



Revista Latinoamericana de Investigación en
Matemática Educativa
ISSN: 1665-2436
ISSN: 2007-6819
relime@clame.org.mx
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Organismo Internacional

Quel espace de travail géométrique pour l'apprentissage des propriétés au primaire ?

Coutat, Sylvia

Quel espace de travail géométrique pour l'apprentissage des propriétés au primaire ?

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 17, 4-1, 2014

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Organismo Internacional

Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33553644006>

DOI: <https://doi.org/10.12802/relime.13.1746>



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0 Internacional.

Quel espace de travail géométrique pour l'apprentissage des propriétés au primaire ?

What geometrical working space for the learning of the properties in primary school?

Sylvia Coutat

Université Denis Diderot – Paris 7, Laboratoire de

Didactique André Revuz, Francia

laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

DOI: <https://doi.org/10.12802/relime.13.1746>

Redalyc: [https://www.redalyc.org/articulo.oa?](https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33553644006)

id=33553644006

Recepción: 14 Enero 2013

Aprobación: 15 Noviembre 2013

RESUMEN:

Esta colaboración analiza el uso de un programa de geometría dinámica en los últimos grados de primaria (9-12 años) para el aprendizaje de propiedades por medio de la modelización de las actividades de los alumnos en espacio de trabajo geométrico. Esta modelización realza las relaciones entre las diferentes génesis y particularmente la génesis instrumental ligada al instrumento desplazamiento, correlativo a la génesis video - figural ligada a la visualización de figuras.

PALABRAS CLAVE: Geometría dinámica, Geometría en primaria escolar, Aprendizaje de las propiedades de geometría, Espacio de Trabajo Geométrico.

ABSTRACT:

This collaboration analyses the use of dynamic geometry software in the latest primary school grades (9 to 12 years old) in order to learn properties while modeling the students' activities in geometrical working space. This modeling emphasizes the relations between different geneses and more particularly, the instrumental genesis, linked to the displacement vehicle, in relation to the video - figural genesis, linked to object visualization.

KEYWORDS: Dynamic geometry, Primary school geometry, Learning of geometrical properties, Geometrical Working Space.

RESUMO:

Esta contribuição analisa o uso de um software de geometria dinâmica em classes do fim de escola primária, (9-12 anos) para a aprendizagem das propriedades através de modelling as atividades dos alunos em área de trabalho geométrico. Este modelling enfatiza as relações entre as várias gêneses e mais particularmente a gênese instrumental conectado à viagem de instrumento (movimento) correlatada no figurale de gênese vídeo conectado a visualização de figuras.

PALAVRAS-CHAVE: Geometria dinâmica, Prova, Geometria de escolar primária, Espaço de Trabalho Geométrico.

RÉSUMÉ:

Cette contribution analyse l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique dans des classes de fin de primaire (9-12 ans) pour l'apprentissage des propriétés en modélisant les activités des élèves en espace de travail géométrique. Cette modélisation met en valeur les relations entre les différentes gèneses et plus particulièrement la gènesse instrumentale liée à l'instrument déplacement corrélée à la gènesse vidéo - figurale liée à la visualisation des figures.

MOTS CLÉS: Géométrie dynamique, Géométrie au primaire, Apprentissage des propriétés géométriques, Espace de Travail Géométrique.

1. INTRODUCTION (QUESTIONNEMENT INITIAL ET ÉLÉMENTS THÉORIQUES)

L'e rapport des élèves aux figures¹ géométriques évolue tout au long de leur scolarité. La première appréhension de la géométrie utilise des dessins, identifiés par leurs formes géométriques et une vision iconique (Duval, 2005). Progressivement les formes géométriques sont travaillées à travers les éléments qui les composent, les angles, les côtés, les droites, les sommets et les points. Finalement le concept de figure s'enrichit par le concept de propriété et les dessins deviennent progressivement des représentations graphiques de figures. Le passage d'une vision de la forme à une vision par les sous éléments droites et points

est appelée par Duval (2005) la décomposition dimensionnelle des formes. Les élèves appréhendent dans un premier temps des formes par leur surface, des éléments de dimension 2 (2D). Puis ces surfaces sont décomposées et perçues par les éléments de dimensions inférieures, les côtés et les droites de dimension 1 (1D), pour finir par les sommets et les points, éléments de dimension 0 (0D). Cette prise en compte de l'évolution de la vision par un changement de regard des figures géométriques est l'objet d'étude des travaux de Duval et Godin (2005) et Offre, Perrin - Glorian et Verbaere (2006). Leurs recherches étudient en quoi l'utilisation d'instruments classiques (règles, équerre) influence la perception des figures géométriques en accompagnant la décomposition dimensionnelle des formes. Un de leur résultat est que le choix des instruments mis à disposition lors d'une activité de reproduction de figure influence l'appréhension de la figure et la perception des propriétés topologiques des éléments 1D dans la figure à reproduire. Cependant l'utilisation des instruments ne va pas de soi et doit être prise en charge dans la séquence d'apprentissage. La prise en compte des connaissances instrumentales en lien avec les connaissances conceptuelles apparaît à travers la genèse instrumentale, processus de construction d'un instrument par un sujet. Rabardel (1995) définit cette genèse comme une composée de deux processus. Le *processus d'instrumentalisation*, relatif à l'émergence et à l'évolution des composantes de l'artefact, et le *processus d'instrumentation*, portant sur l'émergence et l'évolution des schèmes sociaux d'utilisation. Ainsi les artefacts ou outils de construction, sont les entités matérielles qui deviennent des instruments lorsqu'ils sont associés à une finalité dans la résolution d'une tâche. Dans le contexte de la géométrie, les outils de construction sont porteurs de propriétés géométriques, comme la règle est porteuse de la propriété d'alignement. S'approprier un instrument de construction comme la règle peut amener l'utilisateur à s'approprier le concept d'alignement, et de passer d'une vision de la forme d'une figure géométrique, vision 2D, à une vision par les droites qui la composent, éléments 1D.

Laborde et Capponi (1994) ont analysé l'utilisation d'un Logiciel de Géométrie Dynamique (LGD pour la suite) dans la validation de constructions géométriques. L'instrument central est le déplacement utilisé comme un instrument qui permet d'identifier des invariants. Les invariants correspondent aux propriétés géométriques associées aux constructions, propriétés embarquées explicitement dans les Cabri - dessins² et assurées valides par le logiciel lui-même. Coutat et Richard (2011) ont utilisé un LGD pour un apprentissage instrumenté des propriétés dans le but de construire une première axiomatique et amorcer un processus de validation s'appuyant sur un raisonnement hypothético - déductif au début du secondaire (élèves de 12-14 ans). Les figures dynamiques sont utilisées pour travailler la relation de subordination de la conclusion aux contraintes d'une propriété. Ces deux recherches présentent des effets positifs quant à l'utilisation d'un LGD pour l'apprentissage des propriétés géométriques dans la construction d'une axiomatique.

A partir de ces résultats nous questionnons l'utilisation des instruments spécifiques d'un LGD pour l'apprentissage des propriétés en fin de primaire (9-12 ans). Dans une première partie nous présentons en quoi les paradigmes géométriques (Houdement & Kuzniak, 2006) et les Espaces de Travail Géométriques (Kuzniak, 2011) sont des outils pertinents pour notre étude. Puis nous présentons la séquence didactique et quelques analyses résultant de sa mise en oeuvre en classe. Enfin nous concluons sur la nature des connaissances géométriques construites chez les élèves.

