo Ra ĭ kov #G y un isomorfismo topológico i de G en un subgrupo denso i(G) de #G, con la siguiente propiedad: siempre que $f : G \to H$ sea un homomorfismo y H sea un grupo completo Raˇıkov, f admite una extensión a un homomorfismo continuo $f^{\#} : \#G \to H$.*

Para la lectura y estudio de la demostración del Teorema 3.10, ver [2, Proposición 3.6.12].

Ahora el resultado a considerar es aquel que implica que un grupo topológico $\#G$ como en el Teorema 3.10 es, en un sentido natural, único y $\#G$ es T_0. Es común identificar G con $i(G)$ y así considerar que la cerradura de G es $\#G$. Una ampliación de este tópico podemos consultarlo en [1] y [2], entre otros.

En los grupos precompactos, todo ultrafiltro es de Cauchy. Si el grupo es T_0 precompacto y completo entonces es compacto, y siendo H un subgrupo de un grupo topológico T_0 G, si H es precompacto, $\overline{H}$ también es precompacto. Estas propiedades son útiles.

Teorema 3.11. *Si G es precompacto y T_0, entonces #G es compacto.*

Demostración. Como $\overline{G} = \#G$, luego $\#G$ es precompacto y por ser completo, se tiene que $\#G$ es compacto.

En los espacios compactos, también se define una reflexión, llamada la compactación de Bohr. En una ardua investigación hacemos notar que el siguiente resultado aparece por primera vez en la literatura en el cual realizamos adaptaciones con muchas variaciones de una técnica conocida, usada para demostrar la existencia de grupos libres en [2].

Teorema 3.12. *La categoría de los grupos topológicos compactos y T_0 es una subcategoría reflexiva de los grupos topológicos.*

Demostración. Supongamos que G es un grupo topológico. Sean $\kappa = 2^{2^{|G|}}$ y F la clase de todos los homomorfismos continuos $f : G \to H_f$, tales que $|H_f| \leq \kappa$, y H_f es compacto y T_0.

Definamos en F la siguiente relación, dados f, g $\in$ F, decimos que f # g, si existe un isomorfismo ψ: $H_f \to H_g$ tal que $g = \psi \circ f$. De esta forma tenemos que $|F/\#| \leq 2^{2^{\kappa}} = \lambda$, luego podemos obtener una familia de representantes $\{f_i\}_{i\# I}$, con $|I| \leq \lambda$. Sea $L = \Pi_{i \in I} H_{f_i}$. Definamos $b : G \to L$ por $b(g) = (f_i(g))_{i\# I}$ para cada $g \in G$.

La *compactación de Bohr* se define como: $bG = \overline{b(G)}$. Como cada H_{f_i} es compacto, por el Teorema de Tychonoff, L es compacto. Luego, la cerradura de $b(G)$ en L es compacto. Esto implica que bG, la compactación de Bohr, es compacto. Además bG es T_0, por ser un subespacio de L, el cual es T_0.

Ahora vamos a probar que $b : G \to bG$ satisface la propiedad universal de las reflexiones. Para esto, sean K un grupo compacto T_0 y $f : G \to K$ un homomorfismo continuo. Definimos $H_f = \overline{f(G)}$. Notemos que $|H_f| \leq \kappa$. En efecto, por ser H_f cerrado en el compacto K, H_f es compacto. Luego por el inciso a. de [2, Corolario 5.2.7] tenemos que

$$|H_f| = |\overline{f(G)}| = 2^{w(\overline{f(G)})}.$$

Por el inciso b. de [2, Corolario 5.2.7],

$$|\overline{f(G)}| = 2^{w(\overline{f(G)})} = 2^{\chi(\overline{f(G)})}$$

al ser $f(G)$ denso en $\overline{f(G)}$, [2, Lema 1.4.15]. Esto implica que $\chi(\overline{f(G)}) = \chi(\overline{f(G)})$, de esta manera queda

