Revista Integración
ISSN: 0120-419X
ISSN: 2145-8472
Universidad Industrial de Santander

GAITÁN-OSPINA, RAFAEL
Esqueleto Homoto-Homológico en la Categoría de los Grupos Abelianos
Revista Integración, vol. 39, núm. 2, 2021, Julio-Diciembre, pp. 137-176
Universidad Industrial de Santander

DOI: https://doi.org/10.7440/res64.2018.03

Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 39, N° 2, 2021, pág. 137–176

Esqueleto Homoto-Homológico en la Categoría de los Grupos Abelianos

Rafael Gaitán-Ospina [a] ✉

[a] Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, Cali, Colombia.

Resumen. En este artículo, se presenta la construcción de una teoría de homología general en la categoría de los grupos abelianos en el sentido de R. Ruiz, definida en su texto *Introducción a la Teoría de Homología General* [22], para categorías en general, la cual satisface una axiomática similar a la presentada por Eilenberg y Steenrod para teorías de homología en categorías admisibles de parejas de espacios topológicos (X, A) [3]. Esta teoría de homología general en los grupos abelianos se construyó por medio de un *Esqueleto Homoto-Homológico*, definido en este trabajo, mostrando sus conexiones con categorías monoidales y categorías simpliciales.
Palabras clave: Conjuntos simpliciales, grupos abelianos simpliciales, homotopía, homología, sistemas homotópicos, funtor singular, categorías admisibles, objeto modelo.
MSC2010: 55N10, 20K40.

Homoto-Homological Skeleton in the Category of Abelian Groups

Abstract. In this paper, we present the construction of a general homology theory in the category of abelian groups in the sense of the textbook *Introducción a la Teoría de Homología General* by R. Ruiz [22], to general categories, meeting axioms similar to those presented by Eilenberg and Steenrod in homology theories for admissible categories of topological pairs (X, A) [3]. We built this general homology theory in abelian groups through what we called *Homoto-Homological Skeleton*, showing the connections with monoidal categories and simplicial categories.
Keywords: Simplicial sets, simplicial abelian groups, homotopy, homology, homotopic system, singular functor, admissible categories, model object.

E-mail: rafael.gaitan@correounivalle.edu.co [a] ✉.
Received: 26 Agosto 2020, Accepted: 23 Marzo 2021.
Para citar este artículo: R. Gaitan-Ospina, Esqueleto Homoto-Homológico en la Categoría de los Grupos Abelianos, *Rev. Integr. Temas Mat.,* 39 (2021), No. 2, 137-176. doi: 10.18273/revint.v39n2-2021002

1. Introducción

En el trabajo doctoral de R. Ruiz, *Change of Models In Algebraic Topology* [21], se evidenció que la topología algebraica estaba determinada por un funtor $\Lambda : \Delta \to Top$, que el autor denominó *objeto modelo sobre la categoría* Top, en el cual $\Lambda([n])$ es el n-simplejo topológico Δ^n para $n = 0, 1, \ldots$, con el cual se determina la homotopía en Top y por medio del funtor singular del objeto Λ se obtiene la homología singular la cual cumple el axioma de homotopía de teorías de homologías dado por Eilenberg-Steenrod [9, pág. 111]. Además se mostró que cambiando el modelo Λ por un funtor covariante $F : \Delta \to Top$ con la condición de que $F([0])$ sea un punto, se producen resultados paralelos, algo así como otra topología algebraica. De este trabajo quedó abierta la pregunta de si estos modelos producen, por medio del correspondiente funtor singular, teorías de homología en una categoría admisible de Top.

Posteriormente en el artículo *Overview on Models in Homotopical Algebra* [20], se extiende y se estudia el concepto de objeto modelo para categorías en general. De nuevo queda abierta la pregunta si con estos objetos modelos se pueden hacer teorías de homología. Sin embargo para definir un concepto análogo al de teoría de homología en categorías no topológicas, es decir en categorías donde sus objetos no son espacios topológicos, era necesario determinar qué es una *teoría de homología*, para categorias en general, comenzando por el concepto de *categoría admisible para homología*, tal como se tiene en las teorías de homología en los espacios topológicos [12, pág. 1]. En particular era necesario axiomatizar el concepto de categoría admisible para homología, trabajo desarrollado en el texto *Introducción a la Teoría de Homología General* [22] en el cual se demuestran las principales consecuencias y está abierto el problema de precisar cuándo un objeto modelo realmente produce una teoría de homología general. Este problema puede enfrentarse de manera general pero las bondades de la categoría misma producen diferencias significativas en la necesidad de la construcción de dicha teoría. Es por esta razón que este trabajo se enfoca en la categoría de los grupos abelianos (Ab), además de la posibilidad de extenderlo a categorías abelianas.

Así pues en este artículo presentamos una teoría de homología general, en el sentido de R. Ruiz [22], en la categoría de los grupos abelianos, definida por medio de lo que llamamos *Esqueleto Homoto-Homológico*.

2. Preliminares

Definición 2.1. Consideremos Mod_R la categoría que tiene por objetos R-módulos y por morfismos a los homomorfismos de R-módulos, los cuales llamamos R-homomorfismos. Una sucesión finita de R-homomorfismos

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1}$$

es *exacta* si $Ker(f_{i+1}) = Im(f_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Una sucesión infinita

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+2} \xrightarrow{f_{i+2}} \cdots$$

es *exacta* si $Ker(f_{i+1}) = Im(f_i)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Una suceción exacta de la forma $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ es llamada ***sucesión exacta corta***.

Teorema 2.2 ([11, Tma 1.18. pág. 177]). *Consideremos en Mod_R la siguiente sucesión exacta corta*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0, \tag{1}$$

entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

1. *Existe un R-homomorfismo $h : C \to B$ tal que $gh = 1_C$.*
2. *Existe un R-homomorfismo $k : B \to A$ tal que $kf = 1_A$.*
3. *La sucesión (1) es isomorfa a la sucesión exacta corta*

$$0 \to A \xrightarrow{\iota_1} A \oplus C \xrightarrow{\pi_2} C \to 0$$

en particular, $B \cong A \oplus C$.

Una sucesión exacta corta que cumpla las condiciones equivalentes del Teorema 2.2 se dice que se *descompone*.

Definición 2.3. Se define el funtor $Hom(A, -)$, para A un R-módulo, como sigue:

$$\begin{array}{rcl} Hom(A, -) : Mod_R & \to & Ab \\ X & \mapsto & Hom_R(A, X) \\ X \xrightarrow{f} Y & \mapsto & Hom_R(A, X) \xrightarrow{Hom(A,f)} Hom_R(A, Y) \end{array}$$

donde $Hom(A, f)(\alpha) = f\alpha$, para $\alpha \in Hom_R(A, X)$.

Proposición 2.4 ([11, Prop. 4.4, pág. 201]). *Sea $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos que se descompone, entonces la sucesión*

$$0 \longrightarrow Hom(D, A) \xrightarrow{Hom(D,f)} Hom(D, B) \xrightarrow{Hom(D,g)} Hom(D, C) \longrightarrow 0$$

es exacta y se descompone, para todo R-módulo D.

Definición 2.5. La categoría Δ es aquella en la cual sus objetos son los conjuntos ordenados $[n] = \{0, 1 \ldots , n\}$, para $n \geq 0$. Los morfismos en Δ son las funciones no decrecientes, esto es funciones $f : [n] \to [m]$ tales que $i < j$ implica que $f(i) \leq f(j)$, para $0 \leq i, j \leq n$.

En la categoría Δ se tienen los monomorfismos $\delta_n^i : [n-1] \to [n]$, para $i = 0, \ldots , n$ y los epimorfismos $\sigma_n^j : [n+1] \to [n]$, para $j = 0, \ldots , n$ dados por

$$\delta_n^i(k) := \begin{cases} k, & k < i, \\ k+1, & k \geq i, \end{cases}$$

y

$$\sigma_n^j(k) := \begin{cases} k, & k \leq j, \\ k-1, & k > j, \end{cases}$$

los cuales satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \delta_{n+1}^j \delta_n^i &= \delta_{n+1}^i \delta_n^{j-1}, \quad i < j, \\ \sigma_n^j \sigma_{n+1}^i &= \sigma_n^i \sigma_{n+1}^{j+1}, \quad i \leq j, \\ \sigma_{n-1}^j \delta_n^i &= \begin{cases} \delta_{n-1}^i \sigma_{n-2}^{j-1}, & i < j, \\ 1_{[n-1]}, & i = j \text{ ó } i = j+1, \\ \delta_{n-1}^{i-1} \sigma_{n-2}^j, & i > j+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Teorema 2.6 ([5, Lema 2.2, pág. 24]). *Todo morfismo $\varphi \in Hom_\Delta([m],[n])$ puede ser escrito como composición de epimorfismos y monomorfismos de forma única como sigue:*

$$\varphi = \delta_{m-t+s}^{i_s} \delta_{m-t+(s-1)}^{i_{s-1}} \cdots \delta_{m-t+1}^{i_1} \sigma_{m-t}^{j_t} \sigma_{m-(t-1)}^{j_{t-1}} \cdots \sigma_{m-2}^{j_2} \sigma_{m-1}^{j_1},$$

donde $n = m - t + s$ y $n \geq i_s > ... > i_1 \geq 0$, $0 \leq j_t < ... < j_1 < m$.

Definición 2.7.

1. La categoría de los *Conjuntos Simpliciales*, denotada como $\Delta^\circ Set$, es aquella en la que sus objetos son funtores contravariantes $X : \Delta \to Set$, donde Set es la categoría de los conjuntos. Los morfismos son transformaciones naturales entre estos funtores.

2. La categoría de los *Grupos Abelianos Simpliciales*, denotada como $\Delta^\circ Ab$, es aquella en donde los objetos son funtores contravariantes $X : \Delta \to Ab$ donde Ab es la categoría de los grupos abelianos. Los morfismos son transformaciones naturales entre estos funtores.

La Definición 2.7 es lo que P. May en [18, pág. 4], denomina como objeto simplicial. Los objetos de la categoría de los Conjuntos Simpliciales (Grupos Abelianos Simpliciales), también pueden ser vistos como una sucesión $\{X_n\}_{n\geq 0}$ de conjuntos (grupos abelianos) junto con funciones (homomorfismos) entre ellos como sigue

$$\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ & X_n & \\ j = 0, \dots, n-1 & s_{n-1}^j \uparrow\downarrow d_n^i & i = 0, \dots, n \\ & X_{n-1} & \\ & \vdots & \\ & X_1 & \\ & s_0^0 \uparrow\downarrow d_1^i & i = 0, 1 \\ & X_0. & \end{array}$$

donde $X_n = X([n])$, $d_n^i = X(\delta_n^i)$ y $s_n^j = X(\sigma_n^j)$, para X un conjunto simplicial (grupo abeliano simplicial), es decir $X : \Delta \to Set$ ($X : \Delta \to Ab$) un funtor contravariante. Estas funciones (homomorfismos) satisfacen las siguientes propiedades, llamadas *propiedades combinatorias*:

1. $d_n^i d_{n+1}^j = d_n^{j-1} d_{n+1}^i$ si $i < j$.
2. $s_{n+1}^i s_n^j = s_{n+1}^{j+1} s_n^i$ si $i \leq j$.
3. $d_n^i s_{n-1}^j = \begin{cases} s_{n-2}^{j-1} d_{n-1}^i, & i < j, \\ identidad, & i = j \text{ ó } i = j+1, \\ s_{n-2}^j d_{n-1}^{i-1}, & i > j+1. \end{cases}$

El subíndice n de d_n^i y s_n^j se omitirá en la mayoría de los casos, siempre que no haya confusión.

Definición 2.8. Si X y Y son conjuntos simpliciales, se define como *función simplicial*, digamos $f : X \longrightarrow Y$, a una familia de funciones

$$f_n : X_n \longrightarrow Y_n$$

tal que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d^i"'] & Y_n \arrow[d, "\widehat{d^i}"] \\ X_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & Y_{n-1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "f_n"] & Y_n \\ X_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[u, "s^j"] & Y_{n-1} \arrow[u, "\widehat{s}^j"'] \end{tikzcd}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $i = 0, \ldots, n$ y $j = 0, \ldots n-1$.

Definición 2.9. Denotamos como $\Delta[n]$ al conjunto simplicial el cual para $q \in \mathbb{N}$ se define $\Delta[n]_q = Hom_\Delta([q], [n])$, y para $f : [p] \to [q]$ un morfismo en la categoría Δ, el morfismo $\Delta[n](f) : \Delta[n]_q \to \Delta[n]_p$ está definido por $\Delta[n](f)(\alpha) = \alpha f$.

Definición 2.10.

1. Un complejo de cadenas D de grupos abelianos, es una familia de grupos abelianos $\{D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ junto con homomorfismos de grupos como sigue

   $$D : \cdots \to D_n \overset{\partial_n}{\to} D_{n-1} \overset{\partial_{n-1}}{\to} \cdots$$

   tales que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. El subíndice n de ∂_n se omitirá en la mayoría de los casos, siempre que no haya confusión.

2. Si C y D son complejos de cadenas de grupos abelianos, una transformación de cadenas $f : C \to D$ es una familia de homomorfismos $\{f_n : D_n \to C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que el siguiente diagrama conmuta para todo n

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & D_n \arrow[r, "\partial'_n"] & D_{n-1} \arrow[r, "\partial'_{n-1}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

3. La categoría $Ch(Ab)$ es aquella en donde los objetos son complejos de cadenas de grupos abelianos y los morfismos son transformaciones de cadenas.

Denotamos como $Ch^+(Ab)$ a la categoría la cual sus objetos son complejos de cadenas C positivas, es decir $C_n = 0$ si $n < 0$ y $(Ch^+(Ab))_{\partial=0}$ a la categoría de cadenas positivas tales que $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ son homomorfismos nulos para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Existe en la literatura una definición más general de complejos de cadenas sobre R-módulos, para R un anillo, la cual denotan por $Ch(R)$ o $Chain_R$ (ver [10, pág. 40]), más en este trabajo nos enfocamos en el caso de complejos de cadenas sobre $\mathbb{Z}$-módulos.

Definición 2.11 (Grupos de Homología). Sea C un complejo de cadenas, entonces los grupos de homología de C están definidos por $H_n(C) = Ker\partial_n / Im\partial_{n+1}$ para $n \in \mathbb{Z}$.

Sea $f : C \to D$ una transformación de cadenas, entonces f induce un homomorfismo

$$f_{n*} : H_n(C) \to H_n(D)$$

como sigue: Sea $c_n+\partial(C_{n+1}) \in H_n(C)$, entonces $f_{n*}(c_n + \partial(C_{n+1})) = f_n(c_n)+\partial(D_{n+1})$. El subíndice n generalmente se omite de f_{n*} para dar la notación $f_* : H_n(C) \to H_n(D)$ siempre que no haya confusión.

3. Objetos modelo para homotopía y homología

Los objetos modelo en una categoría $\mathcal{C}$ que se presentan en [20] son importantes en el estudio de homotopía y homología, pues ellos bajo ciertas condiciones, que se presentan en esta sección, pueden generar grupos de homología y una relación de homotopía en la categoría $\mathcal{C}$, por medio de un sistema homotópico en el sentido de [14] y [15].

Definición 3.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un objeto modelo sobre la categoría $\mathcal{C}$ es un funtor covariante $Y : \Delta \to \mathcal{C}$, es decir un objeto cosimplicial en la categoría $\mathcal{C}$, para el cual usaremos la notación $Y([n]) := Y^n$, $Y(\delta_n^i : [n-1] \to [n]) := d_i^n$ y $Y(\sigma_j^n : [n+1] \to [n]) := s_j^n$, similar a conjuntos simpliciales, donde los morfismos δ_n^i y σ_n^j, para $i, j = 0, 1, \ldots, n$, son los monomorfismos y epimorfismos, respectivamente, que generan a todos los morfismos de la categoría Δ. Los morfismos d_i^n y s_j^n satisfacen las siguientes *identidades combinatorias*:

1. $d_j^n d_i^{n-1} = d_i^n d_{j-1}^{n-1}$ si $i < j$.

2. $s_j^{n-1} s_i^n = s_i^{n-1} s_{j+1}^n$ si $i \leq j$.

3. $s_j^n d_i^n = d_i^{n-1} s_{j-1}^{n-1}$ si $i < j$.

4. $s_i^n d_i^n = identidad = s_i^n d_{i+1}^n$.

5. $s_j^n d_i^n = d_{i-1}^{n-1} s_j^{n-1}$ si $i > j+1$.

El superíndice n de d_i^n y s_j^n se omitirá en la mayoría de los casos, siempre que no haya confusión.

Definición 3.2. Un *sistema homotópico* en una categoría $\mathcal{C}$, es una cuádrupla $\eta = (I, \epsilon^0, \epsilon^1, \mu)$ donde $I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor covariante, y $\epsilon^i : 1_{\mathcal{C}} \to I$, $\mu : I \to 1_{\mathcal{C}}$ son transformaciones naturales tales que $\mu \circ \epsilon^i = 1$ para $i = 0, 1$, donde 1 denota la transformación idéntica $1_{\mathcal{C}} \to 1_{\mathcal{C}}$. Sean $f, g : A \to B$ dos morfismos en $\mathcal{C}$, entonces decimos que f es *η-homótopo* a g ($f \overset{\eta}{\sim} g$) si existe un morfismo $\phi : I(A) \to B$ en $\mathcal{C}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\epsilon_A^0"'] \arrow[dr, "f"] & \\ I(A) \arrow[r, "\phi"] & B \\ A \arrow[u, "\epsilon_A^1"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Ejemplo 3.3. Sea *Ab* la categoría en donde sus objetos son grupos abelianos y los morfismos son los homomorfismos de grupos abelianos. Dado un anillo unitario R, entonces en *Ab* existe un sistema homotópico, presentado en [8], dado por

$$\begin{array}{lll} I : Ab \to Ab, & I(A) = A \oplus (A \otimes R), & I(A \xrightarrow{f} B) = f \oplus (f \otimes 1_R), \\ \epsilon_A^i : A \to A \oplus (A \otimes R), & \epsilon_A^i(a) = (a, -a \otimes i), & \\ \mu_A : A \oplus (A \otimes R) \to A, & \mu_A(a, b \otimes r) = a, & \end{array}$$

para $i = 0, 1$ y donde $\otimes$ denota el producto tensorial como $\mathbb{Z}$-módulos.

