Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
ISSN: 1665-2436
ISSN: 2007-6819
relime@clame.org.mx
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Organismo Internacional

Espaces de travail géométrique en formation initiale de professeurs du premier degré en France et en Grèce lors d'une démarche de preuve

Nikolantonakis, Konstantinos; Vivier, Laurent

Espaces de travail géométrique en formation initiale de professeurs du premier degré en France et en Grèce lors d'une démarche de preuve

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 17, 4-1, 2014

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Organismo Internacional

Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33553644005

DOI: https://doi.org/10.12802/relime.13.1745

Espaces de travail géométrique en formation initiale de professeurs du premier degré en France et en Grèce lors d'une démarche de preuve

Geometrical Working Spaces in teachers training of the first grade in France and Greece during a test

Konstantinos Nikolantonakis
Université de la Macédoine Ouest, Grecia
nikolantonakis@noesis.edu.gr

DOI: https://doi.org/10.12802/relime.13.1745
Redalyc: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33553644005

Laurent Vivier
Université Denis Diderot – Paris 7, Laboratoire de Didactique André Revuz, Francia
laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

Recepción: 07 Enero 2013
Aprobación: 15 Diciembre 2013

Resumen:

En este trabajo, estudiamos los Espacios de Trabajo Geométrico personales e idóneos en Francia y Grecia para maestros en formación de educación primaria. La disponibilidad del teorema sobre la igualdad de los triángulos en los ETG idóneos permite señalar diferentes ETG personales con una marcada diferencia entre las dos poblaciones, francesa y griega. Un estudio estadístico de la población griega precisa el contexto geométrico idóneo en Grecia.
Palabras clave: Espacio de Trabajo Geométrico, Examen, Igualdad de triángulos, Formación de profesores.

Abstract:

In this paper, we study personal and adequate Geometrical Working Spaces in France and Greece for the future primary school teachers. The availability of the theorem on the equality of triangles in the suitable GWS's makes possible to highlight different personal GWS's with a significant difference between both French and Greek populations. A statistical study of the Greek population shows the suitable geometrical context in Greece.
Keywords: Geometrical Working Space, Test, Triangle equality, Teacher training.

Resumo:

Neste trabalho, estudamos os Espaços de Trabalho Geométrico pessoais e adequadas em França e na Grécia para futuro ensino fundamental os professores. A disponibilidade de o teorema sobre a igualdade de triângulos, a ETG adequado permite a você ver diferentes ETG pessoais com uma diferença acentuada entre o francês e populações gregas. Um estudo estatístico da população grega geométrica especifica o contexto ideal para a Grécia.
Palavras-chave: Espaços de Trabalho Geométrico, Prova, Igualdade de triângulos, Formação de professores.

Résumé:

Dans ce travail, nous étudions les Espaces de Travail Géométrique personnels et idoines en France et en Grèce pour des futurs enseignants du premier degré. La disponibilité du théorème sur l'égalité des triangles dans les ETG idoines permet de relever différents ETG personnels avec une différence marquée entre les deux populations, française et grecque. Une étude statistique de la population grecque précise le contexte géométrique idoine en Grèce.
Mots clés: Espace de Travail Géométrique, Preuve, Égalité des triangles, Formation des enseignants.

1. Introduction

L'étude vise à examiner les Espaces de Travail Géométrique (ETG) idoines et personnels en France et en Grèce (Kuzniak, 2006, 2010 ; Houdement et Kuzniak, 2006) pour des futurs enseignants du premier degré (grades 1 à 5 en France et 1 à 6 en Grèce). On s'appuie sur les productions écrites en temps limité de professeurs en formation initiale durant l'année universitaire 2008-2009 (26 étudiants français et 100 grecs). La partie numérique du test a déjà été analysée dans (Nikolantonakis & Vivier, 2009) et nous étudions ici la partie géométrique, en nous focalisant sur quatre exercices qui s'appuient sur une configuration simple du triangle. Comme le montre l'analyse a priori, de nombreuses et différentes démonstrations sont possibles ; elles constituent des indicateurs pour repérer les ETG personnels et, à travers eux, les ETG idoines.

De fait, les étudiants-professeurs français montrent une pluralité de procédures, y compris des références aux transformations géométriques, contrairement à leurs homologues grecs qui, eux, utilisent systématiquement les cas d'égalité des triangles. Ces ETG personnels différents reflètent des ETG idoines différents. Plus particulièrement, comme cela avait déjà été évoqué dans (Kuzniak & Vivier, 2009), l'ETG grec est fortement influencé par une tradition euclidienne [1] .

Après une présentation rapide du contexte et des ETG idoines français et grec, nous proposons une analyse a priori des exercices du test qui constitue une grille pour l'analyse des productions des deux populations grecque et française. Nous l'exposons en deux temps : d'abord une étude statistique pour la population grecque que nous comparons ensuite avec la population française afin de mettre en relief les différences entre ETG idoines. Le cadre théorique de l'étude est explicité en introduction de ce volume.

2. Contexte de l'étude

2.1. Deux systèmes de formation différents

En Grèce, dès l'entrée à l'université, sur concours, les étudiants se destinant au professorat du premier degré doivent faire le choix d'une université pédagogique où ils préparent, en quatre ans, un diplôme pour devenir professeur. En France, avant la réforme dite de la *masterisation* [2], pendant les trois premières années universitaires, les étudiants préparent une licence de leur choix. C'est seulement ensuite qu'ils préparent un concours spécifique pour l'enseignement primaire. Après obtention de ce concours ils sont, après validation d'une année de stage et de formation dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres (IUFM), titulaires d'un poste d'enseignement du premier degré.

