



Revista Integración

ISSN: 0120-419X

ISSN: 2145-8472

Universidad Industrial de Santander

CORONEL, ANÍBAL; LOZADA, ESPERANZA

Una nueva prueba para una conjetura de Özban

Revista Integración, vol. 39, núm. 2, 2021, Julio-Diciembre, pp. 129-135

Universidad Industrial de Santander

DOI: <https://doi.org/10.7440/res64.2018.03>

Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=327070750001>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org
UAEM

Sistema de Información Científica Redalyc
Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto



Una nueva prueba para una conjetura de Özban

ANÍBAL CORONEL ^a , ESPERANZA LOZADA ^b

^{a,b} Universidad del Bío-Bío, Departamento de Ciencias Básicas, Chillán, Chile.

Resumen. En este artículo presentamos una prueba corta y elemental de la siguiente desigualdad algebraico-trigonométrica de tipo Laub-Ilani: $\cos(x^y) + \cos(y^x) \geq \cos(x^x) + \cos(y^y)$ para $x, y \in [0, \pi/2]$ que fue conjeturada por Özban [‘New algebraic-trigonometric inequalities of Laub-Ilani type’, Bull. Aust. Math. Soc. 96 (2017), 87–97] y recientemente probada por Matejíčka [‘Proof of one open inequality of Laub-Ilani type’, Journal of Mathematical Inequalities, 14 (2020), 83–98]. La prueba se basa en las propiedades de las funciones potenciales-exponenciales y trigonométricas.

Palabras clave: Desigualdad de Laub-Ilani, desigualdad trigonométrica, desigualdad algebraica-trigonométrica, desigualdad potencial-exponencial.

MSC2010: 26D05, 26D07, 26D20.

A new proof for a Özban conjecture

Abstract. In this paper, we present an elementary short proof of the following algebraic-trigonometric inequality of Laub-Ilani type: $\cos(x^y) + \cos(y^x) \geq \cos(x^x) + \cos(y^y)$ for $x, y \in [0, \pi/2]$ which was conjectured by Özban [‘New algebraic-trigonometric inequalities of Laub-Ilani type’, Bull. Aust. Math. Soc. 96 (2017), 87–97] and recently proved by Matejíčka [‘Proof of one open inequality of Laub-Ilani type’, Journal of Mathematical Inequalities, 14 (2020), 83–98]. The proof is based on the properties of the power-exponential and trigonometric functions.

Keywords: Laub-Ilani inequality, trigonometric inequality, algebraic-trigonometric inequality, power-exponential inequality.

E-mail: acoronel@ubiobio.cl ^a , elozada@udec.cl ^b.

Recibido: 8 de septiembre 2020, Aceptado: 23 de marzo 2021.

Para citar este artículo: A. Coronel & E. Lozada, Una nueva prueba para una conjetura de Özban, *Rev. Integr. Temas Mat.*, 39 (2021), No. 2, 129–135. doi: 10.18273/revint.v39n2-2021001

1. Introducción

La siguiente desigualdad

$$\cos(x^x) + \cos(y^y) < \cos(x^y) + \cos(y^x), \quad 0 < x < y \leq \pi/2, \quad (1)$$

fue conjeturada por Özban en [15] y fue probada recientemente por Matejíčka [11]. Se recuerda que la introducción de varias desigualdades algebraico-trigonométricas por Özban [15], se inspiró en la siguiente desigualdad exponencial-potencial

$$x^x + y^y \geq x^y + y^x, \quad x, y \in [0, \infty), \quad (2)$$

que fue probada de forma independiente por Laub-Ilani [6, 5] y Zeikii-Cirtoaje-Berndt [17, 2]. Para obtener detalles importantes sobre generalizaciones, extensiones y desigualdades relacionadas con (2), consultar las referencias [4, 3, 1, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 16]. Además, se observa que la prueba de (1) desarrollada por Matejíčka en [11] se basa en métodos de análisis matemático y numérico. Sin embargo, se puede construir una prueba alternativa basada en las propiedades elementales de las funciones exponencial, potencial y trigonométricas. Así, el objetivo de este artículo es presentar una prueba alternativa de (1) y extender la desigualdad al caso $x, y \in [0, \pi/2]$, es decir, se demostrará el siguiente teorema:

Teorema 1.1. *La siguiente desigualdad*

$$\cos(x^x) + \cos(y^y) \leq \cos(x^y) + \cos(y^x), \quad x, y \in [0, \pi/2], \quad (3)$$

es válida.