Un objeto modelo sobre una categoría $\mathcal{C}$ puede generar un sistema homotópico en $\mathcal{C}$ bajo ciertas condiciones que presentamos a continuación.

Sea $Y : \Delta \to \mathcal{C}$ un objeto modelo y supongamos que existe un bifuntor $(-) \otimes (-) : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ y existe un isomorfismo $\rho_C : C \to C \otimes Y^0$ natural en C, entonces los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\rho_C"] \arrow[d, "f"] & C \otimes Y^0 \arrow[r, "1_C \otimes d_i"] \arrow[d, "f \otimes 1_{Y^0}"] & C \otimes Y^1 \arrow[d, "f \otimes 1_{Y^1}"] \\ D \arrow[r, "\rho_D"'] & D \otimes Y^0 \arrow[r, "1_D \otimes d_i"'] & D \otimes Y^1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \otimes Y^1 \arrow[r, "1_C \otimes s_0"] \arrow[d, "f \otimes 1_{Y^1}"] & C \otimes Y^0 \arrow[r, "\rho_C^{-1}"] \arrow[d, "f \otimes 1_{Y^0}"] & C \arrow[d, "f"] \\ D \otimes Y^1 \arrow[r, "1_D \otimes s_0"'] & D \otimes Y^0 \arrow[r, "\rho_D^{-1}"'] & D \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\rho_C"] \arrow[ddrr, "1_C"'] & C \otimes Y^0 \arrow[r, "1_C \otimes d_i"] & C \otimes Y^1 \arrow[d, "1_C \otimes s_0"] \\
& & C \otimes Y^0 \arrow[d, "\rho_C^{-1}"] \\
& & C
\end{tikzcd}$$

Se puede generar entonces un sistema homotópico en la categoría $\mathcal{C}$ por medio de un objeto modelo $Y : \Delta \to \mathcal{C}$ como sigue.

Definición 3.4. Sea $Y : \Delta \to \mathcal{C}$ un objeto modelo en la categoría $\mathcal{C}$, $(-)\otimes(-) : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un bifuntor y $\rho : (-) \to (-) \otimes Y^0$ un isomorfismo natural. Entonces la terna $(Y, \otimes, \rho)$ induce un sistema homotópico $\eta_Y = (I, \epsilon^0, \epsilon^1, \mu)$ como sigue:

1. $I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$; donde $I(C) = C \otimes Y^1$ y $I(f) = f \otimes 1_{Y^1}$.
2. $\epsilon^i : 1_{\mathcal{C}} \to I$, definido para $i = 0, 1$ por

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\rho_C"] \arrow[rr, bend right, "\epsilon^i_C"'] & C \otimes Y^0 \arrow[r, "1_C \otimes d_i"] & C \otimes Y^1
\end{tikzcd}$$

para $C \in Obj\mathcal{C}$.

3. $\mu : I \to 1_{\mathcal{C}}$, definido por

$$\begin{tikzcd}
C \otimes Y^1 \arrow[r, "1_C \otimes s_0"] \arrow[rr, bend right, "\mu_C"'] & C \otimes Y^0 \arrow[r, "\rho_C^{-1}"] & C
\end{tikzcd}$$

para $C \in Obj\mathcal{C}$.

Ejemplo 3.5 (Homotopía en Categorías Monoidales)**.** En una categoría monoidal $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{1})$ se tiene un bifuntor $\otimes : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, llamado producto tensorial y un objeto identidad $\mathbf{1}$ el cual cumple que $M \otimes \mathbf{1} \cong M$ naturalmente para todo objeto M en $\mathcal{M}$ (ver [4, pág. 21]). Así pues, si se tiene un objeto modelo $Y : \Delta \to \mathcal{M}$ tal que $Y^0 \cong \mathbf{1}$, entonces Y genera un sistema homotópico en $\mathcal{M}$.

Los objetos modelos también juegan un papel importante para la construcción de funtores de homología de la forma $H : \mathcal{C} \to (Ch^+(Ab))_{\partial=0}$, los cuales se generan por medio de los grupos de homología en la categoría $Ch(Ab)$ (ver Definición 2.11) y a partir del funtor singular S_Y que definimos a continuación.

Definición 3.6 (Funtor Singular)**.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $Y : \Delta \to \mathcal{C}$ un objeto modelo sobre $\mathcal{C}$, entonces el *Funtor Singular* S_Y está dado por

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{C} & \stackrel{S_Y}{\to} & \Delta^\circ Set \\
C & \mapsto & S_Y(C) : \Delta \to Set \\
C_1 \stackrel{f}{\to} C_2 & \mapsto & S_Y(f) : S_Y(C_1) \to S_Y(C_2)
\end{array}$$

donde

1. Para C un objeto en $\mathcal{C}$, se define el funtor contravariante $S_Y(C)$ por

$$\begin{array}{rcl} \Delta & \xrightarrow{S_Y(C)} & Set \\ [n] & \mapsto & S_Y(C)_n := Hom_{\mathcal{C}}(Y^n, C) \\ [p] \xrightarrow{w} [q] & \mapsto & S_Y(C)(w) : S_Y(C)_q \to S_Y(C)_p \end{array}$$

   y para $\alpha \in S_Y(C)_q$ se define $S_Y(C)(w)(\alpha) = \alpha \circ Y(w)$.

2. Para $C_1 \xrightarrow{f} C_2$ un morfismo en $\mathcal{C}$, la función simplicial $S_Y(f) : S_Y(C_1) \to S_Y(C_2)$ se define por la siguiente familia de funciones

$$\begin{array}{rcl} (S_Y(f))_n : S_Y(C_1)_n & \to & S_Y(C_2)_n \\ \beta & \mapsto & f \circ \beta. \end{array}$$

Puesto que para un objeto de $Ch(Ab)$ existen sus grupos de homología y el funtor singular de un objeto modelo $Y : \Delta \to \mathcal{C}$ asigna a un objeto C de $\mathcal{C}$ un conjunto simplicial[1], para definir grupos de homología de C es necesario un funtor desde la categoría $\Delta^\circ Set$ a la categoría $Ch(Ab)$, el cual se construye pasando primero por una categoría que es equivalente a $Ch^+(Ab)$, la cual es la categoría de los grupos abelianos simpliciales $\Delta^\circ Ab$. Para pasar de $\Delta^\circ Set$ a $\Delta^\circ Ab$, considere el funtor $Set \xrightarrow{Al} Ab$ tal que para B un conjunto, $Al(B)$ es el grupo abeliano libre generado por los elementos de B, y para $f : A \to B$ una función entre conjuntos, $Al(f) : Al(A) \to Al(B)$ es el homomorfismo definido por $Al(f)(a) = f(a)$ para todo a perteneciente al conjunto generador A. Así, si X es un conjunto simplicial, es decir un funtor contravariante de Δ a Set, entonces $Al \circ X$ es un grupo abeliano simplicial, con esto se define un funtor desde la categoría $\Delta^\circ Set$ a $\Delta^\circ Ab$, denotado por $\Delta^\circ Al$, el cual puede ser presentado también de la forma de sucesión, en donde cada nivel del grupo abeliano simplicial es de la forma $Al(X_n)$ y los morfismos que cumplen las propiedades combinatorias son $Al(d_i)$ y $Al(s_i)$.

Así pues tenemos el funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{S_Y} \Delta^\circ Set \xrightarrow{\Delta^\circ Al} \Delta^\circ Ab$. Ahora para un objeto X en $\Delta^\circ Ab$ se tiene la sucesión $\{X_n\}_{n\geq 0}$ donde cada X_n con $n \geq 0$ es un grupo abeliano y también para cada $n > 0$ se tienen homomorfismos $d_n^i : X_n \to X_{n-1}$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, con esto formamos los complejos de cadenas $N(X)$ y $M(X)$, conocidos en la literatura como Complejo de Moore y Complejo Normalizado, respectivamente, dados por

$$M(X) : \cdots \to X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1} \to \cdots \to X_2 \xrightarrow{\partial_2} X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \to 0,$$

donde $\partial_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_n^i$ y

$$N(X) : \cdots \to (NX)_n \xrightarrow{\partial_n} (NX)_{n-1} \to \cdots \to (NX)_2 \xrightarrow{\partial_2} (NX)_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \to 0,$$

[1]En algunos casos el funtor singular de un objeto modelo llega directamente a la categoría $\Delta^\circ Ab$ (categoría de los grupos abelianos simpliciales), como se presenta para los objetos modelo $Y : \Delta \to Ab$ sobre los grupos abelianos.

donde $(NX)_n = \bigcap\limits_{i=0}^{n-1} ker\left(d_n^i : X_n \to X_{n-1}\right)$ y $\partial_n = (-1)^n d_n^n$. Por tanto obtenemos dos funtores desde la categoría $\mathcal{C}$ a la categoría $Ch^+(Ab)$ (un funtor tomando N y otro funtor tomando M) de la siguiente forma

$$\mathcal{C} \xrightarrow{S_Y} \Delta^\circ Set \xrightarrow{\Delta^\circ Al} \Delta^\circ Ab \underset{M}{\overset{N}{\rightrightarrows}} Ch^+(Ab).$$

Observación 3.7. El morfismo inclusión $i : N(X) \to M(X)$ es una transformación de cadenas la cual es una equivalencia de cadenas (ver [6, Tma 2.4, pág. 150]), entonces los grupos de homología de los complejos $M(X)$ y $N(X)$, para X un grupo abeliano simplicial, son isomorfos (ver [17, Cor 2.2, pág. 40]).

Notación. Denotaremos por C_Y^N a la composición $N \circ \Delta^\circ Al \circ S_Y$ y C_Y^M a la composición $M \circ \Delta^\circ Al \circ S_Y$, por lo tanto, para un objeto X en la categoría $\mathcal{C}$, se pueden definir grupos de homología de X por medio de los grupos de homología del complejo de cadenas $C_Y^N(X)$, los cuales por la Observación 3.7 son iguales a los grupos de homología del complejo de cadenas $C_Y^M(X)$. Así pues, en algunos casos realizaremos cálculos de grupos de homología por medio del funtor C_Y^N y en otros por medio del funtor C_Y^M por conveniencia. En particular para objetos modelos $Y : \Delta \to Ab$, puesto que S_Y llega a la categoría de los grupos abelianos simpliciales, es decir $S_Y : Ab \to \Delta^\circ Ab$, entonces para estos objetos modelos denotamos por C_Y^N al funtor $N \circ S_Y$ y C_Y^M a la composición $M \circ S_Y$.

En particular para objetos modelos $Y : \Delta \to Ab$ sobre la categoría de los grupos abelianos, al aplicar el funtor singular S_Y a una sucesión exacta que se descompone en Ab, es decir que satisface una de las condiciones del Teorema 2.2, se obtiene por cada nivel $n \geq 0$ una sucesión exacta. Este resultado es de interés en este trabajo puesto que por medio de él se define una transformación natural necesaria para teorías de homología general la cual se presenta posteriormente en la sección 8 en la Observación 8.8.

Corolario 3.8. *Sea $Y : \Delta \to Ab$ un objeto modelo y $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ una sucesión exacta en Ab que se descompone, entonces la sucesión $0 \longrightarrow S_Y(A)_n \xrightarrow{S_Y(f)_n} S_Y(B)_n \xrightarrow{S_Y(g)_n} S_Y(C)_n \longrightarrow 0$ es exacta para todo $n \geq 0$.*

Demostración. La sucesión $0 \to S_Y(A)_n \xrightarrow{S_Y(f)_n} S_Y(B)_n \xrightarrow{S_Y(g)_n} S_Y(C)_n \to 0$ es por definición $0 \to Hom_{Ab}(Y^n, A) \xrightarrow{Hom_{Ab}(1,f)} Hom_{Ab}(Y^n, B) \xrightarrow{Hom_{Ab}(1,g)} Hom_{Ab}(Y^n, C) \to 0$ la cual es exacta por la Proposición 2.4, puesto que $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ es exacta y se descompone. ☑

Definición 3.9. Sea $Y : \Delta \to \mathcal{C}$ un objeto modelo sobre una categoría $\mathcal{C}$, entonces el funtor $H_Y : \mathcal{C} \to (Ch^+(Ab))_{\partial=0}$, que llamaremos el **funtor de homología generado por** Y, está definido como sigue:

1. Para X un objeto en $\mathcal{C}$, $H_Y(X)$ es el complejo de cadenas siguiente

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(C_Y^N(X)) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C_Y^N(X)) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} H_0(C_Y^N(X)) \longrightarrow 0$$

   donde $\partial_n = 0$ para todo n.

2. Para $f : X \to Z$ un morfismo en la categoría $\mathcal{C}$, $H_Y(f) : H_Y(X) \to H_Y(Z)$ es la transformación de cadenas tal que $H_Y(f)_n = H_n(C_Y^N(f))$.[2]

4. Objeto modelo en los grupos abelianos

En esta sección definimos el objeto modelo Ψ^R en la categoría de los grupos abelianos, la relación de homotopía y grupos de homología que genera, donde la relación de homotopía es igual a la presentada por L. Hernández en su tesis doctoral [13].

Sea R un anillo unitario y consideremos los siguientes homomorfismos de grupos abelianos $\tau_i^k : \bigotimes_{t=1}^{k} R \to \bigotimes_{t=1}^{k+1} R$ y $\chi_j^k : \bigotimes_{t=1}^{k} R \to \bigotimes_{t=1}^{k-1} R$, para $0 \leq i \leq k$ y $0 \leq j \leq k-2$ definidos como sigue. Sea $r_k = r_k^1 \otimes r_k^2 \otimes \cdots \otimes r_k^k \in \bigotimes_{t=1}^{k} R$, entonces

$$\tau_i^k(r_k) = \begin{cases} 1_R \otimes r_k & \text{si}\, i = 0, \\ r_k^1 \otimes \cdots \otimes r_k^i \otimes 1_R \otimes r_k^{i+1} \otimes \cdots \otimes r_k^k & \text{si}\, 1 \leq i \leq k-1, \\ r_k \otimes 1_R & \text{si}\, i = k, \end{cases}$$

y

$$\chi_j^k(r_k) = \begin{cases} r_k^1 r_k^2 \otimes r_k^3 \otimes \cdots \otimes r_k^k & \text{si}\, j = 0, \\ r_k^1 \otimes \cdots \otimes r_k^j \otimes r_k^{j+1} r_k^{j+2} \otimes r_k^{j+3} \otimes \cdots \otimes r_k^k & \text{si}\, 1 \leq j \leq k-3, \\ r_k^1 \otimes \cdots \otimes r_k^{k-2} \otimes r_k^{k-1} r_k^k & \text{si}\, j = k-2. \end{cases}$$

Estos homomorfismos satisfacen unas identidades las cuales son de importancía para la construcción de el objeto modelo Ψ^R.

Proposición 4.1 ([7, Prop. 1.39 pág. 57])**.** *Los homomorfismos τ_i^k y χ_j^k satisfacen las siguientes identidades:*

1. $\tau_j^{k+1}\tau_i^k = \tau_{i+1}^{k+1}\tau_j^k$ *si* $i \geq j$.
2. $\chi_j^{k-1}\chi_i^k = \chi_{i-1}^{k-1}\chi_j^k$ *si* $i > j$.
3. $\chi_j^{k+1}\tau_{i+1}^k = \tau_i^{k-1}\chi_j^k$ *si* $i > j$.
4. $\chi_i^{k+1}\tau_i^k = \textit{identidad} = \chi_i^{k+1}\tau_{i+1}^k$.
5. $\chi_j^{k+1}\tau_i^k = \tau_i^{k-1}\chi_{j-1}^k$ *si* $i < j$.

A continuación presentamos la aplicación Ψ^R que posteriormente en el Teorema 4.4 se prueba que es, en efecto, un objeto modelo sobre la categoría *Ab*.

[2] En la categoría de los espacios topológicos se tiene el objeto modelo $\Lambda : \Delta \to Top$, en el cual $\Lambda([n])$ es el n-simplejo topológico Δ^n para $n = 0, 1, \ldots$, tomando este objeto modelo se obtiene que los niveles del complejo de cadenas $H_\Lambda(X)$ corresponden a los grupos de homología singular, para X un espacio topológico, presentados en [23, pág. 1].