$$|\overline{f(G)}| = 2^{\chi(\overline{f(G)})} = 2^{\chi(f(G))}$$

luego aplicando [10, Teorema 1.4.16],

$$|\overline{f(G)}| = 2^{\chi(f(G))} \leq 2^{\chi(G)}.$$

Por [2, Teorema 5.2.5] obtenemos que $w(X) \geq \chi(X)$, así nos queda

$$|\overline{f(G)}| \leq 2^{\chi(G)} \leq 2^{w(G)}.$$

Finalmente, como $w(G) \leq 2^{|G|}$, concluimos que $|\overline{f(G)}| \leq 2^{w(G)} \leq 2^{2^{|G|}} = \kappa$. Esto muestra que $f : G \to H_f \in F$. Luego existe i tal que $f \# f_i$, es decir que existe un isomorfismo ψ: $H_f \to H_{fi}$ tal que el siguiente diagrama conmuta, donde π_{Hfi} es la proyección de L sobre H_{fi}.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, "f_i"] & H_f \arrow[d, "\psi"] \\
L \arrow[r, "\pi_{H_{f_i}}"'] & H_{f_i}
\end{tikzcd}$$

Si $f^{\#} : L \to H$, está dada por $f^{\#} = \psi^{-1} \circ \pi_{Hfi}$, entonces

$$f^* \circ b = \psi^{-1} \circ \pi_{H_{f_i}} \circ b = \psi^{-1} \circ f_i = f.$$

La función $\tilde{f} = f^{\#} |_{bG}$, satisface la propiedad universal de las reflexiones, esto es, $f = \tilde{f} \circ b$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "b"] \arrow[d, "f"'] & bG \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\
K &
\end{tikzcd}$$

Definición 3.13. Dado un grupo topológico G, la compactación de Bohr de G es un grupo topológico compacto y T_0, denotado por bG, que admite un homomorfismo continuo b: $G \to bG$ que es universal, en el sentido siguiente: si K es un grupo topológico compacto y T_0 y f: $G \to K$ es un homomorfismo continuo, entonces existe un único homomorfismo continuo fe: $bG \to K$ tal que $\tilde{f} \circ b = f$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "b"] \arrow[d, "f"'] & bG \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ K & \end{tikzcd}$$

La compactación de Bohr se define de manera única, salvo isomorfismos, es decir, si (BG, B) es otra compactación de Bohr, entonces existe un isomorfismo único α: $bG \to BG$ tal que $B = \alpha \circ b$. [17, Definición 1.1]

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "b"] \arrow[d, "B"'] & bG \arrow[dl, "\alpha"] \\ BG & \end{tikzcd}$$

Para el conjunto bG definido en (1), se tiene el siguiente resultado

Propiedad 3.14. *Si G es precompacto y* T_0, *entonces* $\#G = bG$.

Demostración. Como bG es compacto y T_0, bG es compacto y T_2. Luego bG es completo. Para ver que $bG = \#G$, vamos a verificar que bG cumple lo que se indica en el Teorema 3.10. Por el Teorema 3.11, #G es compacto. Además $\#G$ es T_0. Falta ver que $\#G$ cumple la propiedad universal. En efecto, sea $f: G \to H$ un homomorfismo continuo, siendo H un grupo topológico compacto y T_0. Por [2, Proposición 3.6.13] existe una extensión continua de f, $\bar{f}: \#G \to \#H$. Por ser H compacto en $\#H$ que es de Hausdorff, tenemos que $H = \overline{H} = \#H$, así $\bar{f}: \#G \to H$. La unicidad de bG dice que $\#G = bG$.

Corolario 3.15. Si G es precompacto y de Hausdorff, b : G → bG es un embebimiento, y b(G) es denso en bG.

Para la demostración del corolario anterior y amplificar este tema recomendamos los textos [2], [6], [8] , [14] y [15].

3.2. El dual de algunas reflexiones

Veamos el dual de algunas reflexiones y su comportamiento.