On relève donc une année universitaire de plus en France, mais en Grèce les quatre années de formation sont totalement attribuées à l'enseignement primaire contre seulement deux en France.

2.2. Contexte de l'étude

Les étudiants grecs ont passé, à l'issue du deuxième semestre de l'année universitaire 2008-2009, un examen de 3 heures dont la géométrie constitue environ la moitié des exercices. Dans cet article, nous analysons 100 de ces productions grecques, prises au hasard. Il s'agit donc de l'examen qui sanctionne le deuxième semestre. Nous faisons l'hypothèse d'un bon investissement des étudiants grecs dans ce test.

Le test passé par les 26 étudiants français est constitué d'une partie de l'examen grec du premier semestre à laquelle sont ajoutés des items de géométrie qui sont proposés à l'examen grec du second semestre. Les étudiants français ont eu 3 heures pour effectuer le test. Ce dernier s'est déroulé en fin de formation, à deux semaines des épreuves du concours. Il s'agit d'un ultime entraînement au concours et nous faisons également l'hypothèse d'un bon investissement des étudiants français dans ce test.

Le test a donc été élaboré pour les étudiants grecs puis traduit pour les étudiants français. Cela crée donc une dissymétrie puisque si l'on peut penser que les exercices sont en adéquation avec les ETG idoines grecs, il n'en n'est pas forcément de même du côté français.

2.3. Des ETG idoines différents

Pour la géométrie, les contextes de formation sont très similaires, à l'exception de deux points importants : en Grèce, une attention particulière est portée aux cas d'égalité des triangles et aux triangles semblables, dès la fin du *gymnasio*, grade 9, et tout au long de la scolarité, y compris en formation des enseignants. En revanche, les étudiants français de l'étude ont eu peu de cours sur les triangles isométriques en classe de seconde [3], grade 10, et aucun à l'IUFM ; les triangles semblables ne sont essentiellement traités qu'à travers le théorème de Thalès. Ces notions semblent donc contenues dans l'ETG idoine grec mais pas dans l'ETG idoine français.

En France, si les transformations sont récemment délaissées au secondaire [4], les symétries axiale et centrale restent des objets importants de l'enseignement des mathématiques, avec une reprise à l'IUFM, alors qu'en Grèce, ces deux types de transformations sont à peine mentionnés dans le secondaire. Ces notions semblent donc contenues dans l'ETG idoine français mais pas dans l'ETG idoine grec.

Ainsi, dans les cours dispensés en formation des futurs enseignants sur l'égalité des triangles et les transformations géométriques, les deux systèmes montrent-ils des traditions différentes, ce qui oriente nécessairement les énoncés et les stratégies de résolution. On peut raisonnablement penser que, le cas échéant, un étudiant grec préférera utiliser le théorème sur l'égalité des triangles alors qu'un étudiant français s'orientera plutôt vers l'utilisation d'une transformation. Nous verrons que ce n'est pas tout à fait le cas pour les étudiants français car les configurations de base comme le parallélogramme constituent aussi des outils importants de la géométrie ; il n'y a pas d'équivalent français au théorème sur l'égalité des triangles utilisé en Grèce.

Ces différences reflètent des ETG idoines différents. Les exercices de l'étude sont donc a priori proches des ETG idoines grecs et notamment de l'ETG idoine sur l'égalité des triangles pour les exercices 3 et 4. Nous précisons cela à la section suivante ainsi que la *distance* de ces énoncés à l'ETG idoine français.

Une précision est également à apporter à propos du théorème sur l'égalité des triangles. Lors d'observations en février 2009 dans des classes du secondaire grec (*gymnasio et lykeio*) ainsi qu'en première année de formation universitaire des futurs enseignants du premier degré – ceux de l'étude –, il est très vite apparu une habitude sur l'utilisation des cas d'égalité des triangles : qu'il soit demandé par l'enseignant ou par choix de l'élève, on note une séquentialisation automatique des trois pas du théorème en numérotant trois lignes pour indiquer les trois vérifications à faire sur les angles et longueurs, toujours dans le même ordre pour chacun des trois cas d'égalité avec les codages Π-Π-Π, Π-Γ-Π et Γ-Π-Γ (Π pour côté et Γ pour *angle*). Nous estimons que cela fait partie de l'ETG idoine sur les triangles égaux.

3. Le test, analyse a priori

Nous proposons dans cette section une analyse a priori de quatre exercices soumis aux deux populations en lien avec les ETG idoines des deux pays : même ETG idoine pour les exercices 2 et 5, ETG idoines très différents pour l'exercice 3 et faussement proches pour l'exercice 4. Nous donnons pour chaque exercice les indicateurs retenus pour l'étude statistique avec, pour chaque question, les deux indicateurs généraux suivants :

NR : pas de réponse – l'exercice n'est pas abordé ou à peine (i.e. pas de travail).

OK : bonne réponse – la solution est trouvée, sans erreur de raisonnement mais avec possibilité d'implicites.

Autres : pour des procédures de résolution marginales.

3.1. L'exercice 2, un énoncé commun aux ETG idoines

Soit le rectangle ABCD de 5 m par 18 m de la figure ci-contre.

Trouver la position du point E sur [BC], tel que l'aire de ADCE soit le double de l'aire de ABE.

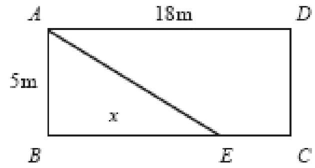


FIGURE 1.