Definición 4.2. Sea $\Psi^R : \Delta \to Ab$, donde R es un anillo unitario, la aplicación tal que

1. $\Psi^R([n]) := \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si}\, n = 0, \\ \mathbb{Z} \oplus R & \text{si}\, n = 1, \\ \mathbb{Z} \oplus R \oplus (R \otimes R) \oplus \cdots \oplus \left(\bigotimes_{t=1}^{n} R\right) & \text{si}\, n \geq 2. \end{cases}$

2. La imagen de los morfismos δ_i y σ_i presentados en la categoría Δ son

$$d_i : \mathbb{Z} \oplus R \oplus (R \otimes R) \oplus \cdots \oplus \left(\bigotimes_{t=1}^{n} R\right) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus R \oplus (R \otimes R) \oplus \cdots \oplus \left(\bigotimes_{t=1}^{n+1} R\right)$$

y

$$s_i : \mathbb{Z} \oplus R \oplus (R \otimes R) \oplus \cdots \oplus \left(\bigotimes_{t=1}^{n+1} R\right) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus R \oplus (R \otimes R) \oplus \cdots \oplus \left(\bigotimes_{t=1}^{n} R\right),$$

respectivamente, definidos de la siguiente manera:

a) Para $n = 0$ definimos $d_i^0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus R$, donde $d_i^0(m) = (m, (-m\ i)1_R)$ para $i = 0, 1$ y $s_0^0 : \mathbb{Z} \oplus R \to \mathbb{Z}$, donde $s_0^0(m, r) = m$.

b) Para $n \geq 1$, se define

$$d_i^n : \mathbb{Z} \oplus R \oplus (R \otimes R) \oplus \cdots \oplus \left(\bigotimes_{t=1}^{n} R\right) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus R \oplus (R \otimes R) \oplus \cdots \oplus \left(\bigotimes_{t=1}^{n+1} R\right)$$

por casos como sigue:

1) $d_0^n(m, r_1, \ldots, r_n) := (m, r_1, \ldots, r_n, 0)$,
2) $d_k^n(m, r_1, \ldots, r_n) := (m, r_1, \ldots, r_{n-k+1}, -\tau_{n-k+1}^{n-k+1}(r_{n-k+1}), \ldots, -\tau_{n-k+1}^{n}(r_n))$ para $1 \leq k \leq n$,
3) $d_{n+1}^n(m, r_1, \ldots, r_n) := (m, (-m)1_R, -\tau_0^1(r_1), \ldots, -\tau_0^n(r_n))$.

c) Para $n \geq 1$, se define

$$s_i^n : \mathbb{Z} \oplus R \oplus (R \otimes R) \oplus \cdots \oplus \left(\bigotimes_{t=1}^{n+1} R\right) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus R \oplus (R \otimes R) \oplus \cdots \oplus \left(\bigotimes_{t=1}^{n} R\right)$$

por casos como sigue:

1) $s_0^n(m, r_1, \ldots, r_{n+1}) := (m, r_1, \ldots, r_n)$,
2) $s_k^n(m, r_1, \ldots, r_{n+1}) := (m, r_1, \ldots, r_{n-k}, -\chi_{n-k}^{n-k+2}(r_{n-k+2}), \ldots, -\chi_{n-k}^{n+1}(r_{n+1}))$ para $1 \leq k \leq n-1$,
3) $s_n^n(m, r_1, \ldots, r_{n+1}) := (m, -\chi_0^2(r_2), \ldots, -\chi_0^n(r_n))$.

Observación 4.3. Nótese que para $2 \leq i \leq n+1$ y $n \geq 1$ se tiene que

$$d_i^n(m, r_1, \ldots, r_n) = \left(d_{i-1}^{n-1}(m, r_1, \ldots, r_{n-1}), -\tau_{n-i+1}(r_n)\right)$$

y para $1 \leq j \leq n$ se tiene que

$$s_j^n(m, r_1, \ldots, r_{n+1}) = \left(s_{j-1}^{n-1}(m, r_1, \ldots, r_n), -\chi_{n-j}^{n+1}(r_{n+1})\right).$$

Ahora, con esta observación y la Proposición 4.1, podemos demostrar que la aplicación Ψ^R de la Definición 4.2 es un objeto modelo sobre la categoría Ab.

Teorema 4.4. *Los morfismos d_i^n y s_j^n de 4.2 satisfacen las identidades combinatorias presentadas en 3.1.*

Demostración. Actuemos por inducción sobre n.

I. Sea $n = 1$, entonces

$$\begin{aligned} d_1^1 d_0^0(m) &= d_1^1(m,0) \\ &= (m,0,0) \\ &= d_0^1(m,0) \\ &= d_0^1 d_0^0(m) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d_1^1 d_0^0(m) &= d_1^1(m,0) \\ &= (m,0,0) \\ &= d_0^1(m,0) \\ &= d_0^1 d_0^0(m) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d_1^1 d_0^0(m) &= d_1^1(m,0) \\ &= (m,0,0) \\ &= d_0^1(m,0) \\ &= d_0^1 d_0^0(m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1^1 d_0^0(m) &= d_1^1(m,0) \\ &= (m,0,0) \\ &= d_0^1(m,0) \\ &= d_0^1 d_0^0(m) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d_2^1 d_0^0(m) &= d_2^1(m,0) \\ &= (m,(-m)1_R,0) \\ &= d_0^1(m,(-m)1_R) \\ &= d_0^1 d_1^0(m) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d_2^1 d_1^0(m) &= d_2^1(m,(-m)1_R) \\ &= (m,(-m)1_R, 1_R \otimes m1_R) \\ &= (m,(-m)1_R, m1_R \otimes 1_R) \\ &= d_1^1(m,(-m)1_R) \\ &= d_1^1 d_1^0(m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_0^0 s_0^1(m,r_1,r_2^1 \otimes r_2^2) &= s_0^0(m,r_1) \\ &= m \\ &= s_0^0(m,-r_2^1 r_2^2) \\ &= s_0^0 s_1^1(m,r_1,r_2^1 \otimes r_2^2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s_1^1 d_0^1(m,r_1) &= s_1^1(m,r_1,0) \\ &= (m,0) \\ &= d_0^0(m) \\ &= d_0^0 s_0^0(m,r_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_1^1 d_1^1(m,r_1) &= s_1^1(m,r_1,-r_1 \otimes 1_R) \\ &= (m,r_1) \\ &= s_1^1(m,(-m)1_R,-1_R \otimes r_1) \\ &= s_1^1 d_2^1(m,r_1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s_0^1 d_0^1(m,r_1) &= s_0^1(m,r_1,0) \\ &= (m,r_1) \\ &= s_0^1(m,r_1,-r_1 \otimes 1_R) \\ &= s_0^1 d_1^1(m,r_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_0^1 d_2^1(m,r_1) &= s_0^1(m,(-m)1_R,-r_1 \otimes 1_R) \\ &= (m,(-m)1_R) \\ &= d_1^0(m) \\ &= d_1^0 s_0^0(m,r) \end{aligned}$$

II. Supongamos que se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$, verifiquemos para $n+1$.

1. Sea $j = 1$ y $i = 0$, entonces

$$\begin{aligned} d_1^{n+1} d_0^n(m, r_1, \ldots, r_n) &= d_1^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_n, 0) \\ &= (m, r_1, \ldots, r_n, 0, 0) \\ &= d_0^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_n, 0) \\ &= d_0^{n+1} d_0^0(m, r_1, \ldots, r_n). \end{aligned}$$

Sea $i = 0$ y $1 < j \leq n+1$, entonces

$$\begin{aligned} d_j^{n+1} d_0^n(m, r_1, \ldots, r_n) &= d_j^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_n, 0) \\ &= (m, r_1, \ldots, r_{n-j+2}, -\tau_{n-j+2}(r_{n-j+2}), \ldots, -\tau_{n-j+2}(r_n), 0) \\ &= d_0^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_{n-j+2}, -\tau_{n-j+2}(r_{n-j+2}), \ldots, -\tau_{n-j+2}(r_n)) \\ &= d_0^{n+1} d_{j-1}^n(m, r_1, \ldots, r_n). \end{aligned}$$

Sea $i = 0$ y $j = n+2$, entonces

$$\begin{aligned} d_{n+2}^{n+1} d_0^n(m, r_1, \ldots, r_n) &= d_j^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_n, 0) \\ &= (m, (-m)1_R, -\tau_0(r_1), \ldots, -\tau_0(r_n), 0) \\ &= d_0^{n+1}(m, (-m)1_R, -\tau_0(r_1), \ldots, -\tau_0(r_n)) \\ &= d_0^{n+1} d_{n+1}^n(m, r_1, \ldots, r_n). \end{aligned}$$

Sea $0 < i < j \leq n+1$, entonces

$$\begin{aligned} d_j^{n+1} d_i^n(m, r_1, \ldots, r_n) &= d_j^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_{n-i+1}, -\tau_{n-i+1}(r_{n-i+1}), \ldots, -\tau_{n-i+1}(r_n)) \\ &= (m, r_1, \ldots, r_{n-j+2}, -\tau_{n-j+2}(r_{n-j+2}), \ldots, -\tau_{n-j+2}(r_{n-i+1}), \\ &\quad \tau_{n-j+2}\tau_{n-i+1}(r_{n-i+1}), \ldots, \tau_{n-j+2}\tau_{n-i+1}(r_n)). \end{aligned}$$

Puesto que $i < j$, entonces $n - i + 1 \geq n - j + 2$, por tanto por el ítem 1 de la Proposición 4.1 se tiene que $\tau_{n-j+2}\tau_{n-i+1} = \tau_{n-i+2}\tau_{n-j+2}$. Luego

$$\begin{aligned} d_j^{n+1} d_i^n(m, r_1, \ldots, r_n) &= (m, r_1, \ldots, r_{n-j+2}, -\tau_{n-j+2}(r_{n-j+2}), \ldots, -\tau_{n-j+2}(r_{n-i+1}), \\ &\quad \tau_{n-i+2}\tau_{n-j+2}(r_{n-i+1}), \ldots, \tau_{n-i+2}\tau_{n-j+2}(r_n)) \\ &= d_i^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_{n-j+2}, -\tau_{n-j+2}(r_{n-j+2}), \ldots, -\tau_{n-j+2}(r_n)) \\ &= d_i^{n+1} d_{j-1}^n(m, r_1, \ldots, r_n). \end{aligned}$$

Sea $0 < i < j = n+2$, entonces

$$\begin{aligned} d_{n+2}^{n+1} d_i^n(m, r_1, \ldots, r_n) &= d_{n+2}^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_{n-i+1}, -\tau_{n-i+1}(r_{n-i+1}), \ldots, -\tau_{n-i+1}(r_n)) \\ &= (m, (-m)1_R, -\tau_0(r_1), \ldots, -\tau_0(r_{n-i+1}), \tau_0\tau_{n-i+1}(r_{n-i+1}), \\ &\quad \ldots, \tau_0\tau_{n-i+1}(r_n)). \end{aligned}$$

Puesto $n-i+1 \geq 0$, entonces por el ítem 1 de la Proposición 4.1 se tiene que $\tau_0\tau_{n-i+1} = \tau_{n-i+2}\tau_0$, entonces

$$\begin{aligned} d^{n+1}_{n+2}d^n_i(m, r_1, \dots, r_n) &= (m, (-m)1_R, -\tau_0(r_1), \dots, -\tau_0(r_{n-i+1}), \\ &\quad \tau_{n-i+2}\tau_0(r_{n-i+1}), \dots, \tau_{n-i+2}\tau_0(r_n)) \\ &= d^{n+1}_i(m, (-m)1_R, -\tau_0(r_1), \dots, -\tau_0(r_n)) \\ &= d^{n+1}_i d^n_{n+1}(m, r_1, \dots, r_n). \end{aligned}$$

2. Sea $i = 0 = j$, entonces

$$\begin{aligned} s^n_0 s^{n+1}_0(m, r_1, \dots, r_{n+2}) &= (m, r_1, \dots, r_n) \\ &= s^n_0(m, r_1, \dots, r_n, -\chi_n(r_{n+2})) \\ &= s^n_0 s^{n+1}_1(m, r_1, \dots, r_n). \end{aligned}$$

Sea $i = 0 < j$, entonces

$$\begin{aligned} s^n_j s^{n+1}_0(m, r_1, \dots, r_{n+2}) &= s^n_j(m, r_1, \dots, r_n, r_{n+1}) \\ &= s^n_0(s^n_j(m, r_1, \dots, r_{n+1}), -\chi_{n-j}(r_{n+2})) \\ &= s^n_0 s^{n+1}_{j+1}(m, r_1, \dots, r_{n+2}). \end{aligned}$$

Sea $0 < i < j$, entonces

$$\begin{aligned} s^n_j s^{n+1}_i(m, r_1, \dots, r_{n+2}) &= s^n_j(s^n_{i-1}(m, r_1, \dots, r_{n+1}, -\chi_{n+1-j}(r_{n+2})) \\ &= (s^{n-1}_{j-1}s^n_{i-1}(m, r_1, \dots, r_{n+1}), \chi_{n-j}\chi_{n+1-i}(r_{n+2})). \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción $s^{n-1}_{j-1}s^n_{i-1} = s^{n-1}_{i-1}s^n_j$ y por el ítem 2 de la Proposición 4.1 se tiene que $\chi_{n-j}\chi_{n+1-i} = \chi_{n-i}\chi_{n-j}$, puesto que $j > i$ implica que $n+1-i > n-j$, entonces

$$\begin{aligned} s^n_j s^{n+1}_i(m, r_1, \dots, r_{n+2}) &= (s^{n-1}_{i-1}s^n_j(m, r_1, \dots, r_{n+1}), \chi_{n-i}\chi_{n-j}(r_{n+2})) \\ &= s^n_i(s^n_j(m, r_1, \dots, r_{n+1}), -\chi_{n-j}(r_{n+2})) \\ &= s^n_i s^{n+1}_{j+1}(m, r_1, \dots, r_{n+2}). \end{aligned}$$

3. Sea $i = 0$ y $j = 1$, entonces

$$\begin{aligned} s^{n+1}_1 d^{n+1}_0(m, r_1, \dots, r_{n+1}) &= s^{n+1}_1(m, r_1, \dots, r_{n+1}, 0) \\ &= (m, r_1, \dots, r_n, 0) \\ &= d^n_0(m, r_1, \dots, r_n) \\ &= d^n_0 s^n_0(m, r_1, \dots, r_{n+1}). \end{aligned}$$

Sea $0 = i < j$, entonces

$$\begin{aligned} s^{n+1}_j d^{n+1}_0(m, r_1, \dots, r_{n+1}) &= s^{n+1}_j(m, r_1, \dots, r_{n+1}, 0) \\ &= (s^n_{j-1}(m, r_1, \dots, r_{n+1}), 0) \\ &= (s^{n-1}_{j-2}(m, r_1, \dots, r_n), -\chi_{n-j+1}(r_{n-j+1}), 0) \\ &= d^n_0(s^{n-1}_{j-2}(m, r_1, \dots, r_n), -\chi_{n-j+1}(r_{n-j+1})) \\ &= d^n_0 s^n_{j-1}(m, r_1, \dots, r_{n+1}). \end{aligned}$$

Sea $1 = i < j$, entonces

$$\begin{aligned} s_j^{n+1} d_1^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_{n+1}) &= s_j^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_{n+1}, -\tau_{n+1}(r_{n+1})) \\ &= \left(s_{j-1}^n(m, r_1, \ldots, r_{n+1}), \chi_{n+1-j}\tau_{n+1}(r_{n+1})\right). \end{aligned}$$

Ahora, puesto que $j > 1$, tenemos que $n > n+1-j$, por lo tanto, por el ítem 3 de la Proposición 4.1, se obtiene que $\chi_{n+1-j}\tau_{n+1} = \tau_n\chi_{n+1-j}$. Luego,

$$\begin{aligned} s_j^{n+1} d_1^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_{n+1}) &= \left(s_{j-1}^n(m, r_1, \ldots, r_{n+1}), \tau_n\chi_{n+1-j}(r_{n+1})\right) \\ &= d_1^n \left(s_{j-2}^{n-1}(m, r_1, \ldots, r_n), -\chi_{n+1-j}(r_{n+1})\right) \\ &= d_1^n s_{j-1}^n(m, r_1, \ldots, r_{n+1}). \end{aligned}$$

Sea $2 \le i < j \le n+2$, entonces

$$\begin{aligned} s_j^{n+1} d_i^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_{n+1}) &= s_j^{n+1}(d_{i-1}^n(m, r_1, \ldots, r_n), -\tau_{n-i+2}(r_{n+1})) \\ &= \left(s_{j-1}^n d_{i-1}^n(m, r_1, \ldots, r_n), \chi_{n-j+1}\tau_{n-i+2}(r_{n+1})\right). \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción $s_{j-1}^n d_{i-1}^n = d_{i-1}^{n-1} s_{j-2}^{n-1}$ y por el ítem 3 de la Proposición 4.1 se tiene que $\chi_{n-j+1}\tau_{n-i+2} = \tau_{n-i+1}\chi_{n-j+1}$. Ya que $i < j$, tenemos que $n-i+1 > n-j+1$ y luego

$$\begin{aligned} s_j^{n+1} d_i^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_{n+1}) &= \left(d_{i-1}^{n-1} s_{j-2}^{n-1}(m, r_1, \ldots, r_n), \tau_{n-i+1}\chi_{n-j+1}(r_{n+1})\right) \\ &= d_i^n \left(s_{j-2}^{n-1}(m, r_1, \ldots, r_n), -\chi_{n-j+1}(r_{n+1})\right) \\ &= d_i^n s_{j-1}^n (m, r_1, \ldots, r_n, r_{n+1}). \end{aligned}$$

4. Sea $i = 0$, entonces

$$\begin{aligned} s_0^{n+1} d_0^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_{n+1}) &= (m, r_1, \ldots, r_{n+1}) \\ &= s_0^{n+1} (m, r_1, \ldots, r_{n+1}, -\tau_{n+1}(r_{n+1})) \\ &= s_0^{n+1} d_1^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_{n+1}). \end{aligned}$$