Ejemplo 3.16. Consideremos la reflexión sobre los espacios totalmente disconexos. Puesto que $\widehat{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z}$ [12, Ejemplo 2.7], y considerando que $\mathbb{Z}$ es totalmente disconexo, tenemos que $\xi(\widehat{\mathbb{T}}) = \xi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\{1\} = \mathbb{Z}$.

Ahora como el toro es conexo, se tiene en este lado que, $\xi(\widehat{\mathbb{T}}) = \widehat{\mathbb{T}/\mathbb{T}} = \widehat{\{1\}} = \{1\}$.

Así $\xi(\widehat{\mathbb{T}}) \neq \xi(\widehat{\mathbb{T}})$.

Ejemplo 3.17. En la reflexión sobre los grupos libres de torsión, tenemos que $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}$ [12, Ejemplo 2.8] y el subgrupo de torsión del toro (considerado como el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$) es $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Luego $\xi(\widehat{\mathbb{Z}}) = \xi(\mathbb{T}) = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})/(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$

Por otro lado, al ser $\mathbb{Z}$ libre de torsión, obtenemos que $\xi(\widehat{\mathbb{Z}}) = \widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$.

Así $\xi(\widehat{\mathbb{Z}}) \neq \xi(\widehat{\mathbb{Z}})$.

El siguiente resultado dice que si $T \in \xi$, entonces los grupos $\widehat{G}$ y $\xi(\widehat{\xi(G)})$ son algebraicamente isomorfos.

Teorema 3.18. *Sean ξ una subcategoría de la categoría de los grupos topológicos ALC y G un grupo topológico ALC. Si $\mathbb{T}$ # ξ y φ: $G \rightarrow \xi(G)$ la reflexión de G en $\xi(G)$, entonces φb: $\xi\,\widehat{\xi(G)} \rightarrow \widehat{G}$ es un isomorfismo algebraico continuo.*

Demostración. De la Proposición 2.20, $\widehat{\varphi}$ es un homomorfismo continuo. Veamos que es biyectivo. Como $\mathbb{T} \in \xi$, por la propiedad universal de reflexión, dado un morfismo χ: G $\rightarrow \mathbb{T}$, existe un único morfismo $\phi\chi$: ξ(G) $\rightarrow$ T tal que $\phi\chi$ o $\phi = \chi$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\chi"'] & \xi(G) \arrow[dl, "\varphi_\chi"] \\ \mathbb{T} & \end{tikzcd}$$

Recordemos que $\widehat{\varphi}$: $\widehat{\xi(G)} \rightarrow \widehat{G}$, se define como sigue, para cada λ: $\xi(G) \rightarrow \mathbb{T}$, $\widehat{\varphi}(\lambda) = \lambda o \phi$; el cual es continuo.

Definamos ahora el homomorfismo γ : $\widehat{G} \rightarrow \widehat{\xi(G)}$ donde para todo elemento $\chi \in \widehat{G}$, $\gamma(\chi) = \phi\chi$, es decir, que γ envía cada elemento ξ de $\widehat{G}$ en el único $\phi\chi$ que hace que el diagrama anterior conmute. Veamos que $\widehat{\varphi}$ y γ son aplicaciones inversas. En efecto, para $\lambda \in \widehat{\xi(G)}$,

$$(\gamma \circ \widehat{\varphi})(\lambda) = \gamma(\widehat{\varphi}(\lambda)) = \gamma(\lambda \circ \varphi) = \varphi_{\lambda\circ\varphi},$$

así $\phi\lambda o \phi$ hace que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\lambda\circ\varphi"'] & \xi(G) \arrow[dl, "\varphi_{\lambda\circ\varphi}"] \\ \mathbb{T} & \end{tikzcd}$$

Puesto que λ también hace que el diagrama conmute y $\phi\lambda o \phi$ es único, se debe tener que $\phi\lambda \# \phi = \lambda$, por tanto $(\gamma\, o \widehat{\varphi})(\lambda) = \lambda$. Además, para cada $\chi \in \widehat{G}$,

$$(\widehat{\varphi} \circ \gamma)(\chi) = \widehat{\varphi}(\gamma(\chi)) = \widehat{\varphi}(\varphi_\chi) = \varphi_\chi \circ \varphi = \chi,$$

por la propiedad universal de reflexión. Esto prueba que $\widehat{\varphi}$ es biyectivo y, por ende, es un isomorfismo algebraico continuo.