2. Prueba del Teorema 1.1

Se introduce la notación $S = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ y los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} \hat{S} &= S - \{(0, 0)\}, & S_1^u &= \{(x, y) \in \hat{S} : x < y \leq 1\}, \\ S_2^u &= \{(x, y) \in \hat{S} : x < 1 < y\}, & S_3^u &= \{(x, y) \in \hat{S} : y > x \geq 1\}, \\ S_1^l &= \{(x, y) \in \hat{S} : y < x \leq 1\}, & S_2^l &= \{(x, y) \in \hat{S} : y < 1 < x\}, \\ S_3^l &= \{(x, y) \in \hat{S} : x > y \geq 1\}, & S_d &= \{(x, y) \in S : x = y\}. \end{aligned}$$

Se observa que la familia de conjuntos $\{S_d, S_1^u, S_2^u, S_3^u, S_1^l, S_2^l, S_3^l\}$ es una partición de S . Además, se considera la función $G : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$G(x, y) = \cos(x^y) + \cos(y^x) - \cos(x^x) - \cos(y^y). \quad (4)$$

Entonces, para probar la desigualdad (3), demostraremos $G(x, y) \geq 0$ en cada conjunto de la partición.

Caso $(x, y) \in S_d$. La desigualdad (3) se satisface en S_d , dado que (3) en S_d es equivalente a la identidad: $\cos(x^x) + \cos(x^x) = \cos(x^x) + \cos(x^x)$.

Caso $(x, y) \in S_1^u$. En este caso se sigue un procedimiento análogo a la demostración del Teorema 2.3 en [15]. Seleccionamos arbitrariamente $y \in (0, 1]$ y se define la función $g : [0, y] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la relación $g(t) = G(t, y)$ siendo G la función dada en (4). Note que $x < y \leq 1$ implica que $0 \leq t \leq y \leq 1$, es decir $[0, y] \subset [0, 1]$. Así la función g es definida explícitamente por

$$g(t) = \cos(t^y) + \cos(y^t) - \cos(t^t) - \cos(y^y), \quad t \in [0, y] \subset [0, 1], \quad (5)$$

la cual se estudiará en lo que sigue. Más precisamente, se demostrará que la función g , es decreciente sobre su intervalo de definición $[0, y]$. Para ello se observa que la derivada de g se puede escribir como $g'(t) = g'_1(t) + g'_2(t)$ con las funciones g'_1 y g'_2 dadas por las reglas de correspondencia

$$g'_1(t) = \operatorname{sen}(t^t)t^t \ln t - \operatorname{sen}(y^t)y^t \ln y, \quad (6)$$

$$g'_2(t) = \operatorname{sen}(t^t)t^t - \operatorname{sen}(y^y)y^y \quad (7)$$

y se analiza el signo de cada una de estas funciones sobre $[0, y]$, demostrando que ambas son negativas sobre $[0, y]$.

Para estudiar el signo de g'_1 nos apoyamos en la función $\phi(s) = s^t \operatorname{sen}(s^t) \ln s$ definida para $s \in [t, y]$, cuya derivada sobre $[t, y]$ es expresada de la siguiente manera

$$\phi'(s) = s^{t-1}(\varphi_1(s) + \varphi_2(s)), \quad \varphi_1(s) = \operatorname{sen}(s^t)(t \ln s + 1), \quad \varphi_2(s) = ts^t \cos(s^t) \ln(s).$$

Observando que las siguientes desigualdades se cumplen

$$1 + t \ln s \geq 1 + t \ln t > (e - 1)/e > 0, \quad \operatorname{sen}(s^t) > 0, \quad \cos(s^t) > 0, \quad s \in [t, y] \subset [0, 1], \quad (8)$$

deducimos que $\varphi'_1(s) = ts^{t-1} \cos(s^t)(t \ln s + 1) + s^{-1}t \operatorname{sen}(s^t) > 0$ y en consecuencia la función φ_1 es creciente sobre $[t, y]$. En el caso de la función φ_2 se tiene

$$\varphi'_2(s) = ts^{t-1} \left[\cos(s^t)(t \ln(s) + 1) - ts^t \operatorname{sen}(s^t) \ln(s) \right] > 0,$$

debido a que el primer término es positivo por la primera desigualdad dada en (8) y el segundo término por el hecho que $\ln(s) \leq 0$ para $s \leq 1$. Así, tenemos que la función φ_2 es creciente sobre $[t, y]$. Equivalentemente, se tiene que la función $-\varphi_2$ es decreciente sobre $[t, y]$.