Sea $i = 1$, entonces

$$\begin{aligned} s_1^{n+1} d_1^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_{n+1}) &= s_1^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_{n+1}, -\tau_{n+1}(r_{n+1})) \\ &= (m, r_1, \ldots, r_n, \chi_n\tau_{n+1}(r_{n+1})). \end{aligned}$$

Por el ítem 4 de la Proposición 4.1 se tiene que $\chi_n\tau_{n+1} = identidad = \chi_n\tau_n$. Luego

$$\begin{aligned} s_1^{n+1} d_1^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_{n+1}) &= (m, r_1, \ldots, r_{n+1}) \\ &= (m, r_1, \ldots, r_n, \chi_n\tau_n(r_{n+1})) \\ &= s_1^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_n, -\tau_n(r_{n+1})) \\ &= s_1^{n+1} d_2^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_n, r_{n+1}). \end{aligned}$$

Sea $2 \le i \le n+1$, entonces

$$\begin{aligned} s_i^{n+1} d_i^{n+1}(m, r_1, \ldots, r_{n+1}) &= s_i^{n+1} \left(d_{i-1}^n(m, r_1, \ldots, r_n), -\tau_{n-i+2}(r_{n+1})\right) \\ &= \left(s_{i-1}^n d_{i-1}^n(m, r_1, \ldots, r_n), \chi_{n-i+1}\tau_{n-i+2}(r_{n+1})\right). \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción $s^n_{i-1}d^n_{i-1} = identidad = s^n_{i-1}d^n_i$ y por el ítem 4 de la Proposición 4.1 se tiene que $\chi_{n-i+1}\tau_{n-i+2} = identidad = \chi_{n-i+1}\tau_{n-i+1}$. Luego

$$\begin{aligned} s^{n+1}_i d^{n+1}_i(m, r_1, \ldots, r_{n+1}) &= (m, r_1, \ldots, r_{n+1}) \\ &= \left(s^n_{i-1}d^n_i(m, r_1, \ldots, r_n), \chi_{n-i+1}\tau_{n-i+1}(r_{n+1})\right) \\ &= s^{n+1}_i\left(d^n_i(m, r_1, \ldots, r_n), -\tau_{n-i+1}(r_{n+1})\right) \\ &= s^{n+1}_i d^{n+1}_{i+1}(m, r_1, \ldots, r_{n+1}). \end{aligned}$$

5. Sea $i = 2$ y $j = 0$, entonces

$$\begin{aligned} s^{n+1}_0 d^{n+1}_2(m, r_1, \ldots, r_{n+1}) &= s^{n+1}_0(m, r_1, \ldots, r_n, -\tau_n(r_n), -\tau_n(r_{n+1})) \\ &= (m, r_1, \ldots, r_n, -\tau_n(r_n)) \\ &= d^n_1(m, r_1, \ldots, r_n) \\ &= d^n_1 s^n_0(m, r_1, \ldots, r_{n+1}). \end{aligned}$$

Sea $i > 2$ y $j = 0$, entonces

$$\begin{aligned} s^{n+1}_0 d^{n+1}_i(m, r_1, \ldots, r_{n+1}) &= s^{n+1}_0(d^n_{i-1}(m, r_1, \ldots, r_n), -\tau_{n+2-i}(r_{n+1})) \\ &= d^n_{i-1}(m, r_1, \ldots, r_n) \\ &= d^n_{i-1}s^n_0(m, r_1, \ldots, r_{n+1}). \end{aligned}$$

Sea $i > j + 1$ y $j \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} s^{n+1}_j d^{n+1}_i(m, r_1, \ldots, r_{n+1}) &= s^{n+1}_j(d^n_{i-1}(m, r_1, \ldots, r_n), -\chi_{n+2-i}(r_{n+1})) \\ &= \left(s^n_{j-1}d^n_{i-1}(m, r_1, \ldots, r_n), \chi_{n+1-j}\tau_{n+2-i}(r_{n+1})\right). \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción $s^n_{j_1}d^n_{i-1} = d^{n-1}_{i-2}s^{n-1}_{j-1}$ y por el ítem 5 de la Proposición 4.1 se tiene que $\chi_{n+1-j}\tau_{n+2-j} = \tau_{n+2-i}\chi_{n-j}$. Ya que $i > j + 1$, tenemos que $n + 2 - i < n + 1 - j$ y luego

$$\begin{aligned} s^{n+1}_j d^{n+1}_i(m, r_1, \ldots, r_{n+1}) &= \left(d^{n-1}_{i-2}s^{n-1}_{j-1}(m, r_1, \ldots, r_n), \tau_{n+2-i}\chi_{n-j}(r_{n+1})\right) \\ &= d^n_{i-1}\left(s^{n-1}_{j-1}(m, r_1, \ldots, r_n), \chi_{n-j}(r_{n+1})\right) \\ &= d^n_{i-1}s^n_j(m, r_1, \ldots, r_{n+1}). \end{aligned}$$

Así pues la propiedad se cumple para $n + 1$. Entonces las identidades se cumplen para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 4.5. *Consideremos el bifuntor $(-) \otimes (-) : Ab \times Ab \to Ab$ dado por $A \otimes B := A \otimes_{\mathbb{Z}} B$, donde $\otimes_{\mathbb{Z}}$ denota el producto tensorial como $\mathbb{Z}$-módulos. La relación de homotopía que genera el objeto modelo Ψ^R, junto con el bifuntor $(-) \otimes (-)$, por el proceso descrito en 3.4, es la relación de homotopía en Ab descrita en [13].*

Demostración. Puesto que $\left(\Psi^R\right)^0 = \mathbb{Z}$, entonces $X \otimes \left(\Psi^R\right)^0 \cong X$ naturalmente para todo grupo abeliano X, por lo tanto Ψ_R genera un sistema homotópico $\eta_{\Phi^R} = (I, \epsilon^0, \epsilon^1, \mu)$, donde $I(X) = X \otimes (\mathbb{Z} \oplus R) \cong X \oplus (X \otimes R), \epsilon^0_X(x) = (x, 0), \epsilon^1_X(x) = (x, -x \otimes 1_R)$ y $\mu_X(x, y \otimes r) = x$, el cual es el sistema homotópico descrito en el Ejemplo 3.3, donde la relación de homotopía que genera es la homotopía en la categoría de los grupos abelianos, no trivial, descrita por L. Hernández en su tesis doctoral [13]. ☑

A continuación explicitamos la construcción dada en la Definición 3.6 asociada al objeto modelo $Y = \Psi^R$, definido en 4.2, para ello utilizaremos la notación de tipo exponencial, $Hom_{Ab}(A,B) = B^A$: Sea A un grupo abeliano y R un anillo unitario, entonces $S_{\Psi^R}(A)_n \cong A \oplus A^R \oplus \cdots \oplus A^{\bigotimes_{t=1}^{n+1} R}$, por tanto obtenemos que $S_{\Psi^R}(A)$ es el siguiente grupo abeliano simplicial

$$\begin{array}{ccc}
 & \vdots & \\
 & A \oplus A^R \oplus \cdots \oplus A^{\bigotimes_{t=1}^{n+1} R} & \\
j = 0, \ldots, n & s_n^j \uparrow\downarrow d_n^i & i = 0, \ldots, n+1 \\
 & A \oplus \ A^R \oplus \cdots \oplus A^{\bigotimes_{t=1}^{n} R} & \\
 & \vdots & \\
 & A \oplus A^R & \\
 & s_0^0 \uparrow\downarrow d_0^i & i = 0, 1 \\
 & A. &
\end{array}$$

donde los morfismos d_n^i para $i = 0, \ldots, n+1$ y s_n^j para $j = 0, \ldots, n$ son como sigue:

1. Para $n = 0$, $A \oplus A^R \xrightarrow{d_0^i} A$, donde $d_0^0(a,f) = a$, $d_0^1(a,f) = a - f(1_R)$ y $A \xrightarrow{s_0^0} A \oplus A^R$, donde $s_0^0(a) = (a, 0)$.

2. Para $n \geq 1$

$$\begin{array}{rcl}
A \oplus A^R \oplus \cdots \oplus A^{\bigotimes_{t=1}^{n+1} R} & \xrightarrow{d_n^i} & A \oplus A^R \oplus \cdots \oplus A^{\bigotimes_{t=1}^{n} R} \\
(a, f_1, \ldots, f_{n+1}) & \overset{i=0}{\longmapsto} & (a, f_1, \ldots, f_n) \\
 & \overset{i=1}{\longmapsto} & (a, f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n - f_{n+1}\tau_n^n) \\
 & \overset{2 \leq i \leq n-1}{\longmapsto} & (a, f_1, \ldots, f_{n-i}, f_{n-i+1} - f_{n-i+2}\tau_{n-i+1}^{n-i+1}, \\
 & & -f_{n-i+3}\tau_{n-i+1}^{n-i+2}, \ldots, -f_{n+1}\tau_{n-i+1}^{n}) \\
 & \overset{i=n}{\longmapsto} & (a, f_1 - f_2\tau_1^1, -f_3\tau_1^2, \ldots, -f_{n+1}\tau_1^n) \\
 & \overset{i=n+1}{\longmapsto} & (a - f_1(1_R), -f_2\tau_0^1, \ldots, -f_{n+1}\tau_0^n).
\end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl}
A \oplus A^R \oplus \cdots \oplus A^{\bigotimes_{t=1}^{n} R} & \xrightarrow{s_n^j} & A \oplus A^R \oplus \cdots \oplus A^{\bigotimes_{t=1}^{n+1} R} \\
(a, f_1, \ldots, f_n) & \overset{j=0}{\mapsto} & (a, f_1, f_2, \ldots, f_n, 0) \\
 & \overset{1 \leq j \leq n-1}{\mapsto} & (a, f_1, \ldots, f_{n-j}, 0, -f_{n-j+1}\chi_{n-j}^{n-j+2}, \ldots, -f_n\chi_{n-j}^{n+1}) \\
 & \overset{j=n}{\mapsto} & (a, 0, -f_1\chi_0^2, \ldots, -f_n\chi_0^{n+1}).
\end{array}$$

Por la Definición 3.9 tenemos que el objeto modelo Ψ^R, definido en 4.2, genera al funtor de homología H_{Ψ^R} donde $H_{\Psi^R}(A)_n := H_n(C^N_{\Psi^R}(A)) = Ker(\partial_n)/Im(\partial_{n+1})$, donde $\partial_n := (-1)^n d^n_n$ para d^n_n definido por el grupo abeliano simplicial $S_{\Psi^R}(A)$ el el ítem 1 al inicio de esta sección. Veamos pues los grupos de homología que genera el objeto modelo Ψ^R para un grupo abeliano A, grupos de homología introducidos en este trabajo, los cuales presentamos en el siguiente teorema.

Teorema 4.6. *Sea A un grupo abeliano y R un anillo unitario, entonces*

$$H_{\Psi^R}(A)_n = \begin{cases} A/\left\{f(1_R) : f \in A^R\right\} & n = 0, \\ \left\{f \in A^R : f(1_R) = 0\right\} / \left\{g\tau_0^1 : g \in A^{R\otimes R} \textit{ tal que } g\tau_1^1 = 0\right\} & n = 1, \\ \left\{f \in A^{\overset{n}{\underset{t=1}{\bigotimes}} R} : f\tau_k^{n-1} = 0 \textit{ para } 0 \leq k \leq n-1\right\} / \left\{g\tau_0^n : g \in A^{\overset{n+1}{\underset{t=1}{\bigotimes}} R} \textit{ tal que } g\tau_k^n = 0 \textit{ para } 1 \leq k \leq n\right\} & n \geq 2. \end{cases}$$

Demostración. Sea A un grupo abeliano y R un anillo unitario, entonces aplicando el funtor $N : \Delta^\circ Ab \to Ch^+(Ab)$ al grupo abeliano simplicial $S_{\Phi^R}(A)$, se obtiene el siguiente complejo de cadenas

$$N(S_{\Psi^R}(A)) : \cdots \to NS_{\Psi^R}(A)_3 \overset{\partial_3}{\to} NS_{\Psi^R}(A)_2 \overset{\partial_2}{\to} NS_{\Psi^R}(A)_1 \overset{\partial_1}{\to} A \to 0,$$

donde

$$\begin{aligned} NS_{\Psi^R}(A)_1 &= A^R, \\ NS_{\Psi^R}(A)_2 &= \left\{f \in A^{R\otimes R} : f\tau_1^1 = 0\right\}, \\ NS_{\Psi^R}(A)_3 &= \left\{f \in A^{R\otimes R\otimes R} : f\tau_2^2 = f\tau_1^2 = 0\right\}, \\ &\vdots \\ NS_{\Psi^R}(A)_n &= \left\{f \in A^{\overset{n}{\underset{t=1}{\bigotimes}} R} : f\tau_{n-1}^{n-1} = f\tau_{n-2}^{n-1} = \cdots = f\tau_1^{n-1} = 0\right\}. \end{aligned}$$

y $\partial_1(f) = f(1_R)$, $\partial_2(f) = -f\tau_0^1$, $\partial_3(f) = f\tau_0^2$, $\partial_n(f) = (-1)^{n+1} f\tau_0^{n-1}$ para todo $n \geq 3$, con lo cual se tiene el resultado. ☑

Ejemplo 4.7.

1. Sea R un cuerpo, entonces

$$H_{\Psi^R}(\mathbb{Z})_n = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, \\ 0, & n \geq 1. \end{cases}$$

2. Consideremos $R = \mathbb{Q}$ y $A = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Afirmación: todo objeto en $\mathbb{Q}\otimes\mathbb{Q}$ es de la forma $r\otimes 1$ para $r \in \mathbb{Q}$. En efecto, consideremos $\frac{p}{q}\otimes\frac{r}{s}$ un elemento del conjunto generador de $\mathbb{Q}\otimes\mathbb{Q}$, entonces $\frac{p}{q}\otimes\frac{r}{s} = \frac{pr}{q}\otimes\frac{1}{s} = \frac{prs}{qs}\otimes\frac{1}{s} = \frac{pr}{qs}\otimes 1$. Análogamente también se

prueba que en $\mathbb{Q}\otimes\mathbb{Q}$ se tiene que $r\otimes 1 = 1\otimes r$, para todo $r\in\mathbb{Q}$. Así pues, si un homomorfismo $g:\mathbb{Q}\otimes\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ satisface que $g\tau_1^1=0$, entonces $g\tau_0^1=0$, por lo tanto $H_{\Psi^R}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_1=\{f\in(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathbb{Q}}: f(1)=0\}$ con lo cual obtenemos $H_{\Psi^R}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_1\neq 0$, puesto que la proyección canónica $\pi:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dada por $\pi(r)=r+\mathbb{Z}$, para $r\in\mathbb{Q}$, está en el conjunto $\{f\in(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathbb{Q}}: f(1)=0\}$ y no es el homomorfismo nulo.

Observación 4.8. En [13] se define lo siguiente: Sea $\iota:\mathbb{Z}\to R$ el homomorfismo de grupos abelianos dado por $\iota(1_{\mathbb{Z}})=1_R$ y sea $S=Coker(\iota)$, por tanto $S=R/\iota(\mathbb{Z})$, donde $\iota(\mathbb{Z})$ es el grupo abeliano generado por 1_R, es decir $\iota(\mathbb{Z})=\{n1_R|n\in\mathbb{Z}\}$. Se define

$$\otimes^0 S=\mathbb{Z} \text{ y } \otimes^n S=\underbrace{S\otimes S\otimes\cdots\otimes S}_{n\ veces}$$

y con esto el n-ésimo grupo de homotopía $\pi_n(A)=[\otimes^n S,A]_R$ para un grupo abeliano A, donde $[A,B]_R=Hom_{Ab}(A,B)/\overset{\eta}{\sim}$ para η el sistema homotópico presentado en el ítem 3 del Ejemplo 3.3. Así pues tenemos que $\pi_0(A)=[\mathbb{Z},A]_R$. Posteriormente en este trabajo, en el Teorema 6.8, se demuestra que $H_{\Psi^R}(A)_0\cong\pi_0(A)$.

5. Esqueletos homoto-homológicos

Definición 5.1. Un *Esqueleto Homoto-Homológico* en una categoría $\mathcal{A}$ consiste de lo siguiente:

1. Un objeto modelo $Y:\Delta\to\mathcal{A}$.
2. Una relación de homotopía $\sim$ que sea compatible con la composición; es decir, si $f,g: A\to A'$ y $f',g': A'\to A''$ son tales que $f\sim g$ y $f'\sim g'$, entonces $f'f\sim g'g$.
3. Un funtor $\mathbf{H}$: $\mathcal{A}\to(Ch^+(Ab))_{\partial=0}$ tal que si dos morfismos f, g son tales que $f\sim g$, entonces $\mathbf{H}(f)=\mathbf{H}(g)$.

Por ejemplo, la relación $\sim$ puede ser definida por medio del sistema homotópico η_Y presentado en 3.4, si existe, o definida por medio del funtor $H_Y:\mathcal{A}\to(Ch^+(Ab))_{\partial=0}$ definido en 3.9. [3]. Como funtor $\mathbf{H}$ podemos considerar $\mathbf{H}=H_Y:\mathcal{A}\to(Ch^+(Ab))_{\partial=0}$ definido en 3.9, en el caso que este funtor sea invariante bajo la relación $\sim$, es decir que cumpla la condición exigida en 3 de la Definición 5.1. Usaremos la abreviación $(\mathcal{A},Y,\sim,\mathbf{H})$ para referirnos a esqueletos homoto-homológicos sobre la categoría $\mathcal{A}$.