Il s'agit d'un type d'exercice classique dans les manuels scolaires, en France comme en Grèce. On en trouve de nombreuses variantes au collège, plutôt dans les chapitres d'algèbre. Il s'agit d'un énoncé proposé dans les ETG idoines français et grecs, on ne s'attend donc pas à des différences importantes entre les deux populations.

Il faut également mentionner que la proximité de cet énoncé aux ETG idoines français et grec est renforcée par la présence du « x » sur la figure. La visualisation du *x* doit orienter les procédures vers l'algèbre et plus spécifiquement vers une mise en équation, identique dans les deux pays.

La procédure majoritaire attendue : $(ABE)=5x/2$; $(ADCE)=18\times5-5x/2$ d'où l'équation $90-5x/2=5x$ que l'on résout pour trouver $x=12$ (en mètre). Il s'agit d'une procédure avec un changement de cadre (géométrique / grandeur => algébrique). Il n'y a de fait pas de travail géométrique à proprement parler si ce n'est l'application de la formule de l'aire d'un rectangle et d'un triangle rectangle. Il est à mentionner toutefois qu'une décomposition méréologique [5] de la figure est nécessaire afin d'obtenir une équation. Mais cette décomposition est déjà indiquée et on peut supposer que cela ne posera pas de problème pour la plupart des étudiants, français comme grecs. En outre, ce type de décomposition méréologique est commune aux ETG idoines des deux pays.

Une variante de cette procédure consiste à utiliser la formule de l'aire d'un trapèze pour exprimer l'aire de ADCE : $(ADCE)=5\times(18+18-x)/2$. Il n'y a plus de décomposition méréologique en dimension 2.

Toutefois, d'autres procédures sont envisageables où l'essentiel du travail reste dans le cadre géométrique des grandeurs, sans algèbre. En complétant le rectangle ABEF, on peut découper le rectangle initial ABCD en trois aires égales par une décomposition méréologique. Le tiers de l'aire de ABCD est $1/3\times90\ m^2=30\ m^2$ et donc ABEF est un rectangle d'aire $60\ m^2$ avec un côté de 5m, donc l'autre côté mesure $60\ m^2/5\ m=12m$. Cette procédure est à rapprocher de celle envisagée dans (Kuzniak, Parzysz & Vivier, 2013) pour un problème d'aire dans un carré.

Des adaptations de cette procédure sont possibles, notamment avec une mise en équation, surtout avec la présence du x qui pousse à travailler avec l'algèbre. Ainsi, après un découpage de ABCD en trois aires égales, peut-on s'attendre à une écriture d'une équation du type « $5x = 60$ », plus facile à résoudre.

Les deux procédures ci-dessus sont nos guides pour cet exercice. Elles sont relatives à des ETG différents. Dans le premier ETG, le traitement géométrique est réduit au calcul de l'aire d'un trapèze, soit par soustraction (décomposition méréologique) soit par application de la formule d'un trapèze, et à l'utilisation de formules simples. Dans la deuxième, le traitement géométrique est plus complexe car il y a une surfigure [6] à considérer, le rectangle ABEF, et la décomposition méréologique accompagne une reformulation des données du problème. Les calculs algébriques s'en trouvent largement simplifiés.

Indicateurs spécifiques :

A/3 : partage en trois aires égales

Equ : mise en équation

3.2. L’exercice 3 : Comparaison guidée, dans l’ETG idoine grec, de deux triangles

Sur la médiane (AM) d’un triangle ABC, on considère le point S tel que MS=MA.

a. Comparer les triangles ABM et SCM.

b. Comparer les segments [AB] et [SC].

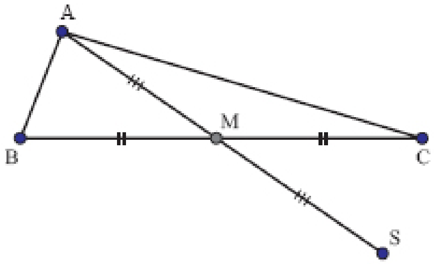


FIGURE 2
(Non donnée aux étudiants)

Il s’agit d’un exercice très classique en Grèce, mais beaucoup moins en France où l’on ne pose pas la question de la comparaison des triangles : on parle plus volontiers de leur cara ctère isométrique ou superposable, ou bien on demande de comparer leurs aires. Ainsi, les étudiants grecs vont-ils certainement avoir une réponse consensuelle en référence à l’ETG idoine sur les triangles égaux alors que les étudiants français devront tout d’abord réinterpréter la question dans un ETG idoine français afin de trouver une procédure de résolution.

Questions *a* et *b* (analyse globale). On peut identifier trois procédures principales.

- Procédure 1 : utilisation du cas d’égalité des triangles Π-Γ-Π, l’angle égal étant donné par l’égalité des angles opposés par le sommet.

- Procédure 2 : M est le milieu commun des diagonales du quadrilatère ABSC qui est donc un parallélogramme. Les propriétés du parallélogramme permettent de conclure [7] .

- Procédure 3 : M est le milieu de [BC] et de [AS], et les propriétés de la symétrie centrale de centre M permettent de conclure.

Pour cet exercice, on peut s’attendre à différentes approches pour la population française. En revanche, on peut penser que la procédure 1 sera largement majoritaire pour la population grecque, notamment à cause de la question « comparer les triangles ». Des remarques relatives à la configuration du parallélogramme sont possibles car il s’agit d’un objet d’étude au secondaire en Grèce.