2. CADRE THÉORIQUE

2.1. Modélisation des raisonnements géométriques au primaire à l'aide des paradigmes géométriques

Afin d'identifier les différents types de raisonnements en géométrie, nous utilisons les travaux de Houdement et Kuzniak (2006) sur la notion de paradigmes géométriques qui permettent d'identifier trois référentiels

théoriques, suivant les relations entre les objets et la théorie associée à ces objets. Au niveau GI, niveau de la géométrie naturelle, les objets de la réalité, les outils de construction et la validation sensible sont prédominants. Au niveau GII, une première axiomatique apparaît, ce qui permet une validation s'appuyant sur des lois hypothético - déductives, cependant la référence à la réalité subsiste. Enfin au niveau GIII, l'axiomatique est construite sur un raisonnement formaliste, et la validation s'appuie sur le raisonnement logique. Au cours de la résolution d'une activité, ces différents paradigmes peuvent être mobilisés conjointement. Braconne - Michoux (2008) s'est intéressée à l'articulation entre les paradigmes GI et GII. Ces travaux s'appuient sur le découpage de van Hiele (1958), proche de celui de Houdement et Kuzniak (2006), des raisonnements en géométrie. Van Hiele (1958) définit 5 niveaux de pensée géométriques dans l'évolution des connaissances d'un élève. Au niveau 0 (N0), appelé niveau de *visualisation*, l'élève identifie les objets géométriques par leur forme globale. Au niveau 1 (N1), niveau d'*analyse*, les élèves associent des propriétés aux objets géométriques. Cependant, ces propriétés ne sont pas reliées entre elles. Ces liaisons apparaissent au niveau 2 (N2), appelé *déduction informelle*, mais elles ne permettent pas encore de relier les objets entre eux. Dans le niveau 3 (N3), *déduction formelle*, les liaisons se forment et les élèves peuvent organiser certaines déductions formelles. Le dernier niveau (N4), *niveau de rigueur*, correspondrait à l'état des connaissances du mathématicien expert. En utilisant les travaux de van Hiele (1958) conjointement aux paradigmes géométriques de Houdement et Kuzniak (2006), Braconne - Michoux (2008) apporte une certaine finesse à l'articulation GI/GII. Ainsi elle montre que le niveau d'analyse (N1) peut être envisagé comme une « zone de tuiage » entre les paradigmes GI et GII. Ainsi le niveau d'analyse est partagé en deux niveaux : GI-N1 et GII-N1. Ces résultats s'appuient sur l'analyse du statut du dessin et la réflexion de l'élève. Dans le paradigme GI, le dessin est l'objet d'étude et de validation et la validation est perceptive voire instrumentée. Dans le paradigme GII, la figure devient objet d'étude et la validation s'organise autour des propriétés. Or dans le niveau d'analyse, le dessin se rapproche du concept de figure (GII) mais les propriétés restent indépendantes les unes des autres (GI). Ainsi l'articulation (GI/GII) peut être travaillée en s'appuyant sur le niveau N1 d'analyse de van Hiele, ce qui pourrait revenir à travailler sur les propriétés en vue d'enrichir le concept de figure.

2.2. Les instruments dans un LGD

Un travail spécifique sur les instruments de construction (Duval & Godin, 2005) peut permettre un travail sur les propriétés géométriques. Dans un LGD les instruments disponibles diffèrent des instruments classiques utilisés en papier - crayon, par exemple le déplacement n'existe pas en dehors du logiciel. Restrepo (2008) identifie plusieurs instruments déplacements qu'elle classe en fonction de différentes finalités. Nous pointons ici deux déplacements spécifiques. Le premier instrument est *le déplacement pour identifier les invariants de la figure, Di* pour la suite. Cet instrument déplacement est classé dans les déplacements exploratoires, elle le définit ainsi : « Étant donnée une construction, on déplace les points de base afin de trouver ses invariants. Ainsi, on peut identifier les propriétés géométriques de la figure ». (Restrepo, 2008, p.43)

Le deuxième instrument que nous retenons est l'instrument *déplacement pour valider une construction (Dc* pour la suite), classé dans les déplacements pour valider ou invalider une construction :

Déplacer tous les points déplaçables d'une construction pour voir si celle-ci conserve les propriétés apparentes à l'état initial. Si c'est le cas, alors la construction est validée; dans le cas contraire, elle est invalidée, la construction n'avait pas été construite selon les propriétés géométriques demandées. (Restrepo, 2008, p.44)

Ces deux instruments (*Di* et *Dc*) sont différents car les schèmes sociaux d'utilisations sont différents tout comme les connaissances et signifiés mathématiques en jeu. Le *Di* est un déplacement ouvert, souvent « erratique » et peu systématique, car il ne s'appuie sur aucun a priori : il est exploratoire. Lors de la mise en

oeuvre du D_c , l'exploration est beaucoup plus fermée, elle suit des directions et des trajectoires particulières. Le sujet a une attente précise lorsqu'il le mobilise, il lui associe une observation attendue. Ce deuxième instrument diffère aussi du premier car il a un statut de validation des constructions réalisées, ce qui n'est pas le cas pour le D_i .

2.3. Espace de travail géométrique avec un LGD

Les Espaces de Travail Géométrique (ETG pour la suite) développés par Kuzniak (2011) permettent de travailler conjointement le processus de genèse instrumentale, le processus d'évolution du regard des figures géométriques et le processus d'appropriation des propriétés. Ils modélisent l'activité mathématique lors de la résolution de problème en utilisant deux plans. Un premier plan contenant les objets matériels, l'ensemble des artefacts et le système théorique de référence, est appelé le plan épistémologique. Le second plan est le plan cognitif, il est associé aux connaissances géométriques dans leur mise en oeuvre. Ces deux plans s'enrichissent mutuellement grâce à trois processus de genèse : instrumentale, vidéo - figurale et discursivo - graphique. Ces trois genèses sont les supports de trois types de démarches, une démarche de découverte, une démarche de validation et une démarche de modélisation. Nous renvoyons le lecteur à la figure 4 de l'article d'introduction de cette revue « Introduction : Espaces de travail mathématique. Point de vue et perspectives ». Nos attentes concernant l'évolution de la vision des figures géométriques implique une genèse vidéo - figurale dans laquelle les dessins sont considérés comme des représentations particulières de figures géométriques, et les figures géométriques comme une construction mentale s'appuyant sur des dessins, des propriétés, des textes. L'évolution de cette vision peut s'appuyer sur la genèse instrumentale du déplacement pour identifier les invariants. L'articulation de ces deux genèses définit la démarche de découverte. L'appropriation du concept de figure s'appuie aussi sur l'appropriation des propriétés, ce qui renvoie à la genèse discursivo - graphique. Ces deux genèses constituent la démarche de modélisation. Enfin, l'appropriation du déplacement s'articule avec l'identification des propriétés, la genèse instrumentale se réalise avec la genèse discursivo - graphique, ensemble elles définissent la démarche de validation.

3. ANALYSE A PRIORI

3.1. Description de la séquence didactique

Afin d'étudier les différentes genèses et les différentes démarche relativement au concept de propriété géométrique avec un LGD, nous mettons en place une ingénierie didactique qui reprend les travaux de Duval et Godin (2005) et les travaux de Assude et Gélis (2002). Ces derniers étudient l'intégration d'un LGD à l'aide de la dialectique ancien - nouveau sur des types de tâches et de techniques. Par exemple ils réintroduisent des tâches anciennes, à résoudre à l'aide de techniques nouvelles. Un de leurs résultats forts que nous retenons est que l'entrelacement entre des tâches papier - crayon et des tâches avec le LGD une réelle intégration d'un LGD dans l'enseignement de la géométrie. Les connaissances instrumentales issues du travail avec le LGD doivent être liées explicitement aux connaissances conceptuelles acquises dans l'environnement papier - crayon.