En [2] se define una relación de homotopía en una categoría $\mathcal{A}$ por medio de la categoría de cocientes $(\mathcal{A}/\mathfrak{M},\kappa)$ (o llamada también en [5] como categoría de fracciones de $\mathcal{A}$ por $\mathfrak{M}$), donde $\mathcal{A}/\mathfrak{M}$ es una categoría con los mismos objetos de $\mathcal{A}$ y $\kappa:\mathcal{A}\to\mathcal{A}/\mathfrak{M}$ es un funtor covariante que preserva los objetos de $\mathcal{A}$ y satisface las siguientes dos condiciones:

1. Si $\alpha\in\mathfrak{M}$, entonces $\kappa(\alpha)$ es invertible en $\mathcal{A}/\mathfrak{M}$, es decir $\kappa(\alpha)$ es un isomorfismo en $\mathcal{A}/\mathfrak{M}$.

[3] Aquí estamos pensando en relaciones de homotopía definidas por un sistema homotópico η en el sentido de Kan [14], [15] o relaciones de homotopía definidas por un funtor covariante $F:\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ tal como se presenta en [2, Def. 2.9. pág. 244.]

2. Si $T : \mathcal{A} \to \mathcal{K}$ es un funtor, donde $\mathcal{K}$ es una categoría cualquiera, tal que $T(\alpha)$ es invertible para todo $\alpha \in \mathfrak{M}$, entonces existe un único funtor $\tau : \mathcal{A}/\mathfrak{M} \to \mathcal{K}$ tal que $T = \tau \circ \kappa$, es decir que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "\kappa"'] & \mathcal{K} \\ & \mathcal{A}/\mathfrak{M} \arrow[u, "\tau"'] \end{tikzcd}$$

Dada una categoría $\mathcal{A}$ cualquiera y $\mathfrak{M}$ una clase arbitraria de morfismos en una categoría $\mathcal{A}$, entonces en [2, Tma 1.1, pág. 240] demuestran que la categoría cociente $(\mathcal{A}/\mathfrak{M}, \kappa)$ existe. Con esto, definen $\mathfrak{M}$-homotopía en A como sigue: Dos morfismos $f, g : A \to B$ en $\mathcal{A}$ son llamados $\mathfrak{M}$-homótopos ($f \overset{\mathfrak{M}}{\sim} g$) si y sólo si $\kappa(f) = \kappa(g)$.

Observación 5.2. Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ es un funtor covariante cualquiera, se define la familia de morfismos $\mathfrak{M}(F) := \{f \in \mathcal{A} \mid F(f) \text{ es invertible en} \, \mathcal{C}\}$, por tanto existe la categoría cociente $(\mathcal{A}/\mathfrak{M}(F),\ \kappa)$ la cual genera la relación $\overset{\mathfrak{M}(F)}{\sim}$ en $\mathcal{A}$. Ahora, dado un objeto modelo $Y : \Delta \to \mathcal{A}$, entonces por la Definición 3.9 existe el funtor de homología $\mathcal{A} \overset{H_Y}{\to} (Ch^+(Ab))_{\partial=0}$ el cual genera entonces la relación $\overset{\mathfrak{M}(H_Y)}{\sim}$ en la categoría $\mathcal{A}$.

Veamos que el funtor H_Y es invariante bajo la relación $\overset{\mathfrak{M}(H_Y)}{\sim}$ en $\mathcal{A}$.

Teorema 5.3. *Dado un objeto modelo Y sobre la categoría $\mathcal{A}$ y $f, g : A \to B$ morfismos en $\mathcal{A}$ tales que f es $\mathfrak{M}(H_Y)$-homótopo a g, entonces $H_Y(f) = H_Y(g)$.*

Demostración. Por definición $\mathfrak{M}(H_Y) = \{f \in \mathcal{A} \mid H_Y(f) \text{ es invertible en } (Ch^+(Ab))_{\partial=0}\}$, entonces existe un único funtor $\tau : \mathcal{A}/\mathfrak{M} \to (Ch^+(Ab))_{\partial=0}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "H_Y"] \arrow[dr, "\kappa"'] & (Ch^+(Ab))_{\partial=0} \\ & \mathcal{A}/\mathfrak{M} \arrow[u, "\tau"'] \end{tikzcd}$$

Luego, por otro lado, puesto que f es $\mathfrak{M}(H_Y)$-homótopo a g, entonces $\kappa(f) = \kappa(g)$ y por tanto $\tau\kappa(f) = \tau\kappa(g)$, es decir, $H_Y(f) = H_Y(g)$. ☑

Así pues, dado un objeto modelo Y sobre $\mathcal{A}$, entonces $\left(\mathcal{A}, Y, \overset{\mathfrak{M}(Y)}{\sim}, H_Y\right)$ es un Esqueleto Homoto-Homológico.

5.1. Esqueletos homoto-homológicos en categorías simpliciales

En [6, pág. 81] se define *categoría simplicial*, a una categoría $\mathcal{C}$ para la cual existe un bifuntor $\underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \Delta^{\circ}Set$ con las siguientes propiedades para A y B objetos en $\mathcal{C}$:

1. $\underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{C}}(A,B)_0 = Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$.

2. Cada funtor $\underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{C}}(A,\cdot\,) : \mathcal{C} \to \Delta^{\circ}Set$ tiene un adjunto a izquierda $A \otimes_{\mathcal{C}} \cdot : \Delta^{\circ}Set \to \mathcal{C}$ el cual es asociativo en el sentido que existe un isomorfismo $A \otimes_{\mathcal{C}} (K \times L) \cong (A \otimes_{\mathcal{C}} K) \otimes_{\mathcal{C}} L$ natural en $A \in \mathcal{C}$ y $K, L \in \Delta^{\circ}Set$.

3. Cada funtor $\underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{C}}(\,\cdot\,,B) : \mathcal{C}^{op} \to \Delta^{\circ}Set$ tiene un adjunto a izquierda $\mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(\,\cdot\,,B) : \Delta^{\circ}Set \to \mathcal{C}^{op}$.

Ahora, si una categoría simplicial $\mathcal{C}$ tiene objeto final $*$, entonces en $\mathcal{C}$ se puede obtener un Esqueleto Homoto-Homológico, como lo muestra el siguiente corolario.

Corolario 5.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría simplicial con objeto final $*$ y $Y : \Delta \to \mathcal{C}$ el objeto modelo definido por $Y^n = * \otimes_{\mathcal{C}} \Delta[n]$*[4]*, $Y(\delta_n^i) = 1_* \otimes_{\mathcal{C}} d_i^n$ e $Y(\sigma_n^j) = 1_* \otimes_{\mathcal{C}} s_j^n$, para d_i^n y s_j^n definidas por $\left(d_i^n\right)_p(\alpha) = \delta_i^n \alpha$ y $\left(s_j^n\right)_p(\beta) = \sigma_j^n \beta$, donde $\alpha \in Hom_{\Delta}([p],[n-1])$ y $\beta \in Hom_{\Delta}([p],[n+1])$, entonces $\left(\mathcal{C}, Y, \overset{\mathfrak{M}(H_Y)}{\sim}, H_Y\right)$ es un Esqueleto Homoto-Homológico.*

Demostración. Dado que Y es un objeto modelo en $\mathcal{C}$, entonces por el Teorema 5.3 se obtiene el resultado. ☑

Por lo visto en la Observación 5.2 se tiene que un objeto modelo $Y : \Delta \to \mathcal{A}$ genera una relación de homotopía por medio de la categoría cociente $A/\mathfrak{M}$ y con lo visto en la Definición 3.4, Y genera bajo ciertas condiciones un sistema homotópico en $\mathcal{A}$, el cual a su vez define una relación de homotopía. Queda aquí pues abierta la pregunta de que tipo de relación hay entre estas dos relaciones de homotopía.

6. Esqueleto homoto-homológico en Ab

En la categoría de los grupos abelianos, existe la relación de homotopía presentada por L. Hernández en su tesis doctoral (ver [13]), la cual utilizó para definir los grupos de homotopía para un grupo abeliano, entre otras cosas. Por tanto, dada la importancia de esta relación de homotopía, en este trabajo se presentará un Esqueleto Homoto-Homológico en *Ab* para el cual la relación $\sim$ de la propiedad 2 de la Definición 5.1, sea la descrita en [13], la cual es generada por medio del objeto modelo Ψ^R, definido en 4.2. Ahora, este modelo genera el funtor de homología H_{Ψ^R} (ver Definición 3.9), al cual se le hizo una modificación a los objetos de la categoría de partida, es decir a los grupos abelianos.

Para R un anillo unitario, en [8, pág. 163] se define una relación de homotopía en la categoría de los grupos abelianos dada como sigue: Sean $f, g : A \to B$ homomorfismos de grupos abelianos, entonces se dice que f es nulo-homótopo ($f \overset{n}{\sim}_R 0$) si existe una función bilineal $F : A \times R \to B$ tal que $F(a, 1_R) = f(a)$, para todo $a \in A$. Luego f es homótopo a g ($f \simeq_R g$) si y sólo si $f - g \overset{n}{\sim}_R 0$.

Ahora, sea A un grupo abeliano, entonces $A \cong Hom_{Ab}(\mathbb{Z}, A)$, así pues se puede definir una relación en A por medio de la relación $\simeq_R$ en $Hom_{Ab}(\mathbb{Z}, A)$ como sigue.

[4] El conjunto simplicial $\Delta[n]$ se presenta en la Definición 2.9.

Definición 6.1. Sea A un grupo abeliano y $a_1, a_2 \in A$, entonces $a_1 \overset{A}{\sim}_R a_2$ si y solo si $\psi_{a_1} \simeq_R \psi_{a_2}$, donde $\psi_{a_i} : \mathbb{Z} \to A$ es el homomorfismo de grupos abelianos dado por $\psi_{a_i}(n) = n\, a_i$, para $i = 1, 2$. Así pues $a_1 \overset{A}{\sim}_R a_2$ si y sólo si existe una función bilineal $F : \mathbb{Z} \times R \to A$ tal que $F(n, 1_R) = n(a_1 - a_2)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Puesto que la relación $\simeq_R$ es de equivalencia, entonces $\overset{A}{\sim}_R$ también lo es. Usaremos la notación $\sim_R$ en cambio de $\overset{A}{\sim}_R$, cuando se entienda el grupo abeliano A.

Tomando la operación del grupo A, el conjunto $\{f(1_R) : f \in Hom_{Ab}(R, A)\}$ es un subgrupo de A. Este subgrupo es de interés aquí, pues él es el que determina la relación $\sim_R$, lo cual mostramos en la siguiente proposición:

Proposición 6.2. *Sea A un grupo abeliano y $a_1, a_2 \in A$, entonces $a_1 \sim_R a_2$ si y sólo si $a_1 - a_2 \in \{f(1_R) : f \in Hom_{Ab}(R, A)\}$. Así pues $A/\sim_R \cong A/\{f(1_R) : f \in Hom_{Ab}(R, A)\}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos $a_1 \sim_R a_2$, entonces existe una función bilineal $F : \mathbb{Z} \times R \to A$ tal que $F(n, 1_R) = n(a_1 - a_2)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, la cual induce un homomorfismo $f : R \to A$ dado por $f(r) = F(1_{\mathbb{Z}}, r)$. Puesto que F es bilineal, entonces f es homomorfismo de grupos. Así pues $f(1_R) = F(1_{\mathbb{Z}}, 1_R) = a_1 - a_2$. Por lo tanto $a_1 - a_2 \in \{f(1_R) : f \in Hom_{Ab}(R, A)\}$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora $a_1, a_2 \in A$ tales que $a_1 - a_2 \in \{f(1_R) : f \in Hom_{Ab}(R, A)\}$, entonces existe un homomorfismo de grupos abelianos $f : R \to A$ tal que $f(1_R) = a_1 - a_2$. Considere la aplicación $F : \mathbb{Z} \times R \to A$ dada por $F(n, r) := nf(r)$. Así pues F es bilineal y $F(n, 1_R) = nf(1_R) = n(a_1 - a_2)$, por lo tanto $a_1 \sim_R a_2$. ☑

De la Proposición 6.2 podemos ver que para el caso que $Hom_{Ab}(R, A) = 0$ entonces el grupo abeliano $A/\sim_R$ es el mismo grupo abeliano A.

La relación de homotopía $\simeq_R$ en $Hom_{Ab}(A, B)$, presentada en [13], induce el grupo $Hom_{Ab}(A, B)/\simeq_R$, el cual en [13, pág. 37] lo denotan por $[A, B]_R$. Por otro lado, puesto que $Hom_{Ab}(A, B)$ es un grupo abeliano entonces tenemos el grupo abeliano $Hom_{Ab}(A, B)/\sim_R$. El siguiente teorema nos muestra que estos grupos abelianos son isomorfos.

Teorema 6.3. *Sean A y B grupos abelianos y $f, g \in Hom_{Ab}(A, B)$, entonces $f \simeq_R g$ si y sólo si $f \sim_R g$. Así pues $[A, B]_R \cong Hom_{Ab}(A, B)/\sim_R$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $f \simeq_R g$, entonces $f - g \overset{n}{\sim}_R 0$, es decir que existe una función bilineal $F : A \times R \to B$ tal que $F(a, 1_R) = (f - g)(a)$. Considere ahora la función $G : \mathbb{Z} \times R \to Hom_{Ab}(A, B)$ donde $G(n, r) = F \circ i_r^n$, donde $i_r^n : A \to A \times R$ es la función definida por $i_r^n(a) := (n\,a, r)$. La función G es bilineal. Ahora $G(n, 1_R)(a) = F(n\,a, 1_R) = (f - g)(n\,a) = n(f - g)(a)$, para todo $a \in A$, entonces $G(n, 1_R) = n(f - g)$, es decir $f \sim_R g$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $f \sim_R g$, entonces existe una función bilineal $G : \mathbb{Z} \times R \to Hom_{Ab}(A, B)$ tal que $G(n, 1_R) = n(f - g)$. Considere ahora la función $F : A \times R \to B$ definida por $F(a, r) = G(1_{\mathbb{Z}}, r)(a)$. La función F es bilineal. En efecto, $F(a_1 + a_2, r) = G(1_{\mathbb{Z}}, r)(a_1 + a_2) = G(1_{\mathbb{Z}}, r)(a_1) + G(1_{\mathbb{Z}}, r)(a_2) = F(a_1, r) + F(a_2, r)$

y $F(a, r_1 + r_2) = G(1_{\mathbb{Z}}, r_1 + r_2)(a) = [G(1_{\mathbb{Z}}, r_1) + G(1_{\mathbb{Z}}, r_2)](a) = G(1_{\mathbb{Z}}, r_1)(a) + G(1_{\mathbb{Z}}, r_2)(a) = F(a, r_1) + F(a, r_2)$.

Así pues se obtiene que el homomorfismo identidad $1 : Hom_{Ab}(A, B) \to Hom_{Ab}(A, B)$ pasa al cociente $\overline{1} : [A, B]_R \to Hom_{Ab}(A, B)/\sim_R$, es decir $[A, B]_R \cong Hom_{Ab}(A, B)/\sim_R$. ☑

Teorema 6.4. *Sea $f : A \to B$ un homomorfismo de grupos abelianos. Si $a_1 \sim_R a_2$, entonces $f(a_1) \sim_R f(a_2)$.*

Demostración. Si $a_1 \sim_R a_2$, entonces $\psi_{a_1} \simeq_R \psi_{a_2}$, luego puesto que la relación $\simeq_R$ es representada por un sistema homotópico, entonces $f\psi_{a_1} \simeq_R f\psi_{a_2}$ es reflexiva (ver [19, Lema 2.3, pág. 4]). Ahora $\psi_{f(a_i)}(n) = nf(a_i) = f(n\, a_i) = f(\psi_{a_i}(n)) = f\psi_{a_i}(n)$, así pues, si $a_1 \sim_R a_2$ entonces $\psi_{f(a_1)} \simeq_R \psi_{f(a_2)}$, por lo tanto $f(a_1) \sim_R f(a_2)$. ☑

Con lo anterior tenemos que todo homomorfismo de grupos abelianos $f : A \to B$ pasa al cociente por $\sim_R$, por tanto se tiene el homomorfismo de grupos abelianos $[f]_R : A/\sim_R \to B/\sim_R$ donde $[f]_R([a]_A) = [f(a)]_B$. Entonces definimos el siguiente funtor.

Definición 6.5. Se define el endofuntor $C^R : Ab \to Ab$ por $C^R(A) = A/\sim_R$, para A un grupo abeliano y $C^R(f) = [f]_R$, para f un homomorfismo de grupos abelianos.

Teorema 6.6. *Sean $f, g : A \to B$ homomorfismos de grupos abelianos. Si $f \simeq_R g$, entonces $C^R(f) = C^R(g)$.*

Demostración. Supongamos $f \simeq_R g$, entonces existe una función bilineal $F : A \times R \to B$ tal que $F(a, 1_R) = (f - g)(a)$, para todo $a \in A$. Consideremos la función $\mathbb{Z} \times R \xrightarrow{T_a} A \times R$, para cada $a \in A$, donde $T_a(n, r) = (n\, a, r)$. La función FT_a es bilineal, más aún, se tiene que $FT_a(n, 1_R) = F(n\, a, 1_R) = (f - g)(n\, a) = nf(a) - ng(a) = n(f(a) - g(a))$, por tanto $f(a) \sim g(a)$ para cada $a \in A$, es decir $C^R(f)(a) = C^R(g)(a)$ en $B/\sim$, entonces $C^R(f) = C^R(g)$. ☑

Observación 6.7. Para el objeto modelo Ψ^R sobre la categoría *Ab*, se obtuvo por el Teorema 4.6 que $H_{\Psi^R}(A)_0 = A/\{f(1_R) : f \in Hom_{Ab}(R, A)\}$, es decir que $H_{\Psi^R}(A)_0 \cong C^R(A)$, para todo grupo abeliano A y en [13] se define el grupo cero de homotopía por $\pi_0(A) = [\mathbb{Z}, A]_R$, para A un grupo abeliano. Veamos que $\pi_0(A) \cong H_{\Psi^R}(A)_0$.