On relève ainsi trois ETG qui se distinguent pour l’essentiel par le référentiel théorique : un ETG autour des triangles égaux, un ETG autour de la symétrie centrale et un ETG autour du parallélogramme. Il est toujours possible, bien que largement hors contrat en France comme en Grèce, que des étudiants se limitent à une visualisation ou un mesurage de la figure en référence au paradigme GI.

Indicateurs spécifiques (a et b, globalement) :

Egal : utilisation d’un cas d’égalité du triangle

Par : mention d’un parallélogramme

Sym : mention d’une symétrie centrale

3.3. L'exercice 4 : comparaison non guidée, dans l'ETG idoine grec, de deux triangles

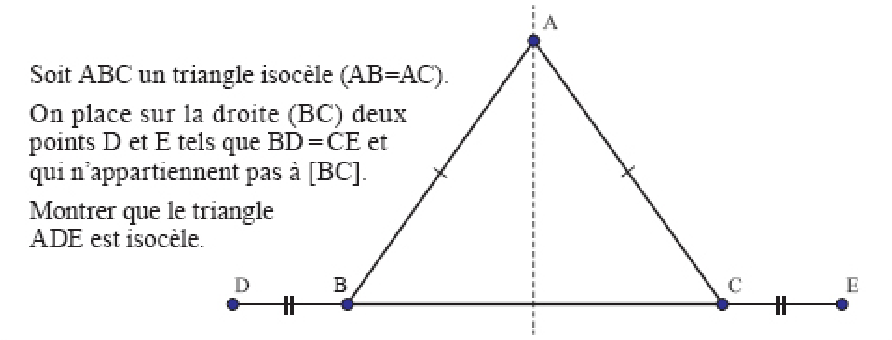


FIGURE 3
(Non donnée aux étudiants)

Il s'agit d'un exercice classique en Grèce sur la comparaison des triangles. L'énoncé est très proche d'exercices typiques de l'utilisation des cas d'égalité des triangles. De ce point de vue, peu de différences sont attendues avec l'exercice 3 pour les étudiants grecs. La difficulté essentielle est que l'énoncé ne dit pas qu'il faut comparer deux triangles.

La transformation en jeu dans cet exercice est la symétrie axiale, plus familière des étudiants – français ou grecs. On peut penser que la proportion d'étudiants invoquant une symétrie sera plus importante qu'à l'exercice précédent, surtout pour les étudiants français vu l'importance des transformations géométriques.

Cet énoncé est clairement dans l'ETG idoine grec, mais aussi dans l'ETG idoine français. Ce type d'exercice est tout à fait en adéquation avec les ETG autour de la symétrie axiale et des triangles isocèles. Est-ce pour autant un énoncé neutre ? Nous verrons que non, car selon que l'on mobilise l'ETG sur les triangles égaux, en Grèce, ou autour de la symétrie axiale, en France, le travail à effectuer est très différent et n'a pas le même niveau de difficulté.

- Procédure 1 : utilisation du cas d'égalité des triangles Π-Γ-Π. L'utilisation du théorème n'est plus simple et isolée et requiert des adaptations (Robert, 2005). L'angle égal provient de la propriété des angles d'un triangle isocèle (en B et C) via des angles supplémentaires.

- Procédure 2 : utilisation des propriétés des triangles isocèles et des médiatrices : si M désigne le milieu de [BC], on montre que (AM) est la médiatrice issue de A dans ABC puisqu'il est isocèle ; (AM) est également la médiatrice de [DE] donc D et E sont équidistants de A et ADE est isocèle de sommet A. Une variante : considérer une surfigure avec le losange ABFC.

- Procédure 3 : utilisation d'une symétrie axiale dont l'axe (AM) n'est ni donné ni tracé : D est l'image de E par la symétrie d'axe (AM donc, comme A est sa propre image, [AD] est l'image de [AE] par la symétrie d'axe (AM) et comme une symétrie conserve les distances on peut conclure que AD=AE et que ADE est isocèle.

On retrouve des ETG similaires à ceux mentionnés à l'exercice 3 avec, en plus, un ETG autour de la médiatrice et/ou de la configuration du triangle isocèle [8] .

Ce type d'exercice apparaît en France dans le secondaire en lien avec les triangles isocèles, la médiatrice et la symétrie axiale. Il s'agit donc d'un énoncé en adéquation avec les ETG idoines des deux pays. Pour autant, cet énoncé n'est pas neutre selon qu'il est résolu par un étudiant français ou grec. Un étudiant grec doit d'abord repérer des triangles égaux, des surfigures car ils ne sont ni mentionnés ni tracés, afin de pouvoir utiliser le théorème sur les triangles égaux. L'étudiant français qui utilisera une symétrie axiale doit repérer un axe de symétrie, également non tracé. Il y a donc deux surfigures à considérer ; elles sont faciles à repérer et les objets en jeu sont très présents dans les ETG idoines de chacun des deux pays. Néanmoins, l'étudiant grec dispose du théorème sur l'égalité des triangles et de la séquentialisation classique des trois pas, ce qui ne pose pas de problème majeur. Le résultat est alors une conséquence immédiate du théorème. L'étudiant français, après avoir considéré l'axe de symétrie, doit encore considérer la transformation en jeu et le travail à effectuer est loin d'être immédiat. Nul doute que des étudiants français peuvent considérer l'axe de symétrie mais, faute de savoir qu'en faire, ne le mentionneront pas. Comme on le voit, cet énoncé est loin d'être neutre : relativement facile du point de vue de l'ETG idoine sur les triangles égaux, il devient difficile du point de vue de l'ETG autour de la symétrie axiale.