L'ingénierie didactique se déroule dans une classe de Suisse Romande à double degrés avec 11 élèves de 10-11 ans et 9 élèves de 11-12 ans (deux dernières années de primaire). Elle s'appuie sur Cabri Elem, un logiciel de géométrie dynamique adapté au primaire, issu du logiciel Cabri - géomètre, où les activités se présentent sous forme de cahiers virtuels. Chaque page du cahier est une page du LGD, avec une sélection des outils de construction spécifiques au LGD, une consigne et une zone de construction. La Figure 1 présente un exemple de page d'un cahier Cabri Elem.

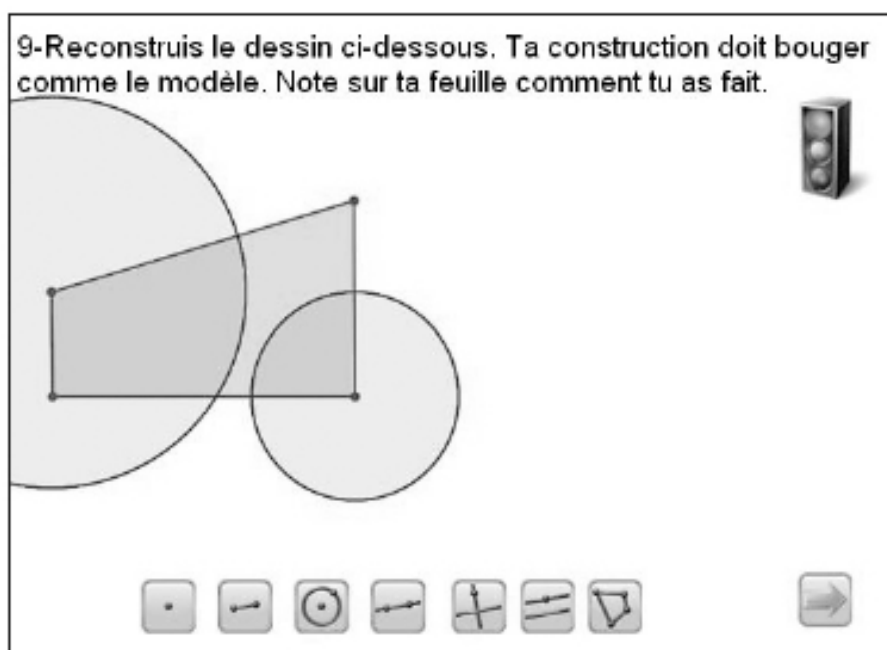


FIGURE 1

Nous avons conçu, avec l'enseignante, cinq cahiers Cabri Elem, chaque cahier contenant 10 à 15 pages. Le traitement d'un cahier prend entre 45 mn et 90 mn. Chaque cahier Cabri Elem est systématiquement suivi d'une séance qui a lieu quelques jours plus tard. Pendant cette séance, un seul ordinateur est présent et est mis à disposition de l'enseignante. Les élèves utilisent leurs notes prises pendant la séance précédente pour relater leurs interactions avec le logiciel. L'enseignante réalise les différentes actions sur l'ordinateur dont l'écran est projeté, partagé avec la classe. Ces activités ont pour but de discuter collectivement des objets travaillés dans le cahier dynamique correspondant. Ces séances papier - crayon durent entre 45 mn et 90 mn. Chaque cahier Cabri Elem, suivi de sa (ses) séance(s) en papier - crayon est appelé un regroupement de séances. Chaque regroupement³ de séances est associé à un objectif d'apprentissage mathématique travaillé dans l'environnement dynamique (Cabri Elem) et dans l'environnement papier - crayon. Ainsi, au sein de chaque regroupement, trois types d'activités sont mises en place : les activités de résolution avec le cahier Cabri Elem, les activités collectives avec Cabri Elem projeté, les activités avec papier - crayon.

3.2. Le paradigme attendu de la séquence d'enseignement

Les activités dans l'environnement dynamique du LGD visent un travail sur les propriétés géométriques d'un Cabri - dessin. Les propriétés que nous visons peuvent être des propriétés de perpendicularité ou parallélisme, ou la reconnaissance de figures usuelles comme le rectangle, le carré ou le losange. Ces propriétés peuvent être abordées à travers la genèse instrumentale de Di et Dc . Le fil conducteur instrumental des activités dans l'environnement dynamique est la construction de ces deux instruments. Pour cela nous avons choisi d'utiliser une tâche ancienne : des activités de reproduction avec des techniques nouvelles associées au LGD. Dans ces nouvelles activités, les élèves doivent réaliser une construction à partir d'un Cabri - dessin donné, la consigne étant que leur construction doit se comporter au cours du déplacement comme le modèle. Cette consigne représente un changement de contrat didactique fort, car la validation ne s'appuie plus sur une superposition de la reproduction au modèle, c'est-à-dire que les élèves ne peuvent pas reproduire uniquement une forme (élément 2D) mais une figure avec ses propriétés. La résolution de cette activité passe par l'identification des invariants du Cabri - dessin - modèle, c'est-à-dire utiliser le Di pour identifier les

propriétés de la figure. Les observations issues de ce déplacement doivent permettre d'identifier les relations entre les objets qui perdurent au cours du déplacement. Ensuite, l'objectif est de reproduire ces invariants à l'aide des instruments disponibles. Comme l'objectif final est de reproduire le Cabri - dessin - modèle, le *Di* peut aussi être associé à la déconstruction instrumentale telle qu'elle est définie par Mithalal (2010), c'est-à-dire identifier l'enchaînement ordonné des actions permettant de reproduire une représentation graphique d'un objet géométrique. La validation d'une reproduction repose sur le *Dc* qui contrôle si les deux constructions ont des comportements similaires au cours du déplacement. Le travail sur ces déplacements, devrait permettre de se focaliser sur les relations entre éléments 1D voire 0D et non plus sur les formes (éléments 2D) à reproduire, comme observé dans Coutat (2012).

Le paradigme idoine de notre séquence est le niveau GII-N1. La perception et le sensible restent présents, et le raisonnement attendu s'appuie sur l'identification de propriétés et leur reproduction.

3.3. Analyse a priori d'une activité avec un LGD : Quel ETG idoine ?

Nous nous centrons sur l'analyse des procédures des élèves au cours de la résolution d'une activité issue du cahier Cabri Elem du regroupement 4 « Compas et Cercle ⁴ » dans le but de modéliser le traitement du travail des élèves à l'aide des ETG (Kuzniak, 2011). Le Cabri-dessin donné comme modèle se compose d'un quadrilatère quelconque et de deux cercles. Les relations entre le quadrilatère et les cercles sont rendues visible pour la clarté du texte sur la Figure 2. Chaque cercle a pour centre un sommet du quadrilatère, les deux sommets étant opposés. Le rayon de chaque cercle est donné par un des côtés du quadrilatère, opposé au centre du cercle. Pour identifier ces relations entre les cercles et les côtés du quadrilatère il est indispensable de déformer le quadrilatère en déplaçant les sommets. La reproduction commence par la construction du quadrilatère. Pour construire les cercles il faut utiliser l'outil cercle en désignant tout d'abord une longueur (ici sous la forme d'un segment) qui définit le rayon du cercle puis en désignant un point qui sera le centre du cercle. Dans notre cas, le rayon est un côté du quadrilatère, le centre un sommet opposé au côté choisit. Nous notons cette utilisation de l'outil cercle : Cercle (Rayon, Centre). Une autre utilisation de cet outil, plus conventionnelle, est de désigner tout d'abord un premier point comme centre puis un deuxième point, la distance entre le centre et ce deuxième point correspondant au rayon du cercle. Nous notons cette deuxième utilisation du cercle : Cercle (Centre, Point). Ces deux utilisations de l'outil cercle sont accessibles à partir de la même icône, elles définissent deux instruments pour un même outil. Au moment où les élèves commencent l'activité de la Figure 1 les deux utilisations de l'outil cercle sont connues des élèves.