Teorema 6.8. *Sea A un grupo abeliano, entonces $\pi_0(A) \cong H_{\Psi^R}(A)_0$.*

Demostración. En [13] definen $\pi_0(A) = [\mathbb{Z}, A]_R$, luego por el Teorema 6.3 tenemos que $[\mathbb{Z}, A]_R \cong Hom_{Ab}(\mathbb{Z}, A)/\sim$. Por otro lado, existe un isomorfismo $\varphi : A \to Hom_{Ab}(\mathbb{Z}, A)$, luego puesto que C^R es un funtor entonces $C^R(\varphi) : A/\sim \to Hom_{Ab}(\mathbb{Z}, A)/\sim$ es un isomorfismo, es decir $A/\sim \cong Hom_{Ab}(\mathbb{Z}, A)/\sim$. Por último, por la Observación 6.7 tenemos que $C^R(A) \cong H_{\Psi^R}(A)_0$. Así pues con lo anterior obtenemos $\pi_0(A) = [\mathbb{Z}, A]_R \cong Hom_{Ab}(\mathbb{Z}, A)/\sim \cong A/\sim \cong H_{\Psi^R}(A)_0$. ☑

El funtor C^R preserva sucesiones exactas que se descomponen en *Ab*, propiedad que mostramos en la siguiente proposición.

Proposición 6.9. *Consideremos una sucesión exacta corta en Ab* $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} D \to 0$ *que se descompone, entonces la sucesión corta en Ab* $0 \to C^R(A) \xrightarrow{C^R(f)} C^R(B) \xrightarrow{C^R(g)} C^R(D) \to 0$ *es exacta y se descompone.*

Demostración. Para la exactitud hay tres cosas por demostrar:

1. ($C^R(f)$ es monomorfismo) Puesto que la sucesión se descompone, entonces f es una sección y por tanto $C^R(f)$ es una sección, además toda sección es un monomorfismo. Así pues $C^R(f)$ es un monomorfismo.
2. ($C^R(g)$ es epimorfismo) Afirmación; si g es epimorfismo, entonces $C^R(g)$ es también un epimorfismo. En efecto, sea $[d] \in D/\sim$, donde $d \in D$, puesto que g es sobreyectiva, entonces existe un $b \in B$ tal que $g(b) = d$, por tanto $[g(b)] = [d]$, luego $C^R(g)(b) = [g(b)]$, así pues $C^R(g)(b) = [d]$.
3. ($Ker\left(C^R(g)\right) = Im(\left(C^R(f)\right))$) Puesto que la sucesión $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} D \to 0$ se descompone, entonces por el corolario 3.8 la sucesión
$$0 \to S_Y(A)_n \xrightarrow{S_Y(f)_n} S_Y(B)_n \xrightarrow{S_Y(g)_n} S_Y(D)_n \to 0$$
es exacta para todo $n \geq 0$. Ahora al aplicar el funtor $M : \Delta^\circ Ab \to Ch^+(Ab)$ obtenemos la sucesión
$$0 \to MS_Y(A) \xrightarrow{MS_Y(f)} MS_Y(B) \xrightarrow{MS_Y(g)} MS_Y(D) \to 0$$
en $Ch^+(Ab)$, la cual es exacta por niveles para cada $n \geq 0$. Así pues obtenemos que la sucesión
$$\cdots \to H_n\left(MS_Y(A)\right) \xrightarrow{(MS_Y(f))_{n*}} H_n\left(MS_Y(B)\right) \xrightarrow{(MS_Y(g))_{n*}} H_n\left(MS_Y(D)\right) \xrightarrow{\partial_*} \cdots$$
es exacta para todo $n \geq 0$ (ver [1, Theorem 1.3, pág. 6], la cual por la Observación 3.7 es igual a la sucesión
$$\cdots \to H_n\left(NS_Y(A)\right) \xrightarrow{(NS_Y(f))_{n*}} H_n\left(NS_Y(B)\right) \xrightarrow{(NS_Y(g))_{n*}} H_n\left(NS_Y(D)\right) \xrightarrow{\partial_*} \cdots$$
Así pues $Ker\left((NS_Y(g))_{n*}\right) = Im\left((NS_Y(f))_{n*}\right)$. Ahora si tomamos $Y = \Psi^R$ y $n = 0$, entonces por la Observación 6.7 obtenemos que $KerC^R(g) = ImC^R(f)$.

Puesto que $C^R(f)$ es una sección, entonces la sucesión exacta $0 \to C^R(A) \xrightarrow{C^R(f)} C^R(B) \xrightarrow{C^R(g)} C^R(D) \to 0$ se descompone. ☑

Así pues con el funtor C^R y H_Y para un objeto modelo $Y : \Delta \to Ab$ (ver Definición 3.9) se tiene el funtor $Ab \xrightarrow{C^R} Ab \xrightarrow{H_Y} (Ch^+(Ab))_{\partial=0}$, este funtor satisface que si $f \simeq_R g$ en Ab, lo cual es equivalente a que $f \overset{\eta_{\Psi^R}}{\sim} g$ (Teorema 4.5), entonces $H_Y C^R(f) = H_Y C^R(g)$ (Teorema 6.6), para R un anillo unitario. Así pues tomando a Y como el objeto modelo Ψ^R, entonces tenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.10. *Sea* Ψ^R *el objeto modelo definido en 4.2, entonces* $\left(Ab, \Psi^R, \overset{\eta_{\Psi^R}}{\sim}, H_{\Psi^R} C^R\right)$ *es un Esqueleto Homoto-Homológico en Ab.*

7. Teoría de homología general

En [22] se define lo que es una *Teoría de Homología General*, empezando con lo que es una *Categoría Admisible para Homología* en una categoría $\mathcal{C}$, con objeto inicial $\emptyset$ y con un sistema homotópico η. Con ello muestra los resultados que se obtienen para teoría de homología general. Para dar claridad al artículo, presentamos en esta sección las definiciones fundamentales para teoría de homología general presentadas en [22], para con esto mostrar posteriormente una teoría de homología general en la categoría de los grupos abelianos, utilizando el esqueleto homoto-homológico $\left(Ab, \psi^R, \overset{\eta_{\Psi^R}}{\sim}, H_{\Psi^R}C^R\right)$ del Teorema 6.10. Si para el lector es de interés el conocer más propiedades de las teorías de homología general, se pueden consultar en [22].

Definición 7.1. Consideremos $\mathcal{C}$ una categoría. Se define la categoría $Mor\,(\mathcal{C})$ por:

1. Los objetos de $Mor\,(\mathcal{C})$ son los morfismos de $\mathcal{C}$,
2. Un morfismo entre f y g es una pareja (β, α), donde $\alpha : A \to C$ y $\beta : B \to D$ son morfismos en $\mathcal{C}$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "\beta"] & D \end{tikzcd}$$

3. Sean $(\beta_1, \alpha_1) : f \to g$ y $(\beta_2, \alpha_2) : g \to h$, morfismos en $Mor\,(\mathcal{C})$, la composición está dada por $(\beta_2, \alpha_2)(\beta_1, \alpha_1) := (\beta_2\beta_1, \alpha_2\alpha_1)$.

Consideremos de ahora en adelante a $(\mathcal{C}, \eta)$ como una categoría $\mathcal{C}$ con objeto inicial $\emptyset$ único y $\eta = (I, \epsilon^0, \epsilon^1, \mu)$ un sistema homotópico en $\mathcal{C}$ tal que $I(\emptyset) = \emptyset$.

Definición 7.2 (Categoría de Parejas)**.** Llamaremos por *categoría de parejas* $\mathcal{P}$ a una subcategoría cualquiera de $Mor\,(\mathcal{C})$ que cumpla lo siguiente:

1. Para cada par de objetos A y B de $\mathcal{C}$, existe a lo más un único morfismo $\alpha : A \to B$, es decir no existe otro morfismo de $\mathcal{C}$ como objeto en $\mathcal{P}$ con el mismo dominio y codominio de α.
2. $\mathcal{P}$ es cerrada para composiciones, es decir si $\alpha \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $\beta \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ son objetos en $\mathcal{P}$, entonces $\beta\alpha$ es un objeto en $\mathcal{P}$.
3. Para cada objeto X en $\mathcal{C}$, se tiene que el morfismo identidad $1_X : X \to X$ y el morfismo $\emptyset \to X$ (el cual es único por $\emptyset$ ser objeto inicial) son objetos en $\mathcal{P}$.

Notación. Sea $\alpha : A \to X$ un objeto de $\mathcal{P}$. Puesto que solo existe un morfismo en $\mathcal{P}$ con dominio A y codominio X, entonces denotamos este objeto como (X, A). Así pues con esta notación tenemos que para dos objetos (X, A) y (Y, B) en la categoría $\mathcal{P}$, un morfismo $(F, f) : (X, A) \to (Y, B)$ en $\mathcal{P}$ es una pareja $F : X \to Y$, $f : A \to B$ de morfismos de $\mathcal{C}$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{(X,A)}"'] & B \arrow[d, "{(Y,B)}"] \\ X \arrow[r, "F"] & Y \end{tikzcd}$$

Definición 7.3 (Diagrama de $(X,\ A)$)**.** Sea (X, A) un objeto en $\mathcal{P}$, entonces se define *el diagrama de* (X, A), denotado por $\mathcal{D}(X, A)$, a

$$\begin{tikzcd} & & (X,\emptyset) \arrow[dr, "4"] & & \\ (\emptyset,\emptyset) \arrow[r, "1"] & (A,\emptyset) \arrow[ur, "2"] \arrow[dr, "3"'] & & (X,A) \arrow[r, "6"] & (X,X) \\ & & (A,A) \arrow[ur, "5"'] & & \end{tikzcd}$$

en donde los morfismos del 1 al 6 son los evidentes. Por ejemplo, (X, A) es un morfismo $\alpha : A \to X$ en $\mathcal{C}$, entonces el morfismo 5 es $(\alpha, 1_A)$.

Con las definiciones anteriores se abre paso a la definición de *Categoría Admisible.*

Definición 7.4 (Categoría Admisible para Homología)**.** Sea $\mathcal{P}$ una categoría de parejas sobre una categoría $(\mathcal{C}, \eta)$. Se dice que $\mathcal{P}$ es una *categoría esencialmente admisible para homología* si satisface las siguientes condiciones:

(AC1) Si (X, A) es un objeto en $\mathcal{P}$, entonces $\mathcal{P}$ contiene a $\mathcal{D}(X, A)$.

(AC1) Si $(X, A), (Y, B) \in \mathcal{P}$ y $(F, f) : (X, A) \to (Y, B)$ es un morfismo en $\mathcal{P}$, entonces todos los morfismos inducidos por (F, f), desde los miembros de $\mathcal{D}(X, A)$ a los correspondientes miembros de $\mathcal{D}(Y, B)$ están en $\mathcal{P}$.

(AC1) Si $(X, A) \in \mathcal{P}$, entonces $I(X, A) = (I(X), I(A))$ está en $\mathcal{P}$, donde I es el funtor del sistema homotópico η que acompaña a $\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{P}$ es una categoría esencialmente admisible para homología y además admite al menos un objeto $(*, \emptyset)$, donde $*$ es un objeto final y $\emptyset$ el objeto inicial en la categoría $\mathcal{C}$, entonces se dice que $\mathcal{P}$ es una *categoría admisible para homología.*

Para $\mathcal{P}$ una categoría admisible para homología, a los objetos de $\mathcal{P}$ se les llama admisibles y a los morfismos de $\mathcal{P}$ morfismos admisibles.

Ejemplo 7.5 (La categoría de pares topológicos)**.** Consideremos la categoría de los espacios topológicos con la homotopía usual. Sea Top_{par} la categoría en la cual los admisibles son las parejas topológicas (X, A), es decir las inclusiones $A \hookrightarrow X$, para A un subespacio de X. Los morfismos entre dos admisibles (X, A) y (Y, B) son todas las funciones continuas $f : X \to Y$ que satisfacen $f(A) \subseteq B$. Así pues Top_{par} satisface las condiciones (AC1)-(AC3) y admite el morfismo $\emptyset \hookrightarrow *$, donde $*$ es un espacio singleton, por tanto Top_{par} es un categoría admisible para homología.

Con la relación de homotopía generada por el sistema homotópico η en la categoría $\mathcal{C}$, se puede definir también una relación de homotopía en una categoría admisible $\mathcal{P}$ sobre la categoría $(\mathcal{C},\eta)$, la cual presenta [22] de la siguiente manera.

Definición 7.6 (Homotopía en Categorías Admisibles)**.** Sean $\mathcal{P}$ una categoría admisible para homología sobre una categoría $(\mathcal{C},\eta)$ y $(F,f),(G,g):(X,A)\to(Y,B)$ morfismos admisibles en $\mathcal{P}$, entonces decimos que (F,f) es η homótopo a (G,g) $((F,f)\overset{\eta}{\simeq}(G,g))$ si existe un morfismo admisible $(T,t):I(X,A)\to(Y,B)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
(X,A) \arrow[d, "{(\epsilon_X^0,\epsilon_A^0)}"'] \arrow[dr, "{(F,f)}"] & \\
I(X,A) \arrow[r, "{(T,t)}"] & (Y,B) \\
(X,A) \arrow[u, "{(\epsilon_X^1,\epsilon_A^1)}"] \arrow[ur, "{(G,g)}"'] &
\end{tikzcd}$$

es decir, que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\epsilon_X^0"'] \arrow[dr, "F"] & \\
I(X) \arrow[r, "T"] & Y \\
X \arrow[u, "\epsilon_X^1"] \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\epsilon_A^0"'] \arrow[dr, "f"] & \\
I(A) \arrow[r, "t"] & B \\
A \arrow[u, "\epsilon_A^1"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

En [22] se define el objeto cociente en una categoría como sigue.

Definición 7.7. Sea $\mathcal{P}$ una categoría de parejas sobre una categoría $\mathcal{C}$ con objeto final $*$ y (X,A) un objeto en $\mathcal{P}$, entonces definimos el cociente X/A por medio del siguiente diagrama cocartesiano

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "{(X,A)}"] \arrow[d, "*"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\
* \arrow[r, "{(X/A,*)}"'] & X/A
\end{tikzcd}$$

siempre y cuando exista.

Observación 7.8. En la categorías de parejas Top_{par} del Ejemplo 7.5, el cociente definido en 7.7 coincide con el cociente de espacios topológicos.

Para el caso de un morfismo $(F,f):(X,A)\to(Y,B)$ en una categoría de parejas se cumple una propiedad de isomorfismo entre cocientes, propiedad demostrada en este trabajo y presentada en la siguiente proposición.

Teorema 7.9. *Sea $\mathcal{P}$ una categoría de parejas sobre una categoría $\mathcal{C}$ con objeto final $*$ y supongamos el siguiente diagrama es cocartesiano*

$$(1)\qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "{(X,A)}"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d, "F"] \\ B \arrow[r, "{(Y,B)}"'] & Y \end{tikzcd}$$

entonces $X/A \cong Y/B$, siempre y cuando existan estos cocientes.

Demostración. Por la Definición 7.7 tenemos que los siguientes diagramas son cocartesianos

$$(2)\qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "{(X,A)}"] \arrow[d, "*"] & X \arrow[d, "\pi"] \\ * \arrow[r, "{(X/A,*)}"'] & X/A \end{tikzcd} \qquad\qquad (3)\qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "{(Y,B)}"] \arrow[d, "*'"] & Y \arrow[d, "\pi'"] \\ * \arrow[r, "{(Y/B,*)}"'] & Y/B \end{tikzcd}$$

luego componiendo el diagrama (1) con el diagrama (3) obtenemos el siguiente diagrama

$$(4)\qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "{(X,A)}"] \arrow[d, "*'f"] & X \arrow[d, "\pi' F"] \\ * \arrow[r, "{(Y/B,*)}"'] & Y/B \end{tikzcd}$$

el cual es cocartesiano. Por tanto tenemos que (2) y (4) son cocartesianos, entonces $X/A \cong Y/B$. ☑

Definición 7.10 (Escisión Categórica)**.** Un morfismo $(E, e) : (X, A) \to (Y, B)$ en $\mathcal{P}$ es una escisión categórica si el siguiente diagrama es cocartesiano

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "{(X,A)}"] \arrow[d, "e"'] & X \arrow[d, "E"] \\ B \arrow[r, "{(Y,B)}"'] & Y \end{tikzcd}$$

Definición 7.11. En $\mathcal{D}(X, A)$, definido en 7.3, la composición $(A, \emptyset) \xrightarrow{2} (X, \emptyset) \xrightarrow{4} (X, A)$ será llamada la *descomposición esencial* de (X, A) con notación genérica $(A, \emptyset) \xrightarrow{i} (X, \emptyset) \xrightarrow{j} (X, A)$ y que denotaremos por $E(X, A)$. Para un morfismo $(f, g) : (X, A) \to (Y, B)$ su *diagrama esencial* es el siguiente

$$\begin{tikzcd} (A,\emptyset) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "{(g,\emptyset)}"'] & (X,\emptyset) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "{(f,\emptyset)}"'] & (X,A) \arrow[d, "{(f,g)}"'] \\ (B,\emptyset) \arrow[r, "i"'] & (Y,\emptyset) \arrow[r, "j"'] & (Y,B) \end{tikzcd}$$

el cual denotaremos por $E(f,g)$.