El crecimiento de φ_1 y el decrecimiento de $-\varphi_2$ implican que las siguientes desigualdades

$$\varphi_1(t) \leq \varphi_1(s) \leq \varphi_1(y), \quad -\varphi_2(y) \leq -\varphi_2(s) \leq -\varphi_2(t), \quad s \in [t, y] \subset [0, 1], \quad (9)$$

sean válidas para $t \leq s \leq y$. Además, es posible demostrar que $\varphi_1(t) > -\varphi_2(t)$ para $t \in [0, 1]$. Observemos que para $t \in [0, 1]$ el recorrido de la función t^t es $[(1/e)^{1/e}, 1]$, es decir $t^t \in [(1/e)^{1/e}, 1]$, lo cual conduce a la validez de las siguientes desigualdades

$$\operatorname{sen}((1/e)^{1/e}) \leq \operatorname{sen}(t^t) \leq \operatorname{sen}(1), \quad t \in [0, 1],$$

$$\cos(1) \leq \cos(t^t) \leq \cos((1/e)^{1/e}), \quad t \in [0, 1],$$

$$-e^{-1} = \ln((1/e)^{1/e}) \leq \ln(t^t) \leq \ln(1) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

por aplicación directa de las propiedades de crecimiento o decrecimiento de las funciones seno, coseno y logaritmo natural sobre el intervalo $[1/e, 1] \subset [0, 1] \subset [0, \pi/2]$. Luego, es posible deducir las siguientes cotas inferiores

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \sin(t^t)(t \ln(t) + 1) \geq \sin((1/e)^{1/e})(t \ln(t) + 1) \geq \sin((1/e)^{1/e}) \left(\frac{e-1}{e} \right), \\ \varphi_2(t) &= t^{t+1} \cos(t^t) \ln(t) \\ &= t^t \cos(t^t) \ln(t^t) \geq (1) \cos((1/e)^{1/e}) \ln(t^t) \geq -\frac{\cos((1/e)^{1/e})}{e},\end{aligned}$$

para $t \in [0, 1]$. Así, tenemos que

$$\varphi_1(t) + \varphi_2(t) \geq \sin((1/e)^{1/e}) \left(\frac{e-1}{e} \right) - \frac{\cos((1/e)^{1/e})}{e} \approx 0,1202 \geq 0, \quad t \in [0, 1],$$

es decir,

$$\varphi_1(t) \geq -\varphi_2(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (10)$$

Luego, de (9) y (10) deducimos la cadena de desigualdades $\varphi_1(s) \geq \varphi_1(t) > 0 \geq -\varphi_2(t) \geq -\varphi_2(s)$, lo cual demuestra que $\varphi_1(s) + \varphi_2(s) > 0$ para $s \in [t, y] \subseteq [0, 1]$. En consecuencia $\phi'(s) > 0$ sobre $[t, y]$, implicando que ϕ es creciente sobre $[t, y]$. De esta manera $t \leq s \leq y$ implica $\phi(t) \leq \phi(s) \leq \phi(y)$ o equivalentemente tenemos que la función $g_1'(t) = \phi(t) - \phi(y)$ es negativa sobre $[0, y]$.