Los ejemplos 3.16 y 3.17 evidencian que la hipótesis de que $\mathbb{T} \in \xi$ es necesaria en el Teorema 3.18.

Entonces siempre que $\mathbb{T} \in \xi$, tenemos que el homomorfismo dual de la aplicación del grupo a la reflexión, $\widehat{\varphi}$: $\widehat{\xi(G)} \rightarrow \widehat{G}$, es un isomorfismo y por tanto γ : $\widehat{G} \rightarrow \widehat{\xi(G)}$ también es un isomorfismo. Puesto que, para que $\widehat{\varphi}$ sea un isomorfismo topológico, basta demostrar que γ es continua o lo que equivale a que $\widehat{\varphi}$ sea abierta; por lo que nos proponemos estudiar bajo que condiciones la aplicación γ es continua.

Corolario 3.19. *Sean G un grupo topológico ALC y C la categoría de grupos precompactos o bien la de grupos $\#_0$-acotados. Entonces $\widehat{G}$ es continuamente isomorfo a $\widehat{C(G)}$.*

Demostración. Puesto que $\mathbb{T}$ es compacto y, por tanto precompacto y $\#_0$-acotado, sucede que $\mathbb{T} \in C$. Sea id: $G \to C(G)$ la apliación definida en el Teorema 3.6, la cual define la reflexión sobre los grupos precompactos. Luego por el Teorema 3.18, $\widehat{id} : \widehat{C(G)} \to \widehat{G}$ es un isomorfismo algebraico continuo.

El siguiente resultado inédito presenta una condición para que Gb sea topológicamente isomorfo a $\widehat{\xi(G)}$.

Teorema 3.20. *Sean ξ una categoría tal que $\mathbb{T} \# \xi$ y G un grupo abeliano, compacto y T_0. Entonces $\widehat{G} \cong \widehat{\xi(G)}$.*

Demostración. Dado que $\mathbb{T} \in \xi$, por el Teorema 3.18, $\widehat{\varphi}$ es una biyección. Como G es compacto entonces $\widehat{G}$ es discreto por la Proposición 2.13. Por consiguiente la aplicación $\gamma : \widehat{G} \to \widehat{\xi(G)}$, es continua. Como el homomorfismo $\widehat{\varphi}$ es biyectivo y continuo con inversa continua, tenemos que $\widehat{\varphi}$ es un homeomorfismo y por tanto un isomorfismo topológico.

Un resultado relevante se obtiene en los espacios $\check{c}$ech completos.

Definición 3.21. Un espacio Tychonoff *X*, se dice $\check{c}$ech completo si existe una compactación de *X*, *cX*, tal que $cX - X = \cap_{i=1}^{\infty} F_i$, donde los F_i son cerrados en *cX*, para cada $i < \omega$.

De la compactación de Alexandroff, tenemos que si X es localmente compacto y T_2, entonces *X* es $\check{c}$ech completo. El siguiente resultado aparece probado en [3, Teorema 1.31]

Teorema 3.22. *Si $f : X \to Y$ es una función continua abierta y sobreyectiva, de un espacio $\check{c}$ech completo X en un espacio de Hausdorff Y, entonces para K compacto en Y, existe W compacto en X, tal que $f(W) = K$.*

En el siguiente teorema inédito exponemos una segunda condición para que $\widehat{G}$ sea topológicamente isomorfo a $\widehat{\xi(G)}$.