Ahora, consideremos una categoría admisible para homología $\mathcal{P}$ sobre $(\mathcal{C},\eta)$ y $\mathbf{H}:\mathcal{P}\to Ch(Ab)$ un funtor covariante, entonces $\mathbf{H}$ induce los funtores $\mathbf{H}_n:\mathcal{P}\to Ab$ y $\mathbf{PR}_n:\mathcal{P}\to Ab$, donde $\mathbf{H}_n(X,A)=\mathbf{H}(X,A)_n$, $\mathbf{PR}_n(X,A)=\mathbf{H}(A,\emptyset)_n$, para (X,A) un objeto en $\mathcal{P}$ y $\mathbf{H}_n(F,f)=(F,f)^*_n$, $\mathbf{PR}_n(F,f)=(f,1_\emptyset)^*_n$, para (F,f) un morfismo en $\mathcal{P}$, para cada $n\in\mathbb{Z}$, donde $\mathbf{H}(X,A)_n$ es n-ésimo grupo abeliano del complejo de cadenas $\mathbf{H}(X,A)$ y $(F,f)^*_n=\mathbf{H}(F,f)_n$. Al funtor $\mathbf{PR}_n$ lo llamaremos *proyección n-ésima de* $\mathbf{H}$.

Para las teorías de homología generales, como en las teorías de homología en espacios topológicos, se pide la existencia de una transformación natural $\partial_n:\mathbf{H}_n\to\mathbf{PR}_{n-1}$ para cada $n\in\mathbb{Z}$, para la cual tenemos entonces la siguiente sucesión

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{H}_{n+1}(X,A) \arrow[d, "\partial_{n+1}"'] & & \\
& \mathbf{H}_n(A,\emptyset) \arrow[r, "i^*"] & \mathbf{H}_n(X,\emptyset) \arrow[r, "j^*"] & \mathbf{H}_n(X,A) \arrow[d, "\partial_n"'] & \\
& & & \mathbf{H}_{n-1}(A,\emptyset) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Así pues con el anterior breve resumen se abre paso a la definición de teoría de homología general, presentada en [22].

Definición 7.12 (Teoría de Homología General)**.** Sea $\mathcal{P}$ una categoría admisible para homología sobre una categoría $(\mathcal{C},\eta)$ y $\mathbf{H}\colon\mathcal{P}\to Ch(Ab)$ un funtor covariante. Decimos que $\mathbf{H}$ es una ***teoría de homología general*** si satisface los siguientes axiomas:

1. **Axioma de Exactitud**. Si (X,A) es un objeto en $\mathcal{P}$, entonces
$$\cdots\to\mathbf{H}_n(A,\emptyset)\overset{i^*}{\to}\mathbf{H}_n(X,\emptyset)\overset{j^*}{\to}\mathbf{H}_n(X,A)\overset{\partial_n}{\to}\mathbf{H}_{n-1}(A,\emptyset)\to\cdots$$
es una sucesión exacta.

2. **Axioma de Homotopía**. Sean $(F,f),(G,g):(X,A)\to(Y,B)$ morfismos en $\mathcal{P}$ tales que $(F,f)\overset{\eta}{\simeq}(G,g)$, entonces $\mathbf{H}(F,f)=\mathbf{H}(G,g)$.

3. **Axioma de Dimensión**. Si $n\neq 0$, entonces $\mathbf{H}_n(*,\emptyset)=0$, para todo admisible $(*,\emptyset)$, donde $*$ es un objeto final en $\mathcal{C}$.

4. **Axioma de Escisión**. Si $(E,e):(X,A)\to(Y,B)$ es una escisión categórica, entonces $\mathbf{H}(E,e)$ es un isomorfismo. Más aún $\mathbf{H(X/A)}\cong\mathbf{H(Y/B)}$, si X/A y Y/B existen.

Nota. Toda categoría $\mathcal{C}$ con objeto inicial y final se puede cambiar para todo propósito en $\underline{\mathcal{C}}$ igual que $\mathcal{C}$ pero con un solo objeto inicial $\emptyset$ y un solo objeto final $*$ y trabajar con $\underline{\mathcal{C}}$.

8. Teoría de homología general en Ab

Presentaremos una categoría de parejas en la categoría de los grupos abelianos (Ab) desarrollada en este trabajo, la cual utilizaremos posteriormente para mostrar una teoría de homología general en la categoría Ab.

Definición 8.1. Definimos la categoría Ab_{inj} como sigue:

1. Consideramos como objetos admisibles los siguientes morfismos

   a) Para todo grupo abeliano A, consideramos el morfismo $0 \to A$ y el morfismo identidad $1_A : A \to A$.

   b) Las inclusiones $A \hookrightarrow X$, donde A es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

   c) Para las inclusiones $i : A \hookrightarrow X$ del ítem anterior, consideramos también como admisibles a $I^n(i : A \hookrightarrow X)$, para $n \in \mathbb{Z}^+$, donde

   $$I^n = \underbrace{I \circ I \circ \cdots \circ I}_{n\,veces}$$

   para I el funtor cilindro del sistema homotópico en Ab mostrado en el ítem 4 del Ejemplo 3.3, el cual $I(f : X \to Y) = f \oplus (f \otimes 1_R)$, para f un homomorfismo de grupos abelianos.

2. Como morfismos entre objetos admisibles (X, A) y (Y, B), consideramos los morfismos en la categoría $Mor(Ab)$ entre estos objetos, es decir una pareja de homomorfismos de grupos abelianos $(F, f) : (X, A) \to (Y, B)$ tal que $f(A) \subset B$ y $f = F|_A$.

Consideremos el funtor $\mathbf{H}$: $Ab_{inj} \to (Ch^+(Ab))_{\partial=0}$ definido por medio del funtor de homología H_{Ψ^R}, presentado explícitamente en el Teorema 4.6, como $\mathbf{H}(X, A) = H_{\Psi^R}(C^R(X/A))$, donde C^R es el funtor definido en 6.5. Para $(F, f) : (X, A) \to (Y, B)$ un morfismo en Ab_{inj} definimos $\mathbf{H}(F, f) := H_{\Psi^R}(C^R(\widehat{F}))$, el cual denotamos por $(F, f)^*$, donde el homomorfismo $\widehat{F} : X/A \to Y/B$ es dado por $\widehat{F}(x + A) = F(x) + B$.

Nótese que $\mathbf{H}(X, 0) = H_{\Psi^R}(C(X))$, por tanto a las parejas de la forma $(X, 0)$ las denotaremos solo por X, para X un grupo abeliano. Así pues un morfismo $f : X \to (Y, B)$ es un morfismo de la forma $(f, 0) : (X, 0) \to (Y, B)$, donde f es un homomorfismo de X a Y. Por lo visto en la sección 7 tenemos los funtores $\mathbf{H}_n$ y $\mathbf{PR}_n$.

8.1. Dimensión

Teorema 8.2. $\mathbf{H}_n(0) = 0$ para todo $n \geq 0$.

Demostración. Por definición $\mathbf{H}_n(0) = H_{\Psi^R}(C^R(0))_n$, luego $C^R(0) = 0$ y por el Teorema 4.6 tenemos que $H_{\Psi^R}(0)_n = 0$ para todo $n \geq 0$, entonces $\mathbf{H}_n(0) = 0$ para todo $n \geq 0$. ☑

Toda teoría de homología general H debe satisfacer que $H_n(X,X)=0$ para todo n (ver [22, pág. 47]), luego en Ab se tiene que $H_n(*)=H_n(*,\emptyset)=0$ puesto que $*=\emptyset=0$, donde $*$ es el objeto final y $\emptyset$ es el objeto inicial, lo cual quiere decir que toda teoría de homología H en Ab sería una homología reducida. En busca de una teoría de homología general no reducida en Ab nos vemos en la necesidad de cambiar el axioma de dimensión en el sentido de que $*$ no sea el objeto final pero sin alterar lo establecido en teorías de homología en la categoría Top. Nótese lo siguiente; el funtor olvido $U_T : Top \to Set$ es representable (ver [16, Proposición 4.1.11, pág. 87]) puesto que tiene como adjunto a izquierda al funtor

$$\begin{array}{ccc} Set & \stackrel{D}{\to} & Top \\ X & \mapsto & (X, \mathcal{P}(X)) \end{array}$$

donde $\mathcal{P}(X)$ denota partes de X, es decir la topología discreta, así pues tenemos que $U_T(X) \cong Top(D(1), X)$, para X un espacio topológico y donde 1 es un conjunto unipuntual y en Top el objeto $D(1)$ coincide con el objeto inicial, lo cual no sucede en la categoría Ab. El funtor olvido $U_A : Ab \to Set$ tiene como adjunto a izquierda el funtor abeliano libre

$$Al : Set \to Ab$$

así pues tenemos

$$U_A(B) \cong Ab(Al(1), B) = Ab(\mathbb{Z}, B)$$

por tanto en Ab, tomamos $*=\mathbb{Z}$, luego por el ítem 1 del Ejemplo 4.7 tenemos que la homología no es reducida, en el caso que R sea un cuerpo. Por otra parte, pensando en el cálculo de los grupos de homotopía, tomando $*=\mathbb{Z}$, se presenta una dificultad en la construcción de las esferas por suspensión, puesto que se requiere de un morfismo único $S^{n-1} \to *$ para generar S^n, partiendo de $S^0 = * + * = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, donde $+$ denota la suma categórica, así pues estudiamos actualmente la categoría $Ab_{\mathbb{Z}}$, en donde $\mathbb{Z} \stackrel{1_{\mathbb{Z}}}{\to} \mathbb{Z}$ es el objeto final, el cual es diferente al objeto inicial el cual es el morfismo $0 \to \mathbb{Z}$.

8.2. Exactitud y escisión

Lema 8.3. *Sea X un grupo abeliano y A un subgrupo de X, entonces*

1. $I(X/A) \cong I(X)/I(A)$.
2. *Si A es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, entonces $I(\iota : A \to X) = \iota : I(A) \to I(X)$, donde ι es el monomorfismo inclusión.*

Demostración.

1. Consideremos la aplicación $h : (X \otimes R)/(A \otimes R) \to (X/A) \otimes R$, donde $h(x \otimes r + (A \otimes R)) = (x + A) \otimes r$. Veamos que h está bien definida. Supongamos $x_1 \otimes r_1 + (A \otimes R) = x_2 \otimes r_2 + (A \otimes R)$, entonces tenemos los siguientes casos:
   a) Si $r_1 = r_2$, entonces $x_1 - x_2 \in A$, por tanto $(x_1 + A) \otimes r_1 = (x_2 + A) \otimes r_2$.
   b) Si $r_1 \neq r_2$, entonces $x_1, x_2 \in A$, por tanto $(x_1 + A) \otimes r_1 = 0 = (x_2 + A) \otimes r_2$.

Por otro lado, consideremos la aplicación $k : (X/A) \times R \to (X \otimes R)/(A \otimes R)$, donde $k(x+A, r) = x \otimes r + (A \otimes R)$. Veamos que k está bien definida. Supongamos $(x_1 + A, r_1) = (x_2 + A, r_2)$, entonces tenemos que $x_1 + A = x_2 + A$ y $r_1 = r_2$, por tanto $(x_1 - x_2) \otimes r_1 + (A \otimes R) = 0 + (A \otimes R)$, es decir $x_1 \otimes r_1 + (A \otimes R) = x_2 \otimes r_2 + (A \otimes R)$.La función k es una función bilineal. En efecto, $k((x_1 + A) + (x_2 + A), r) = k((x_1 + x_2) + A, r) = (x_1 + x_2) \otimes r + (A \otimes R) = (x_1 \otimes r + x_2 \otimes r) + (A \otimes R) = (x_1 \otimes r + (A \otimes R)) + (x_2 \otimes r + (A \otimes R)) = k((x_1 + A), r) + k((x_2 + A), r)$ y $k(x + A, r_1 + r_2) = x \otimes (r_1 + r_2) + (A \otimes R) = (x \otimes r_1 + x \otimes r_2) + (A \otimes R) = (x \otimes r_1 + (A \otimes R)) + (x \otimes r_2 + (A \otimes R)) = k(x + A, r_1) + k(x + A, r_2)$.

Así pues, existe un homomorfismo de grupos abelianos $\overline{k} : (X/A) \otimes R \to (X \otimes R)/(A \otimes R)$, tal que $\overline{k}((x + A) \otimes r) = k(x + A, r)$. Ahora

$$\overline{k}h(x \otimes r + (A \otimes R)) = \overline{k}((x + A) \otimes r) = x \otimes r + (A \otimes R)$$

y

$$h\overline{k}((x + A) \otimes r) = h(x \otimes r + (A \otimes R)) = (x + A) \otimes r.$$

Por lo tanto $\overline{k}$ es un isomorfismo, es decir $(X/A) \otimes R \cong (X \otimes R)/(A \otimes R)$. Entonces tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} I(X)/I(A) = (X \oplus (X \otimes R))\,/\,(A \oplus (A \otimes R)) &\cong (X/A) \oplus ((X \otimes R)/(A \otimes R)) \\ &\cong (X/A) \oplus ((X/A) \otimes R) = I(X/A). \end{aligned}$$

2. Puesto que la inclusión $\iota : A \to X$ es monomorfismo, entonces la sucesión $0 \to A \xrightarrow{\iota} X$ es exacta, ahora puesto que A es inyectivo, entonces existe un homomorfismo de grupos abelianos $h : X \to A$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "1_A"'] & X \arrow[dl, "h"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Así pues $\iota : A \to X$ es una sección, por lo tanto $\iota \oplus (\iota \otimes 1_R)$ es una sección, luego toda sección es monomorfismo, entonces $\iota \oplus (\iota \otimes 1_R)$ es un monomorfismo, más aún $I(\iota)(a, b \otimes 1_R) = [\iota \oplus (\iota \otimes 1_R)]\,(a, b \otimes r) = (a, b \otimes r)$, para $(a, b \otimes r) \in A \oplus (A \otimes R)$, por tanto $I(\iota) : A \oplus (A \otimes R) \to X \oplus (X \otimes R)$ es el monomorfismo inclusión. ☑

Teorema 8.4. *Sea (X, A) un objeto en Ab_{inj}, entonces la sucesión exacta*

$$0 \to A \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{\pi} X/A \to 0$$

se descompone, donde ι es el monomorfismo inclusión y π la proyección canónica.

Demostración. Sea (X, A) un objeto en Ab_{inj}, entonces tenemos los siguientes casos:

1. Si $A = 0$, entonces tenemos la sucesión $0 \to 0 \to X \xrightarrow{1_X} X \to 0$, la cual es exacta y se descompone.

2. Si $A = X$, es decir $(X, A) = (A, A) = 1_A$, entonces tenemos la siguiente sucesión $0 \to A \stackrel{1_A}{\to} A \to 0 \to 0$, la cual es exacta y se descompone.

3. Si $A \neq 0$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, entonces la sucesión exacta $0 \to A \stackrel{\iota}{\to} X \stackrel{\pi}{\to} X/A \to 0$ se descompone (ver [11, Prop. 3.13, pág. 197]).

4. Si $(X, A) = I^n(X', A')$, para algún $n \geq 0$, donde A' es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo y X' un grupo abeliano que contiene a A', entonces tenemos por el ítem 3 que la sucesión exacta $0 \to A' \stackrel{\iota}{\to} X' \stackrel{\pi}{\to} X'/A' \to 0$ se descompone, entonces existe un homomorfismo $z : X' \to A'$ tal que $z\iota = 1_{A'}$. Luego por el ítem 2 del lema 8.3, puesto que A es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, tenemos que $I(\iota : A' \to X') = \iota : I(A') \to I(X')$, entonces $I^n(\iota : A' \to X') = \iota : I^n(A') \to I^n(X')$, por tanto $I^n(z)\iota = I^n(z)I^n(\iota) = 1_{I^n(X)}$. Así pues tenemos que la sucesión exacta $0 \to I^n(A') \stackrel{\iota}{\to} I^n(X') \stackrel{\pi}{\to} I^n(X')/I^n(A') \to 0$ se descompone, es decir que la sucesión exacta $0 \to A \stackrel{\iota}{\to} X \stackrel{\pi}{\to} X/A \to 0$ se descompone. ☑

Observación 8.5. Sea $0 \to A \stackrel{i}{\to} B \stackrel{j}{\to} C \to 0$ una sucesión exacta en $Ch(Ab)$. Entonces un conjunto de homomorfismos $\partial_{n*} : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ es definido en [1, pág. 5] como sigue: Los elementos de $H_n(C)$ tienen la forma $c_n + \partial C_{n+1}$, donde $\partial c_n = 0$. Puesto que j_n es un epimorfismo, existe un $b \in B_n$ tal que $j_n(b_n) = c_n$. Así pues $j_{n-1}(\partial b_n) = \partial(j_n b_n) = \partial c_n = 0$ y por la exactitud en la n-ésima posición existe un $a_{n-1} \in A_{n-1}$, para el cual $i_{n-1}(a_{n-1}) = \partial b_n$. Por tanto definimos $\partial_{n*}(c_n + \partial C_{n+1}) = a_{n-1} + \partial A_n$. El símbolo ∂_* será escrito en lugar de ∂_{n*}

Teniendo en cuenta este conjunto de homomorfismos $\partial_{n*} : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$, en [1] demuestran los dos siguientes teoremas (8.6 y 8.7), los cuales son de importancia en este trabajo, puesto que definen la transformación natural a utilizar para la teoría de homología general que estamos construyendo en la categoría Ab.