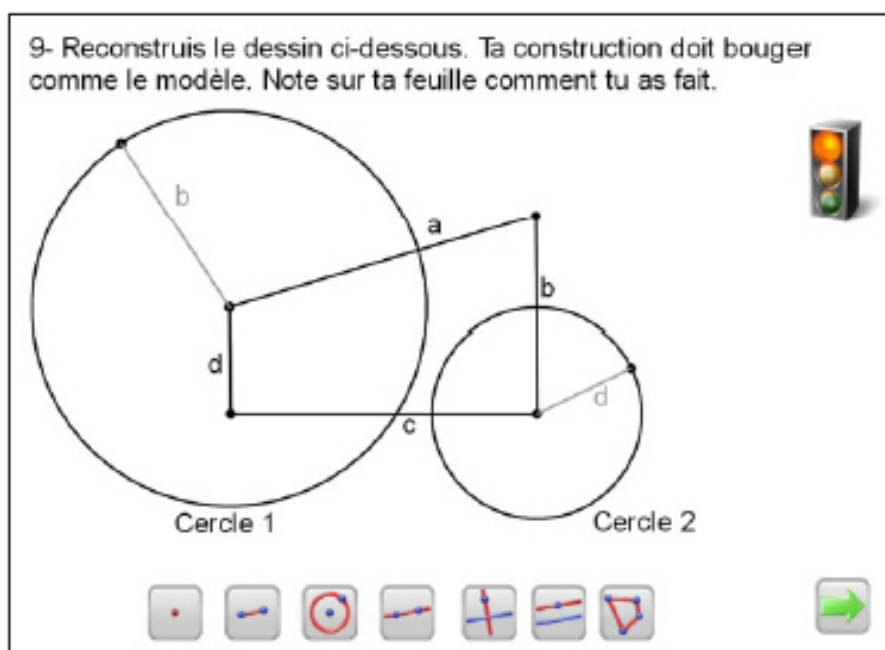


FIGURE 2.

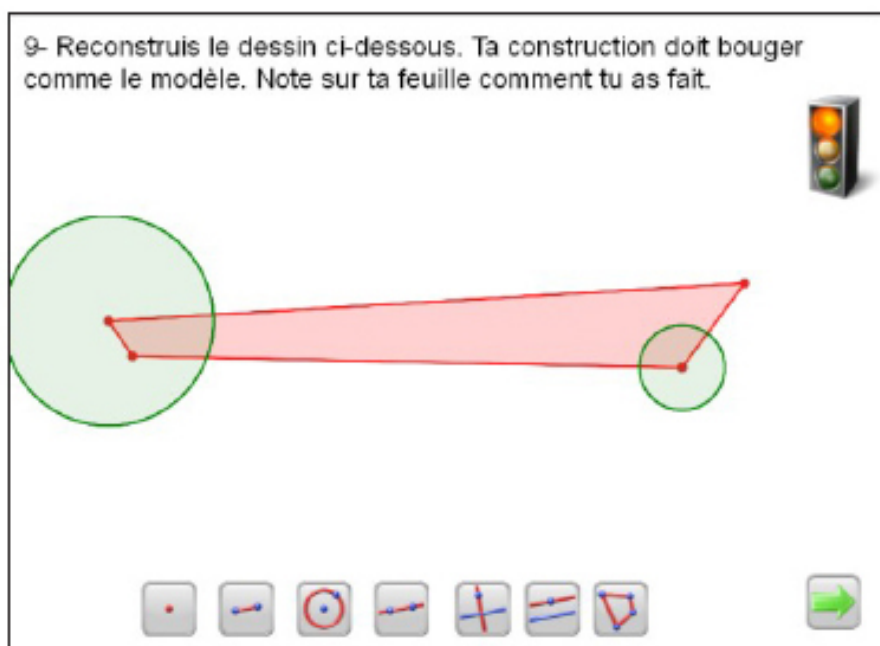


FIGURE 3

La réalisation de cette activité demande tout d'abord l'utilisation de l'instrument *Di* pour identifier les propriétés de la figure c'est-à-dire les relations entre les rayons des cercles et les côtés du quadrilatère. Le déplacement de certains sommets du quadrilatère, modifie le rayon du cercle comme illustré sur la Figure 3. Une fois que les relations entre les cercles et les côtés du quadrilatère sont identifiées, il faut associer le bon schème d'usage à l'outil cercle pour mettre en oeuvre l'instrument Cercle (Rayon, Centre). Enfin la validation de la reproduction utilise le *Dc* sur les deux constructions afin de s'assurer que Cabri - dessin modèle et le Cabri - dessin construit ont des comportements similaires au cours des déplacements. Cette reproduction ne peut pas s'appuyer sur une vision 2D du Cabri - dessin mais elle doit prendre en compte les relations entre les droites (1D) et les points (0D). Nous plaçons cette réflexion au niveau GII-N1. La décomposition

instrumentale permet d'identifier que le quadrilatère doit être construit en premier, puis les cercles dont les rayons dépendent des côtés du quadrilatère. De plus, cette reproduction utilise un seul des deux instruments associé à l'outil cercle, l'instrument Cercle (Rayon, Centre). Pour résoudre cette activité les élèves doivent maîtriser les instruments Di , Cercle (Rayon, Centre) et Dc . La Figure 4 est l'adaptation de la figure 1 présentée dans l'article « Introduction : Espaces de travail mathématique. Point de vue et perspectives » de notre activité.