Teorema 3.23. *Sean ξ una categoría tal que $\mathbb{T} \in \xi$. Si G es un grupo ALC T_0* y ϕ: *$G \to \xi(G)$ es abierta y sobreyectiva, entonces $\widehat{G} \cong \widehat{\xi(G)}$.*

Demostración. Como $\mathbb{T} \in \xi$, por el Teorema 3.18, $\widehat{\varphi}$: $\widehat{\xi(G)} \to \widehat{G}$ es una biyección, teniendo a $\gamma : \widehat{G} \to \widehat{\xi(G)}$ como función inversa. Veamos que γ es continua. Para ello, sea (K, U) una vecindad de e $\widehat{\xi(G)}$ en $\widehat{\xi(G)}$, siendo K compacto en $\widehat{\xi(G)}$ y U abierto en $\mathbb{T}$. Como G es ALC, G es $\check{c}$ech completo. Luego, por el Teorema 3.22, existe W compacto en G, tal que $\phi(W) = K$. Notemos que (W, U) es una vecindad de e$\widehat{G}$ en $\widehat{G}$. Veamos que $\gamma((W, U)) \# (K, U)$. En efecto, sea $\chi \in \widehat{G}$, tal que $\chi(W) \# U$ y probemos que $\gamma(\chi) \in (K, U)$, es decir que $\gamma(\chi)(K) \# U$. Si $y \in K$, entonces $y = \phi(t)$, con $t \in W$. Por tanto

$$\gamma(\chi)(y) = \varphi_\chi(y) = \varphi_\chi(\varphi(t)) = (\varphi_\chi \circ \varphi)(t) = \chi(t) \in U,$$

es decir $\gamma(\chi)(K) \# U$.

Para grupos metrizables consideremos el siguiente teorema extraído de los textos [3], [5]. Recordemos que siendo *X* un espacio topológico, (Y, d) un espacio métrico, y x_0 un punto en *X*, un conjunto *K* de funciones de *X* en *Y* se dice equicontinuo en x0 si para todo $r > 0$, existe *A* entorno de x_0 tal que para todo $f \in K$, $f(A) \# B(f(x0), r) = \{y \in Y : d(y, f(x_0)) < r\}$. Notemos que, en particular, si *K* es equicontinuo en x_0, entonces todas las funciones que pertenecen a *K* son continuas en x_0. Decimos que *K* es equicontinua si lo es para todo $x_0 \in X$.

Teorema 3.24 ([5, Teorema 2]). *Sea G un grupo topológico abeliano metrizable. Supongamos que H es un subgrupo denso de G. Entonces los grupos duales $\widehat{G}$* y *$\widehat{H}$ son topológicamente isomorfos.*

Demostración. Está claro que $\widehat{H}$ y $\widehat{G}$ son algebraicamente isomorfos. Para ver que ellos son topológicamente isomorfos, primero probamos que los dos grupos duales $\widehat{H}$ y $\widehat{G}$ tienen los mismos conjuntos compactos.

Tomemos un subconjunto compacto *K* de $\widehat{H}$. Evidentemente *K* es cerrado en $\widehat{G}$. Como *H* es metrizable, *K* es equicontinuo [18, Teorema *C* (Teorema de Ascoli)]. Por lo tanto, existe una vecindad *U* de e_G tal que *K* $\# (U \cap H, V)$, siendo *V* un subconjunto abierto de $\mathbb{T}$.

Sea W una vecindad de e_G tal que $W+W\,\#\,U$. Observemos que W # $\overline{U\cap H}$. (Si $x\in W$, podemos tomar una red (x_α) $\alpha\in\Lambda$ # H tal que $x_\alpha\in x+W\,\#\,U$, para todo $\alpha\geq\alpha_0$; por lo tanto, $x\in\overline{U\cap H}$.) Notemos que $(U\,\#\,H, V)=(\overline{U\cap H}, V)\,\#\,(W, V)$; lo que a su vez implica que $K\,\#\,(W, V)$ y por lo tanto K es compacto en $\widehat{G}$. Esto muestra que $\widehat{H}$ y $\widehat{G}$ tienen los mismos conjuntos compactos. Ahora, por el Teorema 2.18, $\widehat{H}$ y $\widehat{G}$ son k-espacios, así concluimos que tienen los mismos conjuntos cerrados y en consecuencia son topológicamente isomorfos.