Teorema 8.6. *Si $0 \to A \stackrel{i}{\to} B \stackrel{j}{\to} C \to 0$ es una sucesión exacta en $Ch(Ab)$, entonces la sucesión*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \longrightarrow \cdots$$

es exacta en Ab.

Teorema 8.7. *En el diagrama de complejos de cadenas*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

sean las sucesiones exactas y cada diagrama conmutativo, entonces el siguiente diagrama *en Ab*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(B) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "g_*"] & H_n(C) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "h_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(B) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(A') \arrow[r, "i'_*"] & H_n(B') \arrow[r, "j'_*"] & H_n(C') \arrow[r, "\partial_*"] & H_{n-1}(A') \arrow[r, "i'_*"] & H_{n-1}(B') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Observación 8.8. Sea (X, A) un objeto en Ab_{inj}. Entonces, por el Teorema 8.4, la sucesión exacta $0 \to A \overset{\iota}{\to} X \overset{\pi}{\to} X/A \to 0$ se descompone. Luego, por la Proposición 6.9, la sucesión $0 \to C^R(A) \overset{C^R(\iota)}{\longrightarrow} C^R(X) \overset{C^R(\pi)}{\longrightarrow} C^R(X/A) \to 0$ es exacta y se descompone en Ab y, por el Corolario 3.8, la sucesión

$$0 \to S_{\Psi^R}(C^R(A))_n \overset{S_{\Psi^R}(C^R(\iota))_n}{\longrightarrow} S_{\Psi^R}(C^R(X))_n \overset{S_{\Psi^R}(C^R(\pi))_n}{\longrightarrow} S_{\Psi^R}(C^R(X/A))_n \to 0$$

es exacta para todo $n \geq 0$. Así pues, al aplicar el funtor M obtenemos la sucesión exacta en $Ch^+(Ab)$

$$0 \to MS_{\Psi^R}(C^R(A)) \overset{MS_{\Psi^R}(C^R(\iota))}{\longrightarrow} MS_{\Psi^R}(C^R(X)) \overset{MS_{\Psi^R}(C^R(\pi))}{\longrightarrow} MS_{\Psi^R}(C^R(X/A)) \to 0$$

entonces por la Observación 8.5 se tiene un conjunto de homomorfismos $\partial_* : \mathbf{H}_n(X, A) \to \mathbf{H}_{n-1}(A, 0)$.

Veamos que efectivamente $\partial_* : \mathbf{H}_n(X, A) \to \mathbf{H}_{n-1}(A)$ es transformación natural.

Proposición 8.9. *Sea $(F, f) : (X, A) \to (Y, B)$ un morfismo en Ab_{inj}, entonces el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}_n(X, A) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "(F,f)^*"'] & \mathbf{H}_{n-1}(A) \arrow[d, "f^*"] \\
\mathbf{H}_n(Y, B) \arrow[r, "\partial_*"] & \mathbf{H}_{n-1}(B)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Puesto que (F, f) es un morfismo en Ab_{inj}, entonces tenemos en Ab el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "F"] & X/A \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{F}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\iota'"] & Y \arrow[r, "\pi'"] & Y/B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

en el cual las flechas horizontales forman sucesiones exactas. Aplicando el funtor $MS_{\Psi^R}C^R$ obtenemos en $Ch^+(Ab)$ el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & MS_{\Psi^R}C^R(A) \arrow[r, "MS_{\Psi^R}C^R(\iota)"] \arrow[d, "MS_{\Psi^R}C^R(f)"] & MS_{\Psi^R}C^R(X) \arrow[r, "MS_{\Psi^R}C^R(\pi)"] \arrow[d, "MS_{\Psi^R}C^R(F)"] & MS_{\Psi^R}C^R(X/A) \arrow[r] \arrow[d, "MS_{\Psi^R}C^R(\widehat{F})"] & 0 \\
0 \arrow[r] & MS_{\Psi^R}C^R(B) \arrow[r, "MS_{\Psi^R}C^R(\iota')"'] & MS_{\Psi^R}C^R(Y) \arrow[r, "MS_{\Psi^R}C^R(\pi')"'] & MS_{\Psi^R}C^R(Y/B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde las flechas horizontales forman sucesiones exactas (Obs. 8.8), y por el Teorema 8.7 el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{H}_n(A) \arrow[r, "\iota^*"] \arrow[d, "f^*"] & \mathbf{H}_n(X) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, "F^*"] & \mathbf{H}_n(X,A) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\widehat{F}^*"] & \mathbf{H}_{n-1}(A) \arrow[r, "\iota^*"] \arrow[d, "f^*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbf{H}_n(B) \arrow[r, "\iota'^*"] & \mathbf{H}_n(Y) \arrow[r, "\pi'^*"] & \mathbf{H}_n(Y,B) \arrow[r, "\partial_*"] & \mathbf{H}_{n-1}(B) \arrow[r, "\iota'^*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

☑

A continuación mostramos que el funtor $\mathbf{H} : Ab_{inj} \to Ch^+(Ab)$ satisface el axioma de exactitud y posteriormente el axioma de escisión.

Teorema 8.10. *Considere (X, A) un objeto en Ab_{inj} y $E(X, A)$, definido en 7.11, entonces*

$$\cdots \to \mathbf{H}_n(A) \xrightarrow{i^*} \mathbf{H}_n(X) \xrightarrow{j^*} \mathbf{H}_n(X,A) \xrightarrow{\partial_*} \mathbf{H}_{n-1}(A) \to \cdots$$

es una sucesión exacta.

Demostración. Para (X, A) tenemos que $E(X, A)$ es la sucesión $(A, 0) \xrightarrow{i} (X, 0) \xrightarrow{j} (X, A)$, donde i es el homomorfismo inclusión de A a X y j es el homomorfismo identidad del objeto X. Así pues $i^* = H_{\Psi^R}(C^R(\iota))_n$ y $j^* = H_{\Psi^R}(C^R(\pi))_n$, para los morfismos ι y π del Teorema 8.4. Luego por la Observación 8.8 tenemos que la sucesión

$$0 \to MS_{\Psi^R}(C^R(A)) \xrightarrow{MS_{\Psi^R}(C^R(\iota))} MS_{\Psi^R}(C^R(X)) \xrightarrow{MS_{\Psi^R}(C^R(\pi))} MS_{\Psi^R}(C^R(X/A)) \to 0$$

es exacta en $Ch^+(Ab)$, por tanto, aplicando el Teorema 8.6, obtenemos que la sucesión

$$\cdots \to \mathbf{H}_n(A) \xrightarrow{i^*} \mathbf{H}_n(X) \xrightarrow{j^*} \mathbf{H}_n(X,A) \xrightarrow{\partial_*} \mathbf{H}_{n-1}(A) \to \cdots$$

es exacta en Ab. ☑

Teorema 8.11. *Si $(E, e) : (X, A) \to (Y, B)$ es una escisión categórica en Ab_{inj}, entonces* $\mathbf{H}(E, e)$ es un isomorfismo.

Demostración. Por definición tenemos que $\mathbf{H}(E, e) = H_{\Psi^R} C^R(\widehat{E})$ donde $\widehat{E} : X/A \to Y/B$ es dado por $\widehat{E}(x + A) = E(x) + B$, por otro lado por la Definición 7.10 tenemos el siguiente diagrama cocartesiano

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "{(X,A)}"] \arrow[d, "e"'] & X \arrow[d, "E"] \\
B \arrow[r, "{(Y,B)}"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Ahora, por la Proposición 7.9 tenemos que $X/A \cong Y/B$, donde el isomorfismo $h : X/A \to Y/B$ es definido por medio del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "(X,A)"] \arrow[d, "0"'] & X \arrow[d, "\pi"] \arrow[ddr, "\pi' E"] & \\
0 \arrow[r, "0"'] \arrow[drr, "0"'] & X/A \arrow[dr, "h"] & \\
 & & Y/B
\end{tikzcd}$$

es decir $h(x + A) = h\pi(x) = \pi' E(x) = E(x) + B$, entonces $h = \widehat{E}$. Por lo tanto $\widehat{E}$ es un isomorfismo, entonces $H_{\Psi^R} C^R(\widehat{E})$ es un isomorfismo, es decir $\mathbf{H}(E, e)$ es un isomorfismo. ☑

8.3. Invarianza homotópica del funtor H

El objeto modelo Ψ^R genera un sistema homotópico $\eta = (I, \epsilon^0, \epsilon^1, \mu)$ por medio de la Definición 3.4, utilizando como bifuntor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ el producto tensorial de $\mathbb{Z}$-módulos, entonces $I(X) = X \oplus (X \otimes R)$, $\epsilon^0_X(x) = (x, 0)$, $\epsilon^1_X(x) = (x, -x \otimes 1_R)$ y $\mu_X(x, y \otimes r) = x$) y este sistema homotópico define la relación de homotopía en Ab descrita en [13] (Teorema 4.5). Así pues (Ab, η) define una relación de homotopía en Ab_{inj} por medio de la Definición 7.6, la cual cumple el siguiente teorema.

Teorema 8.12. *Sean* $(F, f), (G, g) : (X, A) \to (Y, B)$ *morfismos en la categoría* Ab_{inj}*, tales que* $(F, f) \overset{\eta}{\simeq} (G, g)$*, entonces* $\mathbf{H}(F, f) = \mathbf{H}(G, g)$.

Demostración. Por hipótesis tenemos que $(F, f) \overset{\eta}{\simeq} (G, g)$, entonces existe un morfismo admisible $(T, t) : I(X, A) \to (Y, B)$ en Ab_{inj} tal que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\epsilon^0_X"'] \arrow[dr, "F"] & \\
I(X) \arrow[r, "T"] & Y \\
X \arrow[u, "\epsilon^1_X"] \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\epsilon^0_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\
I(A) \arrow[r, "t"] & B \\
A \arrow[u, "\epsilon^1_A"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X/A \arrow[d, "\widehat{\epsilon^0_X}"'] \arrow[dr, "\widehat{F}"] & \\
I(X)/I(A) \arrow[r, "\widehat{T}"] & Y/B \\
X/A \arrow[u, "\widehat{\epsilon^1_X}"] \arrow[ur, "\widehat{G}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora, de la teoría de grupos tenemos que el homomorfismo $\lambda : X_1/A_1 \oplus X_2/A_2 \to (X_1 \oplus X_2)/(A_1 \oplus A_2)$ dado por $\lambda(x_1+A_1, x_2+A_2) = (x_1, x_2)+(A_1 \oplus A_2)$ es un isomorfismo, donde A_i es un subgrupo del grupo abeliano X_i para $i = 1, 2$. Por tanto

$$\begin{array}{rcl}\lambda : (X/A) \oplus (X \otimes R)/(A \otimes R) & \to & X \oplus (X \otimes R)/A \oplus (A \otimes R) \\ (x_1 + A, (x_2 \otimes r) + (A \otimes R)) & \mapsto & (x_1, x_2 \otimes r) + A \oplus (A \otimes R)\end{array}$$

es un isomorfismo. En la prueba del ítem 1 del lema 8.3 se mostró que el homomorfismo $\overline{k} : (X/A) \otimes R \to (X \otimes R)/(A \otimes R)$ es un isomorfismo, por lo tanto

$$\lambda(1_{X/A} \oplus \overline{k}) : (X/A) \oplus ((X/A) \otimes R)) \to (X \oplus (X \otimes R)) \,/\, (A \oplus (A \otimes R))$$

es un isomorfismo. Ahora nótese lo siguiente

1.
$$\begin{array}{rcl}\left[\lambda(1_{X/A} \oplus \overline{k})\epsilon^0_{X/A}\right](x_1 + A) & = & \left[\lambda(1_{X/A} \oplus \overline{k})\right](x_1 + A, 0) \\ & = & \lambda(x_1 + A, 0 + (A \otimes R)) \\ & = & (x_1, 0) + (A \oplus (A \otimes R)) \\ & = & \widehat{\epsilon^0_X}(x_1 + A).\end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcl}\left[\lambda(1_{X/A} \oplus \overline{k})\epsilon^1_{X/A}\right](x_1 + A) & = & \left[\lambda(1_{X/A} \oplus \overline{k})\right](x_1 + A, -x_1 + A \otimes 1_R) \\ & = & \lambda(x_1 + A, -x_1 \otimes 1_R + (A \otimes R)) \\ & = & (x_1, -x_1 \otimes 1_R) + (A \oplus (A \otimes R)) \\ & = & \widehat{\epsilon^1_X}(x_1 + A).\end{array}$$

Por lo tanto el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & X/A \arrow[dl, "\epsilon^0_{X/A}"'] \arrow[d, "\widehat{\epsilon^0_X}"'] \arrow[dr, "\widehat{F}"] & \\
I(X/A) \arrow[r, "\varphi"] & I(X)/I(A) \arrow[r, "\widehat{T}"] & Y/B \\
 & X/A \arrow[ul, "\epsilon^1_{X/A}"] \arrow[u, "\widehat{\epsilon^1_X}"] \arrow[ur, "\widehat{G}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\varphi = \lambda(1_{X/A} \oplus \overline{k})$. Entonces $\widehat{T}\varphi : \widehat{F} \overset{\eta_{\Psi^R}}{\simeq} \widehat{G}$, luego puesto que $\left(Ab, \Psi^R, \overset{\eta_{\Psi^R}}{\simeq}, H_{\Psi^R}C^R\right)$ es un Esqueleto Homoto-Homológico (Teorema 6.10) entonces $H_{\Psi^R}C^R(\widehat{F}) = H_{\Psi^R}C^R(\widehat{G})$, por lo tanto $\mathbf{H}_n(F, f) = \mathbf{H}_n(G, g)$, para todo $n \geq 0$, es decir $\mathbf{H}(F, f) = \mathbf{H}(G, g)$. ☑

Agradecimientos: Quiero expresar mis más sinceros agradecimientos al profesor Roberto Ruiz Salguero, director de mi tesis doctoral de donde surge este artículo, por sus grandes enseñanzas, dedicación y orientación, los cuales han sido fundamentales en la formación para mi vida profesional. A los evaluadores de este artículo que con sus observaciones y sugerencias contribuyeron al mejoramiento del contenido y presentación inicial del documento. Al programa de Doctorado en Ciencias Matemáticas y a la Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad del Valle por su financiación por medio de sus ayudas *Asistencias de Docencia* y *Apoyo a Estudiantes de Doctorado* respectivamente, las cuales facilitaron el tiempo y la culminación para esta investigación. Finalmente, agradezco a los profesores externos a la Universidad del Valle que con sus sugerencias y aportes ayudaron a la elaboración de este trabajo.

Referencias

[1] Artin E. and Braun H., *Introduction to Algebraic Topology*, Merrill Publishing Company, 1st ed., 1969.

[2] Bauer F.W. and Dugundji J., "Categorical homotopy and fibrations", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 140 (1969), 239–256. doi:10.2307/1995135.

[3] Eilenberg S. and Steenrod N.E., "Axiomatic Approach to Homology Theory", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.*, 31 (1945), No. 4, 117–120. doi: 10.1073/pnas.31.4.117.

[4] Etingof P., et. al., *Tensor Categories*, American Mathematical Soc, vol. 205, Providence, 2016.

[5] Gabriel P. and Zisman M., *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*, Springer Science & Business Media, vol. 35, New York, 2012.

[6] Goerss P.G. and Jardine J.F., *Simplicial Homotopy Theory*, Springer Science & Business Media, 2009.

[7] Gaitan R., "Esqueleto Homoto-Homológico En La Categoría De Los Grupos Abelianos", Tesis (Ph.D.), Universidad del Valle, 2018, 112p.

[8] Hernández L.J., "Un ejemplo de teoría de homotopía en los grupos abelianos", *Collect. Math.*, 33, 161-176, 1982.

[9] Hatcher A., *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 1st ed., 2002.

[10] Hovey M., *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, 1999.

[11] Hungerford T.W., *Algebra*, Springer-Verlag, 1st ed., vol. 73, New York, 1974.

[12] Hu S.T., *Homology Theory: a first course in Algebraic Topology*, Holden-Day, 1st ed., 1966.

[13] Hernández L.J., "Un Ejemplo de Teoría de Homotopía en los Grupos Abelianos", Tesis (Ph.D.), Universidad de Zaragoza, España, 1980, 232 p.

[14] Kan D.M., "Abstract Homotopy. I", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.*, 41 (1955), No. 12, 1092–1096.

[15] Kan D.M., "Abstract Homotopy. II", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.*, 42 (1956), No. 5, 225–228. doi:10.1073/pnas.42.5.255.

[16] Leinster T., *Basic Category Theory*, Cambridge University Press, 1st ed., vol. 143, 2014.

[17] MacLane S., *Homology*, Classics in mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[18] May P.J., Simplicial Objects in Algebraic Topology, University of Chicago Press, vol. 114, Chicago, 1992.

[19] Porter T. and Kamps K.H., *Abstract Homotopy and Simple Homotopy Theory*, World Scientific, 1st ed., Singapore, 1997.

[20] Ruiz R., "Overview on models in Homotopical Algebra", *Rev. Acad. Colombiana Cienc. Exact. Fís. Natur.*, 28 (2004), No. 106, 100–121.

[21] Ruiz R., "Change of Models in Algebraic Topology", Thesis (Ph.D), Temple University, Pennsylvania, 1977, 311 p.

[22] Ruíz R., "Introducción a la teoría de homología general", https://n9.cl/hdk6, [citado 4 de agosto 2021].

[23] Vick J.W., *Homology Theory: an introduction to algebraic topology*, Springer-Verlag New York, 2nd ed., vol. 145, New York, 1994.