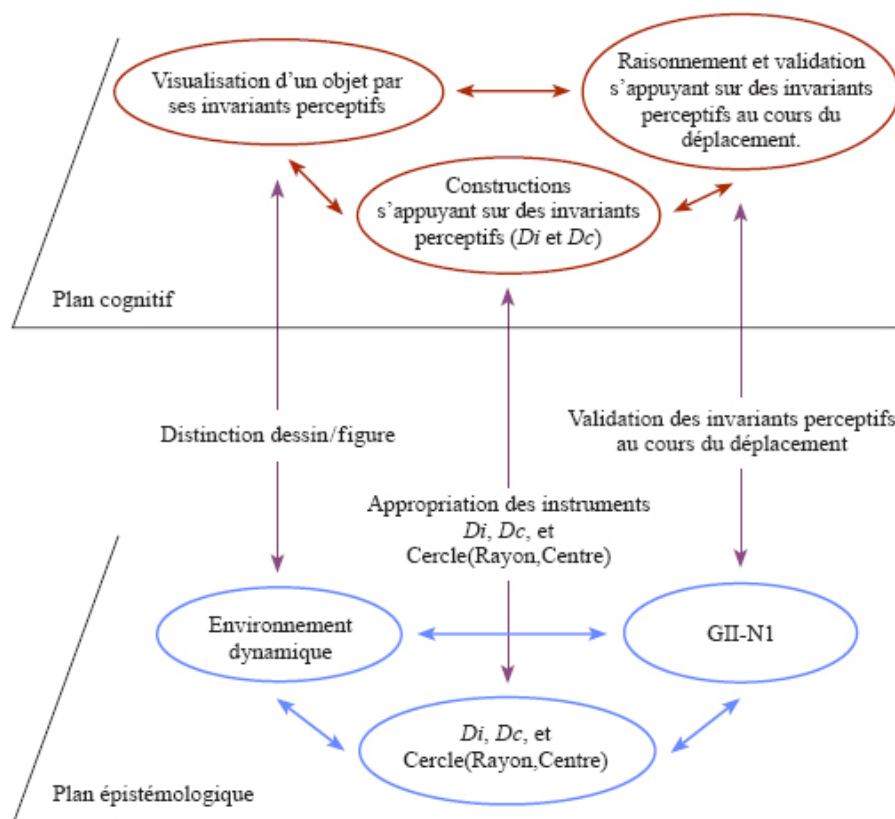


FIGURE 4

4. LES ETG PERSONNELS CONSTRUITS PAR LES ÉLÈVES

Nous avons expérimenté cette activité avec neuf binômes. L'analyse du travail de ces neuf binômes nous amène à identifier cinq ETG personnels. Les principales actions des binômes considérés sont en annexe. Pour identifier ces cinq ETG, nous caractérisons les trois genèses à travers les processus de résolution des élèves. Le regard sur le Cabri - dessin modèle nous renseigne sur la genèse vidéofigurale des élèves. La caractérisation de la genèse instrumentale s'appuie sur l'analyse des instruments Di , Dc , Cercle (Rayon, Centre) et Cercle (Centre, Point) mobilisés par les élèves. La perception des relations entre les cercles et le quadrilatère et leur validation pour conclure la reproduction nous renseigne sur la genèse discursivo - discursive. Chaque profil est nommé en spécifiant l'état supposé de chacune des genèses pour cette activité. Nous concluons sur le paradigme des ETG personnel en essayant de définir les trois démarches associées aux trois genèses.

4.1. ETG profil iconique / non instrumentée / sans propriété

Ce profil concerne un binôme observé. Les élèves n'utilisent pas le Di dans l'exploration du modèle. Cela implique qu'ils ne peuvent pas identifier les propriétés géométriques de la figure et les réinvestir dans leur

construction. Lorsque ces élèves essaient de reproduire la figure, ils utilisent l'instrument Cercle (Centre, Point) en prenant un sommet du quadrilatère comme centre et un point quelconque du plan pour définir le rayon de chaque cercle. Les cercles obtenus n'ont pas les mêmes relations de dépendance au quadrilatère que la figure modèle, pourtant la reproduction est superposable au modèle : même taille, même orientation. Les élèves invalident systématiquement leurs tentatives en déplaçant un sommet du modèle puis le sommet correspondant de leur construction (Dc). Ils prennent conscience que leur construction ne se déforme pas comme le modèle sans parvenir à identifier les relations du modèle. La genèse vidéo - figurale qui devrait permettre de distinguer dans le Cabridessin les relations entre les cercles et le quadrilatère n'est pas fonctionnelle, les élèves ont une vision 2D de la figure. Le processus de genèse instrumentale semble particulièrement avancé pour la validation par la mise en oeuvre du Dc mais pas pour l'exploration avec aucune utilisation du Di . La démarche de découverte reste perceptive et non instrumentée. La démarche de modélisation utilise une perception du dessin et une vision iconique et la démarche de validation utilise le Dc pour comparer une succession de dessins - modèle et dessin - construits. Leur ETG personnel se situe dans le paradigme GI-N0 car ils considèrent des objets géométriques par leur aspect général en mobilisant une vision 2D, dépourvu de propriétés.

4.2. ETG profil non iconique / non instrumentée / sans propriétés

Deux binômes observés correspondent à ce profil. Les élèves associés à ce profil mobilisent peu le Di au début de leur résolution. Il semble que le Dc utilisé pour valider le soit aussi pour explorer le modèle, car en identifiant les différences entre leur Cabri - dessin et le Cabri - dessin modèle ils identifient aussi certains invariants de la figure modèle. Ils finissent par identifier que les rayons des cercles sont liés à des côtés du quadrilatère, sans pouvoir préciser quels côtés. Cependant, comme pour les élèves du profil précédent, ces élèves utilisent l'instrument Cercle (Centre, Point). Ils prennent conscience de relations dans la figure modèle, sans parvenir à identifier quels objets sont liés. Ainsi ils ne peuvent pas s'organiser pour reproduire ces relations dans leur reproduction. Le fait que le processus de genèse instrumentale concernant l'instrument Cercle (Rayon, Centre) ne soit pas opérationnel est certainement une difficulté supplémentaire pour ces élèves. La genèse vidéo - figurale est probablement plus avancée que le profil précédent, sans pour autant être aboutie. La démarche de découverte est perceptive mais instrumentée ce qui leur permet d'enrichir leur analyse de la figure en considérant les éléments qui la compose. La démarche de modélisation leur permet d'identifier des relations sans pouvoir exprimer des propriétés. Enfin leur démarche de validation s'appuie sur l'identification d'invariants entre les deux Cabri - dessin. Étant donné que leur genèse instrumentale et vidéo - figurale sont plus avancées que le précédent profil, nous considérons que l'ETG de ce profil se situe dans le paradigme GI-N1.

4.3. ETG profil non iconique - non instrumentée - avec liaisons perceptives

Trois binômes sont associés à ce profil. Ils mettent en oeuvre tôt l'instrument Di dans leur exploration. Ils parviennent à identifier les relations entre les cercles et les côtés du quadrilatère. Cependant, ils rencontrent des difficultés dans l'utilisation de l'instrument Cercle (Rayon, Centre). Ils l'utilisent en désignant un côté du quadrilatère modèle et non un côté de leur propre quadrilatère comme rayon, puis ils désignent un sommet du quadrilatère construit comme centre du cercle. Ils obtiennent une construction qui ne possède pas de relations internes à elle - même, mais des relations avec le modèle. Les centres des cercles construits, sont liés aux sommets des quadrilatères construits mais les rayons sont définis par les côtés du quadrilatère modèle. La genèse vidéo - figurale est avancée dans le sens où les élèves identifient les relations internes à la figure et ne contentent pas d'une analyse par la forme et la taille. La genèse instrumentale est elle aussi avancée. Les élèves

analysent la figure modèle en utilisant le Di , mobilisent l'instrument Cercle (Rayon, Centre) pour reproduire les cercles et évaluent leur production à l'aide du Dc . Pourtant ils ne parviennent pas à une reproduction correcte.

Leur utilisation de l'instrument Cercle (Rayon, Centre) démontre que les élèves ne parviennent pas à se détacher des liaisons perceptives du modèle pour les transformer en relations entre objets géométriques d'une même figure. L'utilisation pertinente des Di et Dc associée à la décomposition dimensionnelle de la figure permet à ces élèves d'avoir une démarche de découverte qui s'appuie sur la figure. La démarche de modélisation considère ainsi les propriétés du Cabri - dessin modèle, mais ces propriétés restent spécifiques au modèle et ne peuvent en être détachées. L'utilisation qu'ils font de l'instrument Cercle (Rayon, Centre) démontre que les élèves ne parviennent pas à considérer les propriétés indépendamment du modèle, c'est pour cette raison que nous considérons que cet ETG fonctionne dans le paradigme GI-N1.