Para analizar el signo de la función g_2' , se observa que g_2' se puede reescribir como

$$g_2'(t) = \sin(t^t)t^t - \sin(t^y)t^y + \sin(t^y)t^{y-1}(t-y), \quad t \in [0, y] \subset [0, 1]. \quad (11)$$

Para $s \in [t, y] \subset [0, 1]$ definimos la función $\varphi_3(s) = \sin(t^s)t^s$. Observamos que la derivada de φ_3 es tal que $\varphi_3'(s) = st^{s-1}(\cos(t^s) + \sin(t^s)) > 0$ y así φ_3 es creciente sobre $[t, y]$. Luego, $t \leq s \leq y$ implica que $\varphi_3(t) \leq \varphi_3(s) \leq \varphi_3(y)$, es decir,

$$\varphi_3(t) - \varphi_3(y) = \sin(t^t)t^t - \sin(t^y)t^y \leq 0, \quad s \in [t, y] \subset [0, 1].$$

Ahora, utilizando esta última desigualdad y el hecho que $\sin(t^y)yt^{y-1}(t-y)$ para $t \leq y$, por la relación (11) deducimos que la función $g_2'(t)$ es negativa sobre $[0, y]$.

Habiendo demostrado que tanto $g_1'(t)$ como $g_2'(t)$ son negativas sobre $[0, y]$, deducimos $g'(t) = g_1'(t) + g_2'(t) \leq 0$ y claramente $g(t)$ es decreciente sobre $[0, y]$. Ahora, el decrecimiento de g y el hecho que $g(y) = 0$ implican que $g(0) \geq g(t) \geq g(y) = 0$ para $0 \leq t \leq y$. Demostrando así que la desigualdad $g(t) = G(t, y) \geq 0$ se satisface para cada $t \in [0, y]$, es decir, $G(x, y) \geq 0$ sobre S_1^u .

Caso $(x, y) \in S_2^u$. Fijando $y \in (1, \pi/2]$, se define la función $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la relación $h(t) = G(t, y)$ con G dado en (4). Aplicando las identidades trigonométricas de suma-producto se tiene

$$h(t) = -2 \left[\sin \left(\frac{t^y + t^t}{2} \right) \sin \left(\frac{t^y - t^t}{2} \right) - \sin \left(\frac{y^y + y^t}{2} \right) \sin \left(\frac{y^y - y^t}{2} \right) \right]. \quad (12)$$

Se observa que

$$0 < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} \right)^{1/e} \leq \frac{t^y + t^t}{2} \leq 1 < \pi, \quad (13)$$

$$0 < 1 \leq \frac{y^y + t^y}{2} \leq \frac{\pi/2 + (\pi/2)^{\pi/2}}{2} < \pi, \quad (14)$$

$$-\pi < \frac{t^y - t^t}{2} \leq 0, \quad (15)$$

$$0 \leq \frac{y^y - y^t}{2} < \pi. \quad (16)$$

Las estimaciones en (13) son consecuencia de los siguientes hechos: la función definida de $[0, 1]$ a \mathbb{R} por $t \rightarrow t^y$ es creciente, y la función definida de $[0, 1]$ a \mathbb{R} por $t \rightarrow t^t$ tiene un mínimo global en $t = 1/e$. En efecto, de cada uno de estos comportamientos se deduce que $0 \leq t < 1$ implica $0^y \leq t^y < 1^y$ y que $(1/e)^{1/e} \leq t^t \leq 1$, respectivamente. En consecuencia de las desigualdades $0 \leq t^y < 1$ y $(1/e)^{1/e} \leq t^t \leq 1$ se deduce (13). Ahora, (14) se deduce del hecho que la función definida de $[1, \pi/2]$ a \mathbb{R} por $y \rightarrow (y^t + y^y)/2$ es creciente y así la restricción para y dada por $1 < y \leq \pi/2$ implica

$$1 = \frac{1^t + 1^1}{2} < \frac{y^t + y^y}{2} \leq \frac{(\pi/2)^t + (\pi/2)^{\pi/2}}{2} \leq \frac{\pi/2 + (\pi/2)^{\pi/2}}{2} < \pi. \quad (17)$$

En la penúltima desigualdad de (17) se utilizó el hecho que $t \rightarrow (\pi/2)^t$ es creciente y $t \in [0, 1]$. Para demostrar (15) se observa que la función definida de $[1, \pi/2]$ a \mathbb{R} por $y \rightarrow (t^y - t^t)/2$ es decreciente y por lo tanto del hecho que $1 < y \leq \pi/2$ se deduce

$$\frac{t^1 - t^t}{2} > \frac{t^y - t^t}{2} \geq \frac{t^{\pi/2} - t^t}{2}. \quad (18)$$