Indicateurs spécifiques :

Egal : utilisation d'un cas d'égalité du triangle

Sym : mention d'une symétrie axiale

Med : mention de la médiatrice

3.4. L'exercice 5 : l'additivité de l'aire, un point commun aux deux ETG idoines

Soit ABC un triangle rectangle en A.

a. Dans la figure ci-contre les cercles de diamètres [AB], [AC] et [BC] forment deux lunules en grisées (une lunule est une surface comprise entre deux arcs de cercles).

Montrer que la somme des aires des deux lunules est égale à l'aire du triangle rectangle ABC.

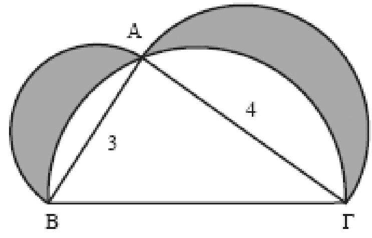


FIGURE 4.

Dans cette question, l'important est le découpage méréologique des aires en lien avec la propriété d'additivité. Même si tout est tracé, ce découpage n'est pas donné contrairement à l'exercice 2. Il faut calculer BC, l'aire du triangle, les aires des trois demi-cercles puis calculer les aires grisées par sommes et soustractions (trois opérations en tout).

Indicateur spécifique :

Add : utilisation de l'additivité de l'aire

4. Étude de la population grecque

Les résultats globaux obtenus sur la population grecque (cent étudiants) sont à l'annexe 1 et les graphiques auxquels nous nous référons sont à l'annexe 2.

4.1. Étude statistique globale avec CHIC

Dans cette première section d'analyse, nous utilisons le logiciel CHIC (Gras, Régnier & Guillet, 2009). Les trois diagrammes, similarités, implicatifs et cohésitifs, montrent tous la même structure générale.

En premier lieu, quel que soit le graphique considéré, les variables NR sont isolées. Les exercices que nous analysons sont tous des exercices de géométrie et il s'agirait d'une relation des étudiants à la géométrie. Est-ce le signe de lacunes dans les ETG ? On peut le penser car les exercices sont d'un niveau secondaire et les étudiants devraient tous avoir des notions de base pour aborder ces exercices. Il y a quand même 6 étudiants qui ne répondent à aucun exercice (d'autres ne répondent qu'à un des 4 exercices, mais la répartition semble aléatoire).

Globalement, et pour chaque exercice, la variable OK est similaire à la variable de la procédure attendue (3*ab*-OK et 3*ab-egal* ; 2-OK et 2-*eq* ; 5-OK et 5-*add*) avec un bémol pour 4-OK et 4-*egal* car l'indice de similarité est faible. On peut expliquer cela par le fait que l'utilisation du théorème sur l'égalité des triangles (86% et 88%) ne suffit pas pour réussir cet exercice et qu'il faut être plus précis sur la justification des arguments pour conclure par ce théorème.

On retrouve ce lien entre les variables OK et les variables des procédures attendues dans l'arbre cohésitif avec toujours de bons coefficients : réussir les exercices 2, 3 et 5 implique l'utilisation de la procédure attendue : 2-OK=>2-Eq, 3*ab*-OK=>3-*Egal* et 5-OK=>5-*Add*. L'exercice 4 est un peu différent car il est en quelque sorte subordonné à l'exercice 3 du fait que le théorème sur l'égalité des triangles n'est pas explicitement demandé. Cela se traduit par deux métarègles relatives à l'égalité des triangles « (4-OK et 3*ab*-OK) =>3*ab-Egal* » ainsi que « (4-OK et 3*ab*-OK)=>(3*ab-Egal* ou 4-*Egal*) ». Cela dit, si l'on modifie les variables à considérer dans la construction de l'arbre cohésitif :

- sans les trois variables de l'exercice 3, on a bien « 4-OK=> 4-*Egal* » (indice 1) comme pour les autres exercices,

- sans les deux variables Egal, on a alors « 4-OK=>3*ab*-OK » (indice 1) qui s'explique vraisemblablement par la subordination de l'exercice 4 à l'exercice 3.

Les ETG personnels des étudiants grecs semblent bien en adéquation avec l'ETG idoine grec.

4.2. Exercices 2 et 5 : décomposition méréologique

A l'exercice 2, la population grecque a répondu à 70% correctement. Le 85% des étudiants utilisent une équation dont 15% une équation simple provenant du découpage en trois aires égales (2-A/3=1). Il est à noter que les étudiants qui ont vu le découpage en 3 aires égales ont tous réussi l'exercice. Cela n'est pas surprenant car ils ont bien analysé la figure géométrique et les traitements algébriques pour résoudre l'équation sont élémentaires.

Ainsi, la similarité entre 2-A/3 et 2-OK est meilleure qu'entre 2-*eq* et 2-OK, ce qui peut s'expliquer par :

- la résolution d'équation pose problème à 12% des étudiants

- la mise en équation pose problème à 4% des étudiants (avec, possiblement, un problème dans le traitement géométrique de la figure).

A l'exercice 5, la population grecque a répondu à 65% correctement, 26% n'ont pas répondu ce qui est un taux bien supérieur aux autres exercices, peutêtre par manque de temps puisque c'était le dernier exercice. Tous les étudiants qui ont traité l'exercice (74%) ont utilisé l'additivité de l'aire et parmi eux, 9% incorrectement. Pendant le cours, des exercices similaires avec les demi-cercles avaient été résolus.