4.4. ETG profil 4 non iconique - instrumenté - avec propriétés instrumentées

Un binôme est défini par ce profil. Les élèves mettent en place une procédure très surprenante. Ils utilisent le Di dans l'exploration, sans chercher à identifier précisément les relations entre les cercles et les côtés du quadrilatère, c'est-à-dire qu'ils ne cherchent pas à identifier quel côté est associé à quel rayon de cercle par de Di . La deuxième étape dans leur exploration s'appuie sur l'utilisation détournée de l'instrument Cercle (Rayon, Centre). Les élèves utilisent cet instrument pour identifier à quel côté chaque cercle est lié. Ils sélectionnent l'outil cercle, puis ils désignent un côté du quadrilatère, ce qui leur donne un cercle avec un rayon constant dont il ne reste plus qu'à relier à un point comme centre.

Les élèves déplacent le cercle dans le plan afin d'identifier à quel cercle du modèle il peut se superposer. Lorsqu'aucune superposition n'est possible, ils construisent un nouveau cercle lié à un autre côté jusqu'à ce qu'ils obtiennent un cercle superposable à un cercle du modèle. Une fois ce cercle obtenu, ils reproduisent la construction avec leur quadrilatère. La genèse instrumentale de l'outil Cercle (Rayon, Centre) est très avancée, tout comme le Dc , le Di est utilisé dans une première exploration puis remplacé par l'utilisation détournée de Cercle (Rayon, Centre). La genèse vidéo - figurale semble s'appuyer d'avantage sur les éléments de l'espace réel que sur les relations qu'ils peuvent avoir entre eux. La démarche de découverte démontre une réflexion instrumentée sur la figure. La démarche de modélisation utilise une vision du Cabri - dessin par ses propriétés. La démarche de validation s'appuie sur la comparaison des invariants de la figure modèle et la figure construite. Pour ces élèves le paradigme associé à leur ETG est le paradigme GII-N1.

4.5. ETG profil non iconique - instrumenté - avec propriétés

Les procédures utilisées par les derniers élèves de cette analyse démontrent un certain aboutissement dans les différentes genèses. L'exploration du modèle s'appuie sur le Di , puis la construction utilise de façon adéquate l'instrument Cercle (Rayon, Centre). La validation repose sur l'instrument Dc utilisé en parallèle sur le modèle et la construction. Ces élèves ont une utilisation pertinente des différents instruments disponibles et une vision du Cabri - dessin modèle par ses propriétés. La démarche de découverte s'appuie sur l'identification des propriétés de la figure par le déplacement. La démarche de modélisation reprend les différentes propriétés et enfin la démarche de validation démontre une réflexion sur la figure et ses propriétés. Leur ETG personnel semble proche de l'ETG idoine ainsi le paradigme identifier est le paradigme GII-N1.

5. CONCLUSION

5.1. ETG personnels et ETG idoine

Nous avons identifié cinq ETG personnels, pour trois paradigmes. Le paradigme GI-N0 est associé à un ETG et un binôme pour lequel les différentes genèses sont encore en construction. Le paradigme GI-N1 est associé à deux ETG et à cinq binômes. Pour ce paradigme, les genèses sont aussi en construction mais commencent à être mise en pratique. Les élèves rencontrent des difficultés, soit dans la genèse vidéo - figurale et la distinction du dessin et de la figure, soit dans la genèse instrumentale avec une difficulté dans l'utilisation de l'instrument Cercle (Rayon, Centre). Ces différentes difficultés impliquent une réflexion plutôt perceptive et instrumentée où les propriétés sont perceptives voire non identifiées. Enfin le dernier paradigme est le paradigme visé par l'ETG idoine, GII-N1. Il concerne deux ETG et trois binômes. Ces élèves ont su mettre en oeuvre les différentes genèses pour identifier les propriétés de la figure, les réinvestir dans leur reproduction et valider leur production. L'analyse des procédures des élèves en utilisant les ETG permet d'identifier que les différentes genèses sont les éléments moteur de l'évolution de leurs ETG personnels vers un niveau GII-N1 et que ces genèses s'enrichissent les unes des autres.

5.2. Bilan et perspectives

L'ingénierie que nous avons mise en place avait pour but de nous éclairer sur les apports éventuels d'un LGD dans un travail sur les propriétés géométriques en fin de primaire (9-12 ans). L'ETG idoine correspondant à l'activité présentée s'appuie sur trois genèses. La genèse vidéo - figurale vise une vision des Cabri - dessins par leurs propriétés et non par leur forme, elle s'appuie sur la décomposition dimensionnelle et l'évolution de la vision vers une vision non iconique de la figure. La genèse instrumentale vise une appropriation des instruments *Déplacer pour identifier des invariants* et *Déplacer pour valider une construction* qui sont utilisées tout au long de la séquence. La genèse discursivo - graphique vise une validation qui s'appuie sur les propriétés géométriques des figures proposées. Le paradigme de l'ETG idoine se situe au niveau GII-N1. Les différentes analyses des élèves observés montrent que l'utilisation d'un LGD et ses instruments spécifiques pour un premier apprentissage des propriétés a effectivement un impact sur les connaissances des élèves. C'est par l'aboutissement des trois genèses que le paradigme GII-N1 est effectivement le paradigme dans lequel les élèves résolvent l'activité. Il serait intéressant de questionner les effets à long terme de l'utilisation d'un LGD pour l'apprentissage des propriétés et particulièrement l'introduction du paradigme GII avec le travail sur la démonstration. On pourrait aussi questionner une utilisation plus précoce d'un LGD. Cette introduction ne viserait en aucun cas une approche du paradigme GII mais elle permettrait de faciliter la genèse instrumentale spécifique à l'environnement dynamique, et l'exploitation du paradigme GI-N1. Cela aurait probablement un impact sur la facilité ultérieure de la mise en place des deux autres genèses dans la visée d'un travail sur le paradigme GII-N1.

REFERENCIAS

- Assude, T. & Gélis, J-M. (2002). La dialectique ancien - nouveau dans l'intégration de Cabri à l'école primaire. *Educational Studies of Mathematics*, 50, 259-287.
- Braconne - Michoux, A. (2008). Évolution des conceptions et de l'argumentation en géométrie chez les élèves : paradigmes et niveaux de van Hiele à l'articulation CM2-6e. Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot - Paris 7, France.

- Coutat, S. (2012). Vers une évolution de la vision en géométrie au primaire avec un logiciel de géométrie dynamique. *Math - Ecole*, 218, 50-55.
- Coutat, S. & Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 97-126.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.
- Duval, R. & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-27.
- Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.
- Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.
- Kuzniak, A. & Richard, P. R., (2014). Espaces de Travail Mathématiques. Points de vue et perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (Número Especial TOMO I), pp. 29-39.
- Laborde, C. & Capponi, B. (1994). Cabri - Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (1.2), 165-210.
- Mithalal, J. (2010). Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Offre, B., Perrin - Glorian, M.-J., Verbaere, O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Petit x*, 72, 6-39.
- Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains. Paris, France : Armand Colin.
- Restrepo, A. (2008) Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ième. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Van Hiele, .P. M., van Hiele - Geldof, D. (1958). A method of initiation into Geometry at secondary school. Report on Methods of Initiation into Geometry, in Freudenthal, H., *Learning and Understanding in Mathematics*, a Tribute to Richard Skemp, 27-47.