Ahora, hay que obtener una cota superior para $(t - t^t)/2$ y una cota inferior para $(t^{\pi/2} - t^t)/2$ y para ello utilizamos la función $m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $m(t) = (t - t^t)/2$. La primera y segunda derivadas de la función m son dadas por

$$\begin{aligned} m'(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - t^t (\ln t + 1) \right) \quad y \\ m''(t) &= \frac{-t^{t-1} n(t)}{2} \quad \text{con} \quad n(t) = \left(t(\ln t)^2 + 2t \ln t + t + 1 \right). \end{aligned}$$

Se tiene que $m''(t) < 0$ sobre $[0, 1]$ debido a la positividad de n la cual se deduce como sigue: $n(t) \rightarrow 1$ cuando $t \rightarrow 0^+$, $n(1) = 2$, $n(1/e) = 1$, $n(1/e^3) = (16 + e^3)/e^3$, n tiene un máximo en $t = 1/e^3$ y un mínimo en $t = 1/e^3$ lo cual implica que $n(t) \in [1, 2]$ para cada $t \in [0, 1]$. Luego, $m'(t)$ es decreciente sobre $[0, 1]$ y así $m'(t) \geq m'(1) = 0$, es decir m es creciente sobre $[0, 1]$. En consecuencia la cota superior para m sobre $[0, 1]$ es $m(1) = 0$ o equivalentemente

$$\frac{t - t^t}{2} < 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (19)$$

Ahora de la desigualdad $t^{\pi/2} + 1 > 1 > t^t$, la cual se cumple para $t \in [0, 1]$, se deduce que

$$\frac{t^{\pi/2} - t^t}{2} > -\frac{1}{2}, \quad t \in [0, 1]. \quad (20)$$

Luego, de (18), (19) y (20), obtenemos (15). Las estimaciones en (16) son consecuencia de que la función definida de $[0, 1]$ a \mathbb{R} por $t \rightarrow (y^y - y^t)/2$ es decreciente, y así se tiene que $(y^y - y^0)/2 > (y^y - y^t)/2 > (y^y - y^1)/2$ sobre $[0, 1]$. Ahora para $y \in (0, \pi/2]$ se tiene que $y^y \leq (\pi/2)^{\pi/2}$ lo cual implica la desigualdad $(y^y - y^0)/2 \leq ((\pi/2)^{\pi/2} - 1)/2 < \pi$ y además dado que y es la tangente en $y = 1$ de la función estrictamente convexa y^y se deduce que $y^y > y$ y en consecuencia $(y^y - y^1)/2 > 0$. Luego, resumiendo las desigualdades obtenidas se tiene la siguiente cadena

$$0 < \frac{y^y - y^1}{2} \leq \frac{y^y - y^t}{2} \leq \frac{y^y - y^0}{2} \leq \frac{(\pi/2)^{\pi/2} - 1}{2} < \pi,$$

de donde claramente se deduce (16).

Ahora, mediante la aplicación de las propiedades de la función seno sobre $[-\pi, \pi]$, se tiene que las desigualdades en (13)-(16) implican

$$\sin\left(\frac{t^y + t^t}{2}\right) \geq 0, \quad \sin\left(\frac{t^y - t^t}{2}\right) \leq 0, \quad \sin\left(\frac{y^t + y^y}{2}\right) \geq 0, \quad \sin\left(\frac{y^y - y^t}{2}\right) \geq 0. \quad (21)$$

Al utilizar los signos de (21) en (12) se deduce que $h(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, 1]$ y cada $y \in (0, \pi/2]$, concluyendo la prueba de la desigualdad (3) para $(x, y) \in S_2^u$.

Caso $(x, y) \in S_3^u$. En este caso se fija arbitrariamente $y \in (1, \pi/2]$ y se define la función $w : (1, y] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la relación $w(t) = G(t, y)$ con G definida en (4), es decir

$$w(t) = \cos(t^y) + \cos(y^t) - \cos(t^t) - \cos(y^y).$$

Se observa que w es decreciente sobre $[1, y]$ dado que $t^y, y^t, t^t \in [0, (\pi/2)^{\pi/2}] \subset [0, \pi]$ implican

$$w'(t) = -yt^{y-1} \sin(t^y) - y^t \ln y \sin(y^t) - t^t (\ln t + 1) \sin(t^t) > 0.$$

Luego $w(t) \geq w(y) = 0$ para todo $t \in (1, y]$ y similarmente a los casos anteriores se concluye que la desigualdad (3) es satisfecha sobre S_3^u .