On remarque, dans le graphe implicatif (cf. annexe 2), que 5-OK *implique* 2-OK, ce que l'on peut également remarquer dans l'arbre cohésitif avec la méta-règle (5-OK=>5-*Add*) => (2-OK=>2-*Eq*). On peut penser que réussir l'exercice 5 met nécessairement l'accent sur la décomposition méréologique qui est utile pour réussir l'exercice 2.

4.3. Exercices 3 et 4 : utilisation du théorème, l'ETG idoine grec

Les exercices 3 et 4 sont assez proches, et même équivalents pour la variable NR sur le graphe cohésitif. Ceci laisse supposer qu'ils sont perçus et traités à peu près de la même manière par les étudiants. De fait, les deux exercices sont traités avec le théorème sur les triangles égaux.

A l'exercice 3*ab*, la population grecque a répondu à 78% correctement en utilisant l'égalité des triangles et en utilisant, à plus de 80%, le vocabulaire euclidien attendu. 14% n'ont pas répondu à la question *b*.

A l'exercice 4, la population grecque a répondu à 50% correctement en utilisant l'égalité des triangles, 88% des étudiants ont utilisé l'égalité des triangles mais parmi eux, 38% d'une manière erronée ; 12% n'ont pas répondu. Seulement un étudiant a utilisé une autre méthode avec la médiatrice. Aucun étudiant grec n'a utilisé une symétrie ou un losange.

Dans cet exercice 4, il n'y a pas d'indication sur la démarche à suivre mais les étudiants font *naturellement* une comparaison par le théorème des triangles égaux. Le nombre d'utilisations de ce théorème est tout à fait comparable à celui de l'exercice 3, très guidé, et est toujours très élevé (plus de 80%). Mais les sources d'erreurs sont plus nombreuses (38%). Cela confirme que l'ETG autour des triangles égaux constitue un ETG idoine fondamental dans l'enseignement grec, il est largement disponible pour les étudiants et est, de ce fait, un élément des ETG personnels largement partagé, laissant peu de place pour des ETG alternatifs.

5. Compléments avec la population française

Nous nous focalisons sur les différences entre ETG plus que sur les réussites car, comme on peut s'y attendre, les étudiants grecs réussissent mieux les exercices qui avaient été élaborés pour les évaluer.

Comme cela était attendu vu les ETG idoines, l'exercice 2 est traité de manière très proche de celle que mettent en oeuvre les étudiants grecs : 21 sur 26, soit 81% de réussite et autant de mise en équation (70% et 85% pour la population grecque) mais seulement 2 sur 26, soit 8% d'étudiants repèrent le découpage en 3 aires égales. À noter : 3 étudiants proposent un résultat pour x et proposent ensuite un calcul pour le vérifier.

Le manque de référence théorique, conjugué à une influence de l'énoncé qui demande de comparer deux triangles, se perçoit bien dans l'exercice 3 chez les étudiants français qui tentent d'utiliser le théorème sur les triangles isométriques (14/26=56%). Qu'ils se souviennent ou non du théorème vu en seconde, ils tentent vraisemblablement de le reconstituer à partir de la figure et de l'énoncé. Il n'est jamais complet : on relève souvent un manque de justification et d'arguments essentiels comme l'égalité des angles.

Les étudiants français interprètent correctement le fait que M est le milieu de [BC] même si cela n'est pas dit (omission très courante dans l'ETG idoine grec mais exclue de l'ETG idoine français). En revanche, l'interprétation du a) se fait de différentes manières : usage d'un synonyme d'*égal* comme *identique*, *isométrique*, *semblable* ou les *mêmes* pour 17 étudiants, usage du terme *symétrique* pour 5 étudiants systématiquement lié à la symétrie centrale, la comparaison des aires ne concerne que deux étudiants.

Ce que l'on remarque en outre, et cela provient vraisemblablement d'une inadéquation de l'ETG idoine en France pour effectuer ce type d'exercice, c'est la variété des procédures : 14 sur 26, soit le 56% utilisent une symétrie centrale et 8 sur 26, soit le 31% utilisent un parallélogramme. Finalement, 18 sur 26, soit le 69% des étudiants réussissent cet exercice (78% dans la population grecque).

Pour l'exercice 4, on retrouve les mêmes caractéristiques qu'à l'exercice 3 mais exprimées différemment. Seuls 3 sur 26 (12%) tentent d'utiliser un résultat sur les triangles « identiques » sans doute influencés par l'exercice 3, car ici il n'y a pas à s'adapter à un ETG inconnu. 2 sur 26 (8%) utilisent une symétrie axiale et 4 sur 26 (15%) utilisent une médiatrice. Pourtant, ces deux dernières procédures ont été largement travaillées durant l'année universitaire et on peut penser que le problème est double : d'une part la médiatrice (ou l'axe de symétrie) n'est pas tracée et d'autre part, même si un étudiant pense à l'utiliser, il y a encore beaucoup de chemin à parcourir pour arriver au résultat : il est donc possible que l'étudiant ne se lance finalement pas dans la résolution, faute de savoir où cela mène. On note tout de même pour 14 sur 26 (54%) des procédures *autres* menant souvent à la valeur OK = 0. On peut citer une rotation d'angle *x*, « des triangles isocèles égaux » et plusieurs constats visuels. Finalement, cet exercice a été, comme pour les étudiants grecs, moins bien réussi avec seulement 5 sur 26 (19%) de réussite (50% dans la population grecque) ce qui correspond à ce que nous avons identifié dans notre analyse a priori : il ne s'agit pas d'un énoncé neutre relativement aux ETG idoines français et grec.