Annexe I

Regroupement 1 - Les petites bêtes

Séance 1 - Cahier 1 : élèves en binôme avec Cabri Elem, introduction à l'environnement dynamique, première approche des instruments de construction (*point, droite, segment, triangle, cercle* et *carré*) et premières utilisations de *Di* et *Dc*.

Séance 2 : en classe entière, Cabri Elem projeté, introduction de la feuille de constat

Regroupement 2 - Parallèles et Perpendiculaires

Séance 1 - Cahier 2 : élèves en binôme avec Cabri Elem, introduction des instruments de construction *Perpendiculaire* et *Parallèle*, applications pour reproduire un rectangle et un parallélogramme.

Séance 2 : en binôme, à partir de films extraits de la séance précédente, les élèves évaluent l'utilisation des instruments *Perpendiculaire* et *Parallèle*.

Séance 3 : en classe entière, extraits de la séance cahier 2- séance 2 projetés, mise à jour de la feuille de constat avec les nouveaux instruments *Perpendiculaire* et *Parallèle*.

Regroupement 3 – Carré, Rectangle, Losange ...

Séance 1 : avec Cabri Elem, reconnaître et identifier des quadrilatères donnés (évaluation notée)

Séance 2 : avec papier-crayon, correction de l'évaluation en papier-crayon.

Regroupement 4 - Compas et Cercle

Séance 1 : avec Cabri Elem, introduction de l'instrument Cercle (Rayon, Centre)

Regroupement 5 - Symétries

Séance 1 : avec Cabri Elem, introduction de l'instrument *Symétrie Axiale* avec le déplacement

Séance 2 : avec Cabri Elem, introduction de l'instrument *Translation* avec le déplacement.

Annexe II

Cahier Compas - Cercle

Cercle et compas

Objectif/activité : identifier et mettre en œuvre deux utilisations de l'outil cercle, avec un segment donné comme rayon Cercle (Rayon, Centre), ou un point sur le cercle Cercle (Centre, Point). Réinvestissement dans diverses activités.

Déroulement : moments de travail en histoire entrecoupés de moments collectifs sur l'utilisation des outils cercle.

3. Observez les points et notez les observations sur la feuille.
A la fin de l'activité, les élèves reconstituent le cercle rouge, le cercle orange et le cercle bleu à partir des segments vert, violet et rose. Attribuez les couleurs pour le matériel.

Les noms des cercles et des segments ont été ajoutés pour l'article, pour faciliter la compréhension.

Le cercle 1 a pour rayon le segment c.
Le cercle 2 a pour rayon le segment b.
Le cercle 3 a pour rayon le segment a.
Le changement de longueur des segments change les rayons des cercles.

L'enseignante présente la consigne de la page 2, les élèves manipulent, observent et prennent des notes, puis l'enseignante demande que tout le monde passe à la page suivante

3. Réinvestissez le cercle rouge, orange et le cercle bleu à partir des segments vert, violet et rose. Quand les élèves ont fini, classez les cercles.

Mise en œuvre des deux utilisations possibles de l'outil cercle.

Pour les cercles 1 et 3 Cercle (Rayon, Centre) en utilisant le segment c comme rayon pour le cercle 1 et une extrémité du segment a comme centre ; et le segment a comme rayon pour le cercle 3 et une extrémité du segment c comme centre.

Pour le cercle 2 Cercle (Centre, Point) avec une extrémité du segment b qui définit le centre et l'autre extrémité qui définit la longueur du rayon.

On peut aussi utiliser Cercle (Rayon, Point) pour le cercle 2 avec le segment b comme rayon et une extrémité du segment 2 comme centre.

Page 3 : L'enseignante institutionnalise l'utilisation de l'instrument Cercle (Rayon, Centre) à partir d'un rayon puis d'un centre et note l'utilisation au tableau noir, exemple avec le premier cercle (1), puis les élèves terminent seuls les deux autres cercles.

4. Construisez un rectangle qui a pour côtés le segment rouge et bleu. Attention : les segments sont des droites, la fois les extrémités sont celles des côtés du rectangle. Notez les formes (carré ou rectangle).

Application de l'utilisation de l'instrument Cercle (Rayon, Centre).

Les segments deviennent déformables lorsqu'on valide. Validation d'élève : lorsqu'il modifie la longueur des segments vert et rouge, le rectangle doit aussi se modifier.

Page 4 non abordée en collectif

Relances : comment fait-on en papier crayon ? Par quoi commence-t-on en papier crayon ? Faire référence à la définition de l'instrument Cercle (Rayon, Centre) au tableau.

5. Réinvestissez le dessin ci-dessous. La construction doit bouger comme le modèle. Notez sur la feuille comment tu as fait.

Le quadrilatère est un quadrilatère quelconque. Le cercle a pour rayon un des côtés du quadrilatère, opposé au centre du cercle.

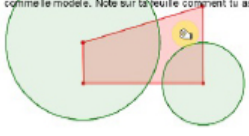
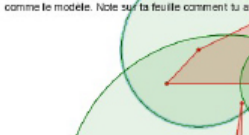
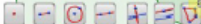
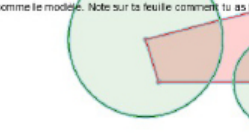
Pages 6 à 8 : sur le cercle comme ensemble de points à égale distance du centre, travaillé à travers une simulation d'un jeu de pétanque. Utilisation de l'outil cercle pour l'instrument Cercle (Centre, Point).

6. Réinvestissez le dessin ci-dessous. La construction doit bouger comme le modèle. Notez sur la feuille comment tu as fait.

Le quadrilatère est quelconque. Chaque cercle a pour rayon un des côtés du quadrilatère, opposé à son centre.

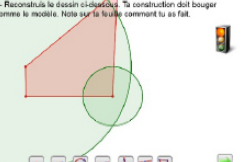
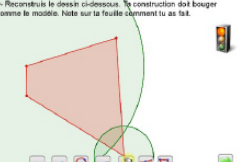
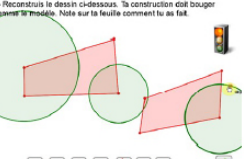
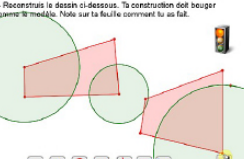
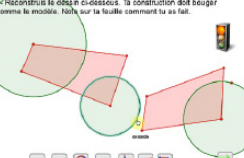
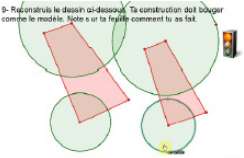
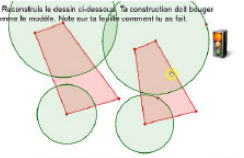
Annexe III

Production profil Iconique

9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait.  	9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait.  
1- Translation du modèle par déplacement du quadrilatère dans sa globalité (pas de déformation).	2- Construction en conservant la taille, l'orientation et la forme du modèle Quadrilatère puis Cercle [Centre, Point]
9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait.  	9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait.  
3- Ajustement perceptif du rayon des cercles construits.	4- Déplacement d'un sommet du modèle et déformation du modèle.
9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait.  	9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait.  
5- Déplacement d'un sommet de la construction et déformation de la reproduction.	6- La construction est effacée par les élèves.