Caso conocido de este hecho, es la completación de Raĭkov.

Corolario 3.25. *Sea G un grupo topológico abeliano metrizable y # la subcategoría de los grupos completos. Entonces* $\widehat{G}\cong\widehat{\varrho G}$, *donde #G es la completación de Ra ĭ kov de G.*

Demostración. Debido a que $\#G$ es la completación de Raĭkov de G, tenemos que G es denso en $\#G$, esto es $\overline{G}=\#G$, por ser G metrizable, [2, Proposición 3.6.20] garantiza que $\overline{G}=\#G$ también es metrizable y aplicando nuevamente el Teorema 3.24, $\widehat{G}$ y $\widehat{\varrho G}$ son topológicamente isomorfos, es decir, $\widehat{G}\cong\widehat{\varrho G}$.

Corolario 3.26. *Sea G un grupo topológico abeliano precompacto metrizable. Entonces* $\widehat{G}\cong\widehat{\varrho G}$, *donde bG es la compactación de Bohr de G.*

Demostración. Dado que bG es la compactación de Bohr de G, se sigue que G es denso en bG, es decir $G=bG$; como G es metrizable, [2, Proposición 3.6.20] implica que $=bG$ es metrizable y aplicando el Teorema 3.24, $\widehat{G}$ y $\widehat{bG}$ son topológicamente isomorfos, es decir, $\widehat{G}\cong\widehat{bG}$.

El siguiente resultado conocido (ver Proposición 2.13), es una generalización del hecho de que todo grupo abeliano compacto y de Hausdorff, tiene dual discreto. Sin embargo esta es una prueba alternativa usando la compactación de Bohr.

Teorema 3.27. *Sea G un grupo topológico abeliano precompacto y metrizable. Entonces* $\widehat{G}$ *es discreto.*

Demostración. Por el Corolario 3.26, $\widehat{bG}\cong\widehat{G}$, pero por ser bG compacto, la Proposición 2.13 dice que $\widehat{bG}$ es discreto, luego así mismo es $\widehat{G}$.

Conclusiones

La teoría de dualidad en el rol de ser una herramienta de gran ayuda para el análisis y estudio de la estructura de los grupos, en su extenso listado de aplicaciones en este trabajo se reduce al dual de la reflexión de un grupo topológico; verificando en primera instancia, la importancia que tiene en la caracterización del mismo el hecho de que $\mathbb{T}\in\xi$, esto es, que $\mathbb{T}$ esté en la subcategoría de reflexión ξ a considerar, debido a que, cuando esto no se da, no se evidencian relaciones entre el dual y la reflexión del dual, como es el caso de la reflexión sobre los espacios totalmente disconexos y la reflexión sobre los espacios libres de torsión.

Los resultados obtenidos en esta teoría para grupos topológicos, ayudan a darle forma al proceso de caracterización debido al comportamiento particular que los grupos topológicos presentan. En general, notamos que el Teorema de Pontryagin sobre dualidad de grupos abelianos permite identificar un grupo G con $\widehat{G}$, hecho que, en el caso de la reflexión de un grupo topológico, se ha verificado que $\widehat{G}\cong\widehat{\xi(G)}$, donde $\cong$ denota un isomorfismo continuo y $\xi(G)$ es la reflexión de G en ξ con la condición de que $\mathbb{T}\in\xi$; ahora, para que esto se consolide como un isomorfismo topológico, consideramos en los resultados las siguientes condiciones:

1. G un grupo topológico compacto T_0 y $\mathbb{T}$ en la subcategoría de reflexión ξ.
2. G un grupo topológico ALC T_0, $\mathbb{T}\in\xi$ y $\phi\colon G\to\xi(G)$ es sobreyectiva y abierta.
3. G es abeliano metrizable y un subgrupo denso de $\xi(G)$.