L'exercice 5 a été réussi par 14 sur 26, soit le 54% des étudiants (65% dans la population grecque), avec systématiquement une utilisation de la propriété d'additivité de l'aire (sans surprise).

6. Conclusion

En Grèce, avec un ETG de référence fortement lié à la tradition euclidienne, on remarque un ETG idoine autour du théorème d'égalité des triangles bien installé qui induit des ETG personnels en adéquation avec cet ETG idoine. De ce fait, les étudiants grecs, face à un exercice de géométrie, se placent immédiatement dans cet ETG. Bien entendu, cela n'est pas toujours aussi systématique et il n'y a qu'à considérer les exercices 2 et 5, où cet ETG n'est pas du tout convoqué, pour s'en convaincre. Il y a donc des indicateurs, sans doute implicites, qui déclenchent chez les élèves l'utilisation du théorème sur l'égalité des triangles. Parmi ces indicateurs, on peut penser que des demandes de comparaison d'angles ou de longueurs intervenant dans des triangles jouent un rôle important. Mais cela ne suffit pas pour expliquer le phénomène de l'exercice 4, puisque l'énoncé y est très peu détaillé. Dans l'exercice 4, c'est l'importance de la visualisation de la figure qui ressort : plusieurs triangles égaux se voient. Malgré un recours massif à ce théorème, on remarque un manque de souplesse dans son utilisation qu'il faudrait mieux comprendre [9] . Cela est peut-être lié à un manque de procédure alternative pour résoudre un exercice de géométrie, c'est alors dans le curriculum qu'il faudrait chercher la cause. Mais on ne peut écarter la difficulté liée aux adaptations, quelle que soit la procédure.

En revanche, chez les étudiants français, il n'y a pas d'ETG idoine autour des cas d'égalité des triangles. On remarque alors qu'en l'absence d'ETG adéquat pour résoudre une tâche, les étudiants montrent, par nécessité, une certaine flexibilité de leurs ETG personnels, avec l'utilisation des ETG autour de transformations géométriques et même l'émergence d'un ETG autour des triangles isométriques à partir d'un processus de visualisation. Cela semble également favoriser l'utilisation de surfigures comme on peut le penser avec le parallélogramme à l'exercice 3 et la médiatrice à l'exercice 4.

Par ailleurs, il est possible que les tâches de construction participent à l'identification de surfigures intéressantes pour l'étude d'une configuration. On peut par exemple penser à un exercice de tracé d'un parallélogramme avec 3 sommets donnés qui est souvent proposé au collège en France : ceci peut expliquer que certains ont réussi à identifier cette surfigure dans l'exercice 3, alors que les tâches de constructions instrumentées sont très peu proposées aux étudiants grecs.

Enfin, concernant les décompositions méréologiques, on peut remarquer une différence entre les deux populations. Si pour l'exercice 2 ce type de décomposition ne constitue, sans surprise, pas de problème, en revanche on note une chute conséquente de la réussite pour les étudiants français à l'exercice 5. Bien entendu, l'identification des différentes sous-figures et les calculs d'aire à faire en parallèle sont bien plus complexes dans l'exercice 5 que dans l'exercice 2, d'où la chute de réussite, même visible, bien que plus modérée, chez les étudiants grecs. La différence entre les deux populations provient vraisemblablement d'un entraînement plus marqué pour ce type d'exercices dans l'enseignement en Grèce, et notamment dans l'année universitaire en question.

Cette étude a permis de montrer, au regard des thèmes abordés, l'adéquation forte des ETG personnels avec l'ETG idoine dans le cas de la Grèce. La différence des ETG idoines nécessitent, pour les étudiants français, d'effectuer des adaptations ce qui semble entraîner une flexibilité et une certaine richesse dans les réponses qui contrastent avec les réponses stéréotypées, parce que justement issues de l'ETG idoine grec, de leurs homologues grecs. On peut se demander si les étudiants grecs montreraient la même flexibilité si on leur proposait des exercices issus de l'ETG idoine français.

Referencias

Duval, R. (1995). Why to teach geometry. Icmi Studies on Geometry (53-58). Catania.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. Annales de Didactique et de sciences cognitives, 10, 5-53.

Gras, R., Régnier, J. C. & Guillet, F. (Eds.). (2009). Analyse Statistique Implicative. Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités. Revue des Nouvelles Technologies de l'Information, 16. Toulouse, France : Cépaduès.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11, 175-193.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. Canadian Journal of Science and Mathematics Education, 6.2, 167-188.

Kuzniak, A. (2010). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de scolarité obligatoire en France. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 15, 73-93.

Kuzniak, A., Parzysz, B. & Vivier, L. (2013). Trajectory of a problem: a study in Teacher Training. The Mathematics Enthusiast, Special Issue : International Perspectives on Problem Solving Research in Mathematics Education, 10 (1-2), 407-440.

Kuzniak, A. & Vivier, L. (2009). A French look on the Greek Geometrical Working Space at secondary school level. Proceedings of CERME 6. Lyon, France : INRP.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2009). La numération en base quelconque pour la formation des enseignants du premier degré en France et en Grèce. Une étude articulant registres et praxéologies, in Chypre et France. Gagatsis, A., Kuzniak, A. Deliyianni, E. & Vivier, L. (Eds.). Recherche en Didactique des Mathématiques, 20, 171-186.