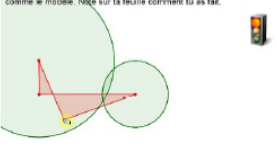
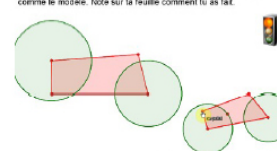
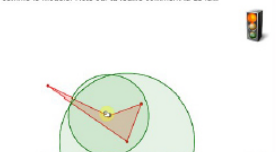
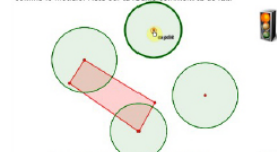
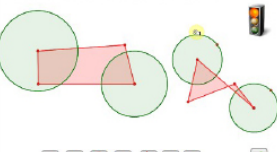
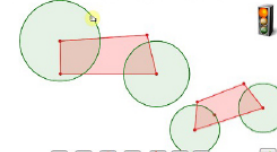
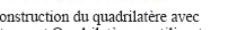
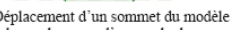
Annexe IV

Production profil 2

9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait. 	9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait. 
1- Déplacement d'un sommet du modèle	2- Déplacement d'un autre sommet du modèle
9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait. 	9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait. 
3- Reproduction à l'aide de l'instrument Quadrilatère puis Cercle (Centre, Point) en utilisant un des sommets du quadrilatère construit et un point libre.	4- Déplacement d'un sommet du quadrilatère construit.
9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait. 	9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait. 
5- Déplacement du même sommet du quadrilatère modèle.	6- Remarque d'un élève «il est où le point ?» en montrant le cercle 2 du modèle, puis bougeant le point libre du cercle 2 reproduit.
9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait. 	9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait. 
7- Reproduction complète en reprennant la même utilisation de l'instrument Cercle (Centre, Point) pour le cercle 2 puis Quadrilatère puis Cercle (Centre, Point) pour le cercle 1.	8- Déplacement d'un sommet du quadrilatère construit puis du quadrilatère modèle remarque : «il y a un truc de bizarre, c'est que le cercle en haut il bouge pas»

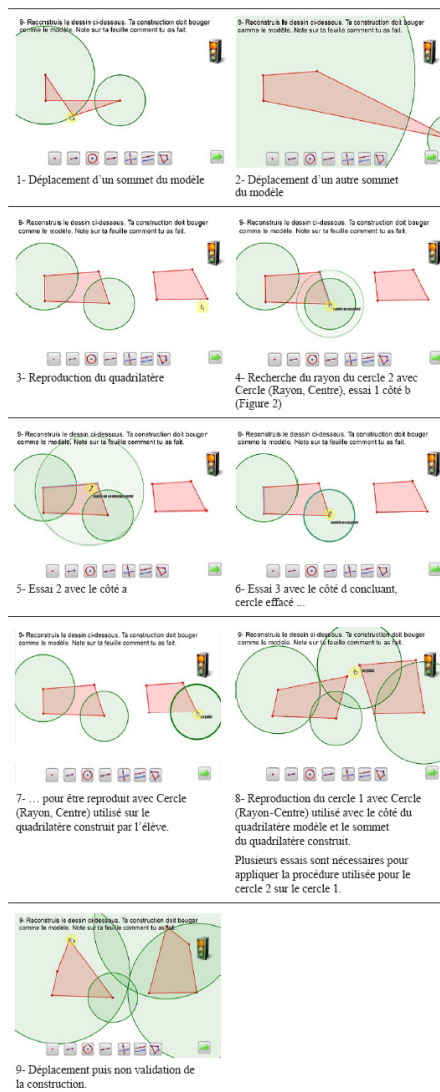
Annexe V

Production profil 3

8- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait.  	9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait.  
1- Déplacement d'un sommet du modèle	2- Reproduction avec les instruments Quadrilatère et Cercle (Centre, Point)
9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait.  	9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait.  
3- Déplacement d'un cercle de la reproduction	4- Déplacement d'un cercle du modèle (équivalent à une translation du modèle) réaction de l'élève : « alors ça c'est complètement raté »
9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait.  	9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait.  
5- Déplacement un sommet, puis un autre du modèle ?	6- Reproduction utilisant l'instrument Cercle (Rayon, Centre) avec les côtés du modèle
9- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait.  	8- Reconstitue le dessin ci-dessous. Ta construction doit bouger comme le modèle. Note sur ta feuille comment tu as fait.  
7- Construction du quadrilatère avec l'instrument Quadrilatère en utilisant les centres des cercles reproduits.	8- Déplacement d'un sommet du modèle qui change le rayon d'un cercle de la reproduction.

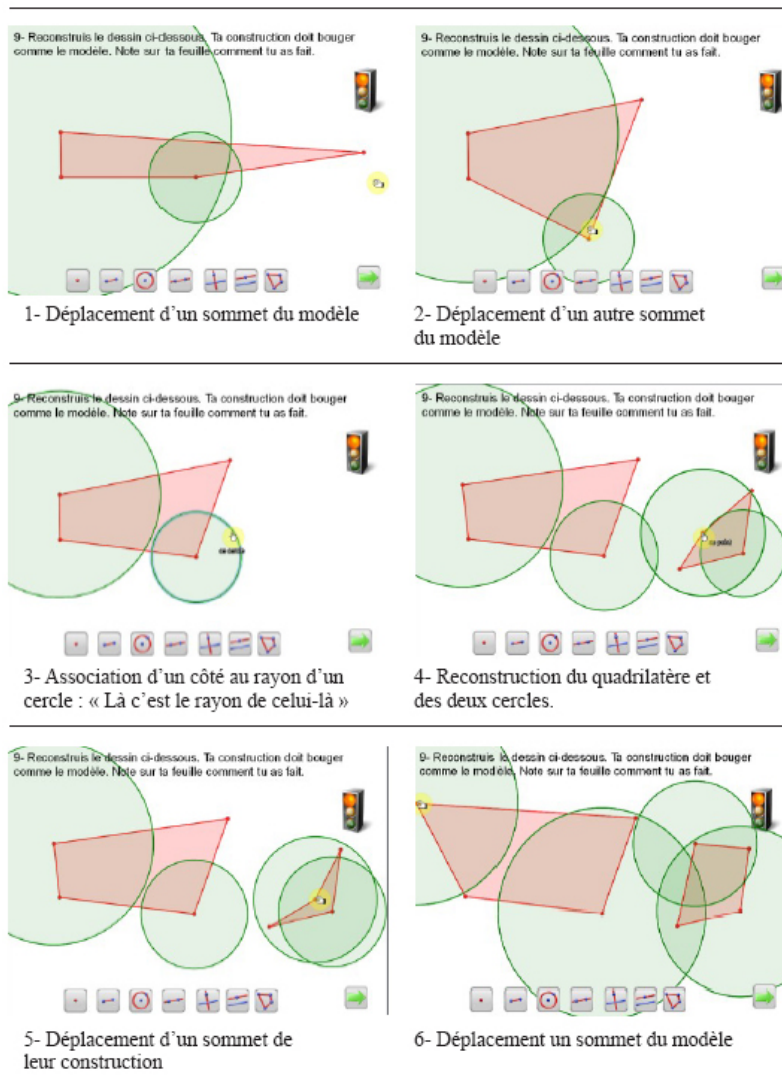
Annexe VI

Production profil 4



Annexe VII

Production profil 5



NOTAS

- 1 Nous utilisons la définition de Laborde et Capponi 1994 : *une figure géométrique est l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième étant l'un des dessins qui le représente.*
- 2 Nous reprenons la définition de Laborde et Capponi 1994 : *une représentation graphique sur l'écran de Cabri - géomètre.*
- 3 Une description des regroupements de séances est détaillée en annexe 1.
- 4 Le cahier est décrit dans l'annexe 2.