En cada uno de estos resultados se presentan casos conocidos y de relevancia como son la abelianización, la compactación de Bohr y la completación de Raĭkov, citando este trabajo como antecedente a futuras investigaciones sobre esta temática para caracterizar el dual de otras reflexiones.

Preguntas abiertas

1. Sea S un solenoide (límite inverso de circunferencias, $\mathbb{T}$ es un caso particular de solenoide) y supongamos que S es un elemento de una categoría. ¿Se cumplen algunos de los resultados que hemos mencionado?, ¿el dual se podría definir con respecto al solenoide dado?
2. Sean ξ una categoría y *G* un grupo topológico. Si *G* es un k-espacio, $\mathbb{T} \in \xi$ y ϕ: G → ξ(G) es sobreyectiva y abierta, entonces ¿$\hat{G} \cong \widehat{\xi(G)}$?
3. Sea *G* un grupo topológico abeliano pseudometrizable. Supongamos que *H* es un subgrupo denso de *G*. ¿Son los grupos duales $\hat{G}$ y $\hat{H}$ topológicamente isomorfos?

Referencias

[1] Arhangel'skii A.V. and Ponomarev V.I., *Fundamentals of general topology*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1984.

[2] Arhangel'skii A.V. and Tkachenko M.G., *Topological groups and related structures*, Atlantis Press, Paris; World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Vol. I, Hackensack, NJ, 2008. doi: 10.2991/978-94-91216-35-0

[3] Aussenhofer L., *Contributions to the duality theory of abelian topological groups and to the theory of nuclear groups*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), Varsovia, 1999.

[4] Casarrubias S.F. and Tamariz M.A., *Elementos de Topología General,* Soc. Mat. Mex., vol. 37, D.F., 2012.

[5] Chasco M.J., "Pontryagin duality for metrizable groups", *Archiv der Math*, 70 (1998), No. 1, 22-28. doi: 10.1007/s000130050160

[6] Comfort W.W., Trigos F.J., Wu T.S., "The Bohr compactification, modulo a metrizable subgroup", *Fund. Math*., 152 (1997), 97-98. doi: 10.4064/fm-63-1-97-110

[7] Deitmar A., A first course in harmonic analysis", *Springer-Verlag*, 2nd ed., New York, 2005.

[8] Dikranjan D., Ferrer M.V. and Hernández S., "Dualities in topological groups", *Sci. Math. Jpn*., 72 (2010), No. 2, 197-235.

[9] Dummit D.S. and Foote R.M., *Abstract Algebra*, 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 2004.

[10] Engelking R., *General Topology*, Heldermann Verlag, 2nd ed., vol. 6, Berlin, 1989.

[11] Ferrer M., Hernández S. and Uspenskij V., "Precompact groups and property (T)", *J. Math. Anal.* Appl., 404 (2013), No. 2, 221-230. doi: 10.1016/j.jmaa.2013.03.004

[12] Gary M., "Teoría Clásica de Dualidad", Tesis (M.Sc.), Universidad Autónoma Metropolitana, D.F., 2011, 52 p.

[13] Hernández C., Tkachenko M.G., Villegas L. and Rendón O., *Grupos Topológicos*, Universidad Autonoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, México, 1997.

[14] Holm P., "On the Bohr compactification*", Matematisk Seminar, Universitetet i Oslo*, No. 6, 1963.

[15] Holm P., "On the Bohr compactification", *Math. Ann*, 156 (1964), 34-46. doi: 10.1007/BF01359979

[16] Morris S.A., *Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, 1977.

[17] Shubin M.A., "Almost periodic functions and partial differential operators", *Uspehi Mat. Nauk*, 33 (1978), No. 2, 3-47. doi: /10.1070/RM1978v033n02ABEH002303

[18] Simmons G.F., *Introduction to topology and modern analysis*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, San Francisco, 1963.

Información adicional

Para citar este artículo: A. C. Castillo y J. C. Hernández, El dual de la reflexión de un grupo topológico, *Rev. Integr. temas mat*. 39 (2021), No. 1, 23-39. doi: 10.18273/revint.v39n1-2021002