Caso $(x, y) \in S_1^l \cup S_2^l \cup S_3^l$. Para probar la desigualdad (3) sobre S_i^l para $i = 1, 2, 3$, se observa que $(x, y) \in S_i^l$ si, y solo si, $(y, x) \in S_i^u$, entonces intercambiando (x, y) por (y, x) en la prueba para $(x, y) \in S_i^u$ se concluye que la desigualdad (3) es también válida sobre S_i^l .

Agradecimientos: Los autores agradecen al Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad del Bío-Bío de Chile. Además agradecen las observaciones muy importantes hechas por el revisor anónimo.

Referencias

- [1] Círtoaje V., “Proofs of three open inequalities with power-exponential functions”, *J. Non-linear Sci. Appl.*, 4 (2011), No. 2, 130–137. doi: 10.22436/jnsa.004.02.05.
- [2] Círtoaje V., “On some inequalities with power-exponential functions”, *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 10 (2009), No. 1, 1–6.

- [3] Coronel A. and Huancas F., “The proof of three power-exponential inequalities”, *J. Inequal. Appl.*, 509 (2014), No. 1, 1–10. doi: 10.1186/1029-242X-2014-509.
- [4] Coronel A., Kórus P., Lozada E., and Irazoqui E., “On the Generalization for Some Power-Exponential-Trigonometric Inequalities”, *Mathematics*, 7 (2019), No. 10, 1–6. doi: 10.3390/math7100988.
- [5] Laub M. and Ilani I., “A subtle inequality”, *Amer. Math. Monthly*, 97 (1990), 65–67.
- [6] Laub M., “Elementary Problems: E3111-E3116”, *Amer. Math. Monthly*, 92 (1985), 666. doi: 10.2307/2323718.
- [7] Matejíčka L., “Solution of one conjecture on inequalities with power-exponential functions”, *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 10 (2009), No. 3, 1–5.
- [8] Matejíčka L., “Some remarks on Círtoaje’s conjecture”, *J. Inequal. Appl.*, 269 (2016), No. 1, 1–11. doi: 10.1186/s13660-016-1211-0.
- [9] Matejíčka L., “On the Círtoaje’s conjecture”, *J. Inequal. Appl.*, 152 (2016), No. 1, 1–6. doi: 10.1186/s13660-016-1092-2.
- [10] Matejíčka L., “Next generalization of Círtoaje’s inequality”, *J. Inequal. Appl.*, 159 (2017), No. 1, 1–10. doi: 10.1186/s13660-017-1436-6.
- [11] Matejíčka L., “Proof of one open inequality of Laub-Ilani type”, *Journal of Mathematical Inequalities*, 14 (2020), No. 1, 83–98. doi: 10.7153/jmi-2020-14-07.
- [12] Miyagi M. and Nishizawa Y., “A short proof of an open inequality with power-exponential functions”, *Aust. J. Math. Anal. Appl.*, 11 (2014), No. 1, 1–6.
- [13] Miyagi M. and Nishizawa Y., “Extension of an inequality with power exponential functions”, *Tamkang J. Math.*, 46 (2015), No. 4, 427–433. doi: 10.5556/j.tkjm.46.2015.1831.
- [14] Miyagi M. and Nishizawa Y., “A stronger inequality of Círtoaje’s one with power exponential functions”, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 8 (2015), No. 3, 224–230. doi: 10.22436/jnsa.008.03.06.
- [15] Özban A., “New algebraic-trigonometric inequalities of Laub-Ilani type”, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 96 (2017), No. 1, 87–97. doi: 10.1017/S0004972717000156.
- [16] Qi F. and Debnath L., “Inequalities of power-exponential functions”, *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 1 (2000), No. 2, 1–5.
- [17] Zeikii A., Círtoaje V. and Berndt W., Mathlinks. Forum, <http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=118722>. [cited 11 November 2006].