Nikolantonakis, K. & Vivier, K. (2010), Registres et praxis pour la numération de position en base quelconque – une étude statistique en France et en Grèce, in Régnier, J. C., Spagnolo, F., Di Paola, B. & Gras, R. (Eds.). Analyse statistique implicative - objet de recherche et de formation en analyse de données, outil pour la recherche multidisciplinaire. Prolongements des débats. QRDM Quaderni di Ricerca in Didattica – GRIM, 20 (1), 165-186. Palerme: Université de Palerme. Consultable: http://math.unipa.it/~grim/QRDM_20_Suppl_1.htm

Robert, A. (2005). Des recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10, 209-249.

Tanguay, D. (2005). Apprentissage de la démonstration et graphes orientés. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10, 55-93.

Toumasis, Ch. (1990). The epos of euclidean geometry in Greek secondary education (1836–1985): Pressure for change and resistance. Educational Studies in Mathematics, 21 (6), 491-508.

Annexe I

Populations : 100 étudiants grecs et 26 étudiants français (certaines sommes dépassent légèrement 100% car certains étudiants ne se limitent pas à une réponse comme par exemple à l'exercice 4 où un étudiant grec mentionne la médiatrice sans que cela n'influence sa procédure de résolution).

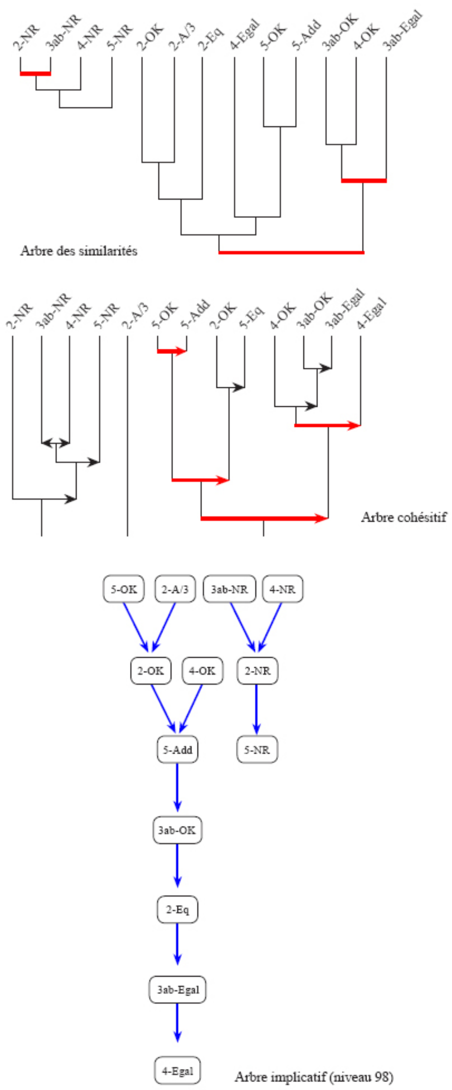
Exercice 2	*NR*	*OK*	*A/3*	*Equ*	*Autres*
Grecs	14%	70%	15%	85%	4%
Français	2 (8%)	21 (81%)	2 (8%)	2 (81%)	3 (12%)

Exercice 3ab	*NR*	*OK*	*Egal*	*Sym*	*Parall*	*Autres*
Grecs	12%	77%	86%	0%	0%	0%
Français	3 (12%)	18 (69%)	14 (54%)	14 (54%)	8 (31%)	2 (8%)

Exercice 4	*NR*	*OK*	*Egal*	*Sym*	*Médiatrice*	*Autres*
Grecs	12%	50%	88%	0%	1%	1%
Français	4 (15%)	5 (19%)	3 (12%)	2 (8%)	4 (15%)	14 (54%)

Exercice 5	*NR*	*OK*	*Add*	*Autres*
Grecs	26%	65%	74%	0%
Français	8 (31%)	14 (54%)	14 (54%)	4 (15%)

Annexe II



Notas

1 Cette tradition est en fait une reconstruction tardive, voir à ce propos (Toumasis, 1990).

2 Cette réforme a été menée à son terme mais les changements récents de politique éducative tendent à revenir, en partie, au système de formation antérieur.

3 Les triangles isométriques ne sont plus au programme du secondaire en France depuis 2009.

4 Avant 2008, au collège, on voyait une transformation nouvelle par année (symétrie axiale, symétrie centrale, translation et rotation). Désormais, on ne voit plus les translations ni les rotations au collège.

5 La décomposition méréologique (Duval, 2005) implique un découpage de la figure de départ en sousfigures de même dimension. Elle suppose un raisonnement basé principalement sur la perception à travers des découpages et superposition de la figure : le pôle “espace réel et local” de l’ETG est le pôle dominant.

6 Une surfigure est un objet géométrique qui n’est ni mentionné dans le texte ni tracé sur la figure et dont la considération, souvent par un tracé sur la figure, intervient au cours de la résolution du problème.

7 Il est peu probable que les étudiants grecs utilisent ces propriétés car ils disposent d’un ETG sur les triangles égaux. Les étudiants français les utilisant ne pourront pas conclure pour le a). On peut alors penser qu’il ne répondrons pas au a) ou bien qu’ils y répondront partiellement (par exemple en comparant les aires des triangles)

8 Il s'agit d'un ETG comprenant les propriétés, les constructions et les représentations concernant les triangles isocèles.

9 Une piste pour cette compréhension est ce que Tanguay (2005) désigne comme « l'obstacle de la prégnance de la valeur de vérité » (section 3.1) : l'évidence, ici, de l'isométrie des triangles en cause s'impose d'emblée et agit comme un écran, un obstacle à l'essor de l'élaboration de l'enchaînement déductif